自然科学者のための

# 数学概論

## 応用編

寺沢寛一編

岩波書店

# まえがき

この書の前巻である"自然科学者のための数学概論"の初版を出したのは昭和6年のことである．その後たびたび版を重ねるにつれ紙型が磨滅して印刷ができなくなったのを機として改版を計画，専ら山内恭彦君，小谷正雄君，加藤敏夫君の絶大の努力を得て全面的に改稿，充実した内容を備えた新しい姿で，増訂版として出版したのは昭和29年である．これまた相当に版を重ね，いささか科学技術振興の一翼に貢献しつつあることは，私のまことに欣びとするところである．この増訂版を出す際に，その序文にも書いてある通り，上記の方々および種々の助言を与えられた諸君の間で，続巻として，自然科学への数学の応用が如何になされるかを示す資料を集めて上梓しようという企画が持たれ，その一端のあらわれとなったのがこの書である．執筆された方々およびその分担は

A　偏微分方程式の解法

| | |
|---|---|
| 第 1, 2, 3, 4 章 | 犬井鉄郎君 |
| 第 5 章 | 小谷正雄君 |

B　微分方程式の近似解法

| | |
|---|---|
| 第 1 章 | 加藤敏夫君 |
| 第 2, 3 章 | 橋本英典君 |
| 第 4, 5 章 | 藤田　宏君 |

C　変分法

| | |
|---|---|
| 第 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 章 | 加藤敏夫君 |

D　物理学の諸問題

| | |
|---|---|
| 第 1, 2 章 | 宮島竜興君 |
| 第 3, 4 章 | 木原太郎君 |
| 第 5 章 | 今井　功君 |

である．いずれも学界の先端に立って活動されている方々であって，数年にわ

たって研究の余暇をこの書のために尽力されたことは感謝にたえない．中にはすでに“岩波講座現代応用数学”の一部として読者に親まれた章もかなりあるが，それらは特に推敲を重ねてこの書の重要な部分となっている．私はこの書が若い学徒の勉学に資することが多大であると信じて疑わない．この書は題材を主として物理学に求めたので，工学その他における数学の応用に言及し得なかったのは遺憾であるが，これらについてはまた他の機会に考究したいと念じている．

この書の編集にあたって，全部の構想について山内恭彦君の援助を受け，各執筆者間の連絡ならびに用語の整理などについて加藤敏夫君を煩わし，また印刷校正その他について岩波書店編集部の諸君の世話になった．記してこれらの方々に謝意を表する．

昭和35年3月1日

寺沢寛一

# 凡　　例

**1. 構　　成**

本書は四つの編 A, B, C, D より成る．各編はいくつかの章，各章はいくつかの節(§)より成る．章および節には番号がついている．なお，上巻(寺沢寛一，自然科学者のための数学概論，増訂版)を便宜上 I という記号で表わす．

**2. 章節の引用**

I§9·2, A§2·3 のような形で行う．I§9·2 は上巻第9章第2節(上巻の記号では 9·2) をあらわし，A§2·3 は A 編第2章 §3 をあらわす．ただしおなじ編の中で引用するときには，編の記号を省略し，§2·3 のように書く．おなじ章の中で引用するときには，章の番号も省略して，単に §3 と書くこともある．

**3. 式の引用**

主なる数式には (*3.4*) のような番号がついている．これはその章の §3 の第4式であることを示す．これを引用するときには (A *2.3.4*) のように書く．これは A 編第2章の式 (*3.4*) であることを示す．ただしおなじ編の中で引用するときには，編記号を省略して，(*2.3.4*) のように書く．またおなじ章の中で引用するときには，章の番号も省略して (*3.4*) のように書く．なお上巻の式の引用は ( I *7.72*) のようにして行う．これは上巻の式 (7·72) をあらわす(上巻では各章ごとに式に通し番号がついている)．

**4. 文　　献**

章または編全体に関係する主な参考書は，各編の終りにまとめて [1], [2], [3] のように番号をつけてあり，その編内ではこの番号で引用する．

**5. 用語，記号，索引**

用語，函数記号などは，全巻(上巻を含めて)を通じて統一するように努めたが，特殊なものについては，この限りでない．用語についてはかなり詳細な索引を巻末にあげたから，本書の一部分だけを読まれる読者も，特に不便を感じられることはないと思う．索引の配列はローマ字式による．

# 目　　次

## C　変分法

## D　物理学の諸問題

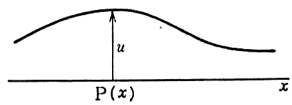
# A　偏微分方程式の解法

## 第 1 章　一般積分と境界条件

### §1　線型二階偏微分方程式の積分曲面

1)　**一次元の波動の方程式の一般解**　物理学や工学の基本方程式で最もよく現われる偏微分方程式は線型二階である．その中で独立変数が二個の場合が一番簡単だからこの場合から始める．

たとえば弦の振動の場合には弦の平衡の位置を示す直線に沿って $x$ 軸をとり弦の一点を $x$ 座標で表わすとき座標 $x$ に属する一点 P の横変位 $u$ は座標 $x$ のみでなく時間変数 $t$ によって変るから $u=u(x,t)$ が横変位を表わし，独立変数 $x$ は座標変数だが，第二の独立変数は時間変数 $t$ である．この場合でも $x, t$ を表わす直角座標軸をとり，これに対して従属変数 $u(x,t)$ を第三次元として三次元の直角座標をとれば，横変位の場所および時刻に関する依存性は三次元空間 $x, t, u$ 内に描き出された曲面として表わされる．

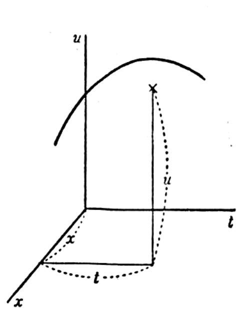


第 1.1 図

従属変数 $u(x,t)$ はよく知られているように $x, t$ に特別な形で依存し，いつも一次元の波動の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.1}$$

が成立している．すなわち従属変数 $u=u(x,t)$ は (*1.1*) という偏微分方程式を満足していなければならない．微分方程式を満足する函数 $u$ すなわち解のことをまた積分と呼ぶ習慣に従って，第1.2図に示されたような曲面を偏微分方程式 (*1.1*) の**積分曲面**であるという．偏微分方程式を解くことを幾何学的，表象的に積分曲面を求めるといい直して，これから積分曲面を求める問題を考える．(*1.1*) は $t$ の代りに



第 1.2 図

$$ct=y \tag{1.2}$$

と置換すれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

となり，その解は $F, G$ を任意の函数として

$$u(x,y)=F(x+y)+G(x-y) \tag{1.4}$$

で与えられることがわかる．$F, G$ が別々に (1.3) を満たすことは偏微分してみればすぐわかるが，(1.3) が線型方程式であるために，$F, G$ が解ならその和も解であることから (1.3) の解は $x+y$ の任意の函数 $F$ と $x-y$ の任意の函数 $G$ の和として与えられることを知るのである（重ね合わせの原理）．任意の函数二個を含む二階偏微分方程式の解には**一般解**という名が与えられている．この意味で (1.3) の一般解が (1.4) によって与えられる．

積分曲面という言葉を使うならば (1.4) の積分曲面は，このように任意の函数 $F(x+y)$ と $G(x-y)$ で表わされる任意の二曲面の和の形として与えられる．元の変数に戻して考えれば，波動の方程式 (1.1) の積分曲面は

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct) \tag{1.5}$$

によって与えられ，$F$ は物理的に時間がたつとともに $x$ の減る方向（$-x$ の方向）に速さ $c$ で進む任意の波形を表わし，$G$ は時間がたつとともに $x$ の増す方向（$+x$ の方向）に速さ $c$ で進む任意の波形を表わしている．このことはたとえば $u(x,t)=G(x-ct)$ につき，$x, t$ に対し $x+\Delta x$, $t+\Delta t$ だけ変えた場合に

$$G(x-ct)=G((x+\Delta x)-c(t+\Delta t))$$

が成り立つ条件をさがしてみると理解できる（波形の伝播）．

2) **一次元の波動方程式の一般解と初期値問題** このように波動方程式の積分曲面は $\pm x$ の方向に伝播して行く任意の二個の進行波を表わす曲面の和として与えられることがわかった．波動方程式の積分曲面という意味でこれを波動曲面という言葉で呼ぶことにすると，われわれの得た波動曲面では $F(x+ct)$ と $G(x-ct)$ で $F, G$ の函数が何でもよいためにあまりに一般で，どんな形をしているやら皆目その形がわからない．

ところが物理的に考えれば，たとえば，ある時刻に弦上の各点がどこに変位しておりかつどんな速度で運動しつつあるかを与えれば，当然きまった波形が弦に沿って起り将来の弦の運動は因果的に決定されると思われる．この直観は果して数学的に正しいであろうか．初期の時刻を $t=0$ ときめて上の条件を式で表わしてみよう．これは求める積分曲面を $u(x,t)$ とするとき $t=0$ で条件

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \tag{1.6'}$$

として与えられることがわかる．(*1.6*), (*1.6'*) の条件を満足する解を求める問題を**初期値問題**と名づける．(*1.5*) で $t=0$ とした形を (*1.6*) に代入し，また (*1.5*) を $t$ で偏微分してから $t=0$ とおいて (*1.6'*) に代入すれば

$$F(x)+G(x) = \varphi(x), \quad F'(x)-G'(x) = \psi(x)/c \tag{1.7}$$

を得るから，後式を積分して $F(x)-G(x)$ を求め，前式と組み合わせて

$$F(x) = \frac{1}{2}\left\{\varphi(x)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(X)dX\right\}, \quad G(x) = \frac{1}{2}\left\{\varphi(x)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(X)dX\right\}. \tag{1.8}$$

(*1.8*) から $F(x+ct)$ および $G(x-ct)$ を作って (*1.5*) に入れれば

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(X)dX \tag{1.9}$$

が (*1.6*), (*1.6'*) の初期条件を満足する波動方程式 (*1.1*) の解であることがわかる．(*1.9*) を波動に関する **Stokes の公式**と呼ぶ．“初期条件によって $\varphi$ および $\psi$ の形が指定されると (*1.1*) の積分曲面が (*1.9*) によって一意的に定まる”．こうしてわれわれの予想は的中し，初期条件により積分曲面の形が確定したのである．すなわち，初期での変位と速度とを各点で与えるという物理的に自然な条件によって解が一意的に決定するという当然の結果が得られたのである．

このように物理学および工学の問題としては単に与えられた偏微分方程式の解を求めるという一般の問題よりも物理的要請から指定される付加条件を満足する解を求めることが，より重大な意味をもつ．この場合に付加条件が余りに多すぎれば，そんな積分曲面は存在しなくなるであろう．そしてまた余りに条件が少なすぎれば，これを満足する解はいくらもあって，結果として許される積分曲面が確定してない．

## §2　線型二階偏微分方程式に関する Cauchy の問題　特性条件と特性曲線

与えられた偏微分方程式が，いま論じた波動方程式に限らず，もっと一般に $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ を $x,y$ の勝手な函数として

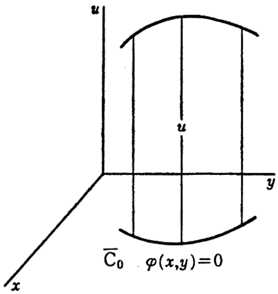
$$L[u] \equiv A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.1}$$

の形であるとき，上の初期値問題を含む一般的な付加条件で，ちょうどその解の一意性が保証されている問題に，Cauchy の問題と名づけられているものがある．

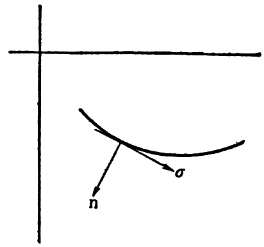
Cauchy は $x, y, u$ 三次元空間内に勝手な空間曲線 $C_0$ を考えたとき，$C_0$ をその上に含む (*2.1*) の積分曲面を定める問題の系統的な研究を行なった．$C_0$ を**初期曲線**と呼ぶ．$C_0$ を与えるには，それの $x, y$ 面への正射影である平面曲線 $\overline{C}_0$：

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{2.2}$$

を考え，$\overline{C}_0$ に沿って高さ $u$ が与えられているように考える．$\overline{C}_0$ を**初期基礎曲線**と名づ




第 2.1 図




第 2.2 図

ける．$\overline{C}_0$ を (2.2) の形の代りに，これに沿って測った曲線の長さ $\sigma$ をパラメタとして

$$x=x(\sigma),\quad y=y(\sigma) \tag{2.3}$$

の形で与えてもよい．すると $C_0$ を指定するには，さらに $\overline{C}_0$ に沿って高さを $\sigma$ の函数として

$$u=u(\sigma) \tag{2.4}$$

と与えればよい．われわれは (2.4) に付加して，$\overline{C}_0$ に沿ってその法線 n の方向に関する $u$ の方向微分係数

$$\frac{\partial u}{\partial n}=N(\sigma) \tag{2.5}$$

を指定してやることを考える．$\overline{C}_0$ に沿っては (2.4) によって $u(\sigma)$ が指定されているから，実は $u$ の接線方向 $\sigma$ に関する方向微分係数はすでに指定されている：

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}\equiv\frac{\partial u}{\partial \sigma}(\sigma)=\dot{u}. \tag{2.6}$$

したがって (2.5), (2.6) から $\overline{C}_0$ に沿って $u$ の $x$ および $y$ に関する偏導函数 $p\equiv\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q\equiv\dfrac{\partial u}{\partial y}$ が指定される結果になる．ゆえにわれわれは $\overline{C}_0$ に沿って (2.3), (2.4) のみならず

$$p=p(\sigma),\quad q=q(\sigma) \tag{2.7}$$

が与えられていると考える．一般に

$$\frac{du}{d\sigma}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma}$$

の関係があるから，これら $\overline{C}_0$ に沿い指定された $p(\sigma)$, $q(\sigma)$ と，(2.3), (2.4) で指定された $x(\sigma)$, $y(\sigma)$, $u(\sigma)$ との間には

$$\frac{du}{d\sigma}=p(\sigma)\frac{dx}{d\sigma}+q(\sigma)\frac{dy}{d\sigma} \tag{2.8}$$

の関係が成立しなければならない．(2.7) で定まる二個の偏導函数 $p, q$ が (2.3), (2.4) で定まる初期曲線 $C_0$ に沿って指定されていることは，幾何学的に考えると，$C_0$ に沿ってこれを通って定めるべき積分曲面の接平面の方向が指定されていることであるが，“(2.8) の条件が成り立つときに限って各点で局所的に考える接平面が $\sigma$ を連続的に変えていったとき，喰い違うことなく滑らかに変ってちょうど $C_0$ の近傍で帯状に曲面を包絡す

る"のである．この意味によって (2.8) を**成帯条件**と呼ぶ．

$\overline{C}_0$ の付近でこれに沿って積分曲面が定まるためには，すべての $u$ の偏導函数が $\overline{C}_0$ に沿って一意的に定まれば十分である．なんとなればその場合には

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]+\cdots \tag{2.9}$$

の形の $(x,y)$ に関する二重 Taylor 級数が $C_0$ に沿って一意的に定められ，その収束円の内では収束して少なくとも $C_0$ の極めて近傍での求める積分曲面の形を与えることになるからである．

慣習に従って (I §8.8 参照)，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=q, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=t \tag{2.11}$$

と略記すれば，(2.1) は

$$L[u]\equiv Ar+2Bs+Ct=\Phi(x,y,u,p,q) \tag{2.12}$$

と書ける．

$p(\sigma)$ を $\sigma$ に関して微分して得られる関係 $\dfrac{dp}{d\sigma}=\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{dx}{d\sigma}+\dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{dy}{d\sigma}$ と (2.10), (2.11) から，成帯条件 (2.8) に類似の関係

$$\frac{dp}{d\sigma}=r\frac{dx}{d\sigma}+s\frac{dy}{d\sigma} \tag{2.13}$$

が $\overline{C}_0$ に沿って成立しなければならない．全く同様に

$$\frac{dq}{d\sigma}=s\frac{dx}{d\sigma}+t\frac{dy}{d\sigma}. \tag{2.14}$$

このようにして (2.12), (2.13), (2.14) という二階偏導函数 $r,s,t$ に関して都合三個の条件式が得られた．パラメタ $\sigma$ に関しての微分を・で表わし，並べて書くと

$$\left.\begin{aligned} Ar+2Bs+Ct &= \Phi(x,y,u,p,q),\\ \dot{x}r+\dot{y}s &= \dot{p},\\ \dot{x}s+\dot{y}t &= \dot{q}, \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

$r, s, t$ に関する係数の行列式

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = A\dot{y}^2-2B\dot{x}\dot{y}+C\dot{x}^2 \tag{2.16}$$

が $\bar{C}_0$ に沿って至る所で 0 に等しくない：

$$\Delta \equiv A\dot{y}^2-2B\dot{x}\dot{y}+C\dot{x}^2 \neq 0 \tag{2.17}$$

ならば，$r, s, t$ の値が連立方程式 (2.15) から $\bar{C}_0$ に沿って一意的に定まってくる．

さらに同じ条件の下に任意の高階偏導函数まで一意的に定まってくる．例えば (2.15) の三式を $x$ に関して偏微分した関係は

$$\left.\begin{aligned} Ar_x+2Bs_x+Ct_x &= \Psi(x,y,u,p,q,r,s,t),\\ \dot{x}r_x+\dot{y}s_x &= \dot{r},\\ \dot{x}s_x+\dot{y}t_x &= \dot{s} \end{aligned}\right\}$$

の形に得られるから，同じ $\Delta \neq 0$ の条件の下に $r_x, s_x, t_x$ が $\bar{C}_0$ に沿って一意的に定まってくる．同様に $x$ の代りに $y$ に関して (2.15) を偏微分した式から同じ条件の下に $r_y, s_y, t_y$ が一意的に定まる．

さらに同じ“(2.17) の条件の下に任意の高階偏導函数まで一意的に決定される”ことが証明される．このようにして (2.17) の条件が $\bar{C}_0$ に沿って至るところで満足されている場合には，“結局 $\bar{C}_0$ の近傍で積分曲面が一意的に決定される”ことが結論される．

逆に

$$\Delta \equiv \dot{x}^2\{A(\dot{y}/\dot{x})^2-2B(\dot{y}/\dot{x})+C\} = 0 \tag{2.18}$$

なるとき，これを**特性関係**といい，$x, y$ 平面上の一点において $\Delta=0$ となるような方向を**特性方向**という．初期基礎曲線 $\bar{C}_0$ の接線方向が特性方向と一致するような場合には，この点では上述の方法で $r, s, t$ などの偏導函数が一意的に決まらなくなる．

初期基礎曲線 $\bar{C}_0$ に沿って $u(\sigma)$ および法線方向の導函数 $N(\sigma)$ を指定した値

に等しくするような偏微分方程式 (*2.1*) の積分曲面を決定する問題を **Cauchy の問題**という．

上の考察により "初期基礎曲線 $\overline{\mathrm{C}}_0$ 上の任意の点において

$$\varDelta \equiv A\dot{y}^2 - 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{x}^2 \neq 0$$

である場合には Cauchy の問題は一意的に解ける". これに反し，特性関係

$$\varDelta \equiv 0$$

が成り立つような場合には，Cauchy の問題の解は一般には存在しない．

$\overline{\mathrm{C}}_0$ の至るところで特性関係が満足されているような曲線を**特性曲線**という．ゆえに (*2.17*) により特性曲線は微分方程式

$$\varDelta \equiv A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0 \tag{2.19}$$

の解として求められる．$\overline{\mathrm{C}}_0$ がパラメタ表示 (*2.3*) の代りに

$$\varphi(x, y) = \text{定数} \tag{2.20}$$

の形で表わされているときは，この式の微分をとって

$$dy/\varphi_x = -dx/\varphi_y \tag{2.21}$$

の関係が得られるから，(*2.13*) は偏微分方程式の形で

$$A\varphi_x{}^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y{}^2 = 0 \tag{2.22}$$

と書ける．(*2.22*) を**特性偏微分方程式**という．

特性曲線，特性帯論の概観を得るためには [8], [24], [21] を，一層進んだ記述は [3]，さらに最も詳細は [6], [7] を参照されたい．

## §3　二階線型偏微分方程式の分類　双曲型，楕円型，放物型とその標準型

二階線型偏微分方程式の一般の形は (*2.1*) で与えられていたが，独立変数 $x$, $y$ を適当に選ぶことにより，もっと簡単な標準の型にすることができる．新しく選ぶ独立変数を $\xi, \eta$ とし，これが

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{3.1}$$

の変換によって与えられるものと考えよう (I §8.10〜8.11 参照)．偏導函数を $\partial u/\partial x = u_x$ などで表わすと

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\varphi_x + u_\eta\psi_x, \quad u_y = u_\xi\varphi_y + u_\eta\psi_y, \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\varphi_x{}^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + u_{\eta\eta}\psi_x{}^2 + u_\xi\varphi_{xx} + u_\eta\psi_{xx}, \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\varphi_y{}^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + u_{\eta\eta}\psi_y{}^2 + u_\xi\varphi_{yy} + u_\eta\psi_{yy}, \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y + u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + u_\xi\varphi_{xy} + u_\eta\psi_{xy}
\end{aligned}$$

の関係が得られるから，(*2. 1*) の左辺に代入して

$$Q(\varphi, \psi) = A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y \tag{3.2}$$

の記号で与えられる表式を導入すると，(*2. 1*) の左辺は新変数を使って

$$L[u] = Q(\varphi, \varphi)u_{\xi\xi} + 2Q(\varphi, \psi)u_{\xi\eta} + Q(\psi, \psi)u_{\eta\eta} + L[\varphi]u_\xi + L[\psi]u_\eta \tag{3.3}$$

と書き表わすことができる．

ゆえに求める変換函数 $\varphi, \psi$ をちょうど (*3. 2*) の $Q$ の形で

$$Q(\varphi, \varphi) = 0, \quad Q(\psi, \psi) = 0 \tag{3.4}$$

を満足するように選んだとすれば (*3. 3*) は

$$L[u] = 2Q(\varphi, \psi)u_{\xi\eta} + \cdots \tag{3.5}$$

の形に書けることがわかる．ここに $\cdots$ は $u$ の新変数 $\xi, \eta$ に関する一階以下の偏導函数しか含まない．(*2. 1*) の右辺を新変数で書き換えても，一階以上の偏導函数は含まれないから，結局与えられた方程式 (*2. 1*) は変換の結果

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{3.6}$$

の形をとることがわかる．

このような変換が実数の範囲で行われるためには，(*3. 4*) を満足する $\varphi, \psi$ が実数の範囲で求められねばならない．ところがこの条件は特性偏微分方程式 (*2. 15*) が実の解を有すること，いいかえれば，(*2. 15*) を $\lambda = \varphi_x/\varphi_y$ を使って二次方程式

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0, \quad \lambda = \varphi_x/\varphi_y \tag{3.7}$$

の形に書いたとき，これが二個の実根をもつ条件に帰着され，その (*3. 7*) に対する判別式について，条件は

$$B^2 - AC > 0 \tag{3.8}$$

が成り立たなくてはならない．与えられる偏微分方程式 (*2. 1*) の係数である函数 $A, B, C$ がつねに (*3. 8*) の条件を満足する場合に，(*2. 1*) を**双曲型**であるという．たとえば，一次元の波動の方程式 (*1. 1*) は，その代表的な例である．双曲型の方程式は実の変換の範囲で簡単な形 (*3. 6*) に移される．(*3. 6*) を双曲型方程式の**標準型**という．

(*3. 8*) とは反対に

$$B^2 - AC < 0 \tag{3.9}$$

で (*3. 7*) の二根が複素根になる場合には，方程式 (*2. 1*) は**楕円型**であるという．二次元のポテンシアルを表わす Laplace の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.10}$$

はその代表的な例である．

楕円型では，それを標準型 (*3. 6*) にする変換は複素変換になって一般に不便だから，(*3. 1*) の $\xi, \eta$ からさらに

$$\sigma=\frac{\xi+\eta}{2},\quad \tau=\frac{\xi-\eta}{2i} \tag{3.11}$$

によって定義される $\sigma,\tau$ を新変数に選ぶ.

最初の方程式 (*2.1*) に現れる函数が実ならば，$\xi,\eta$ は共軛複素数になるので，(*3.11*) から定まる $\sigma,\tau$ は実数である. (*3.11*) から

$$u_\xi=(1/2)(u_\sigma+u_\tau/i),\quad u_\eta=(1/2)(u_\sigma-u_\tau/i),\quad u_{\xi\eta}=(1/4)(u_{\sigma\sigma}+u_{\tau\tau})$$

という結果が得られるから，(*3.5*) すなわち

$$L[u]=2Q(\varphi,\overline{\varphi})u_{\xi\eta}+\cdots$$

は独立変数 $\sigma,\tau$ を使って書けば

$$\frac{\partial^2u}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}=G\left(\sigma,\tau,u,\frac{\partial u}{\partial\sigma},\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) \tag{3.12}$$

の形をとり実の方程式になる. (*3.12*) を楕円型方程式の標準型という.

双曲型と楕円型の中間で，つねに

$$B^2-AC=0 \tag{3.13}$$

の成り立つ場合を**放物型**という. この場合には二次方程式 (*3.7*) は等根になって $\xi,\eta$ は独立でなくなる. この場合には，一方の独立変数はそのままに $[\varphi\equiv x]$ として，他方を (*3.4*) の解である $\psi$ に選べばよい.

例えば $A\neq0$ の場合には (*3.2*) から

$$Q(\psi,\psi)=(1/A)(A^2\psi_x{}^2+2AB\psi_x\psi_y+B^2\psi_y{}^2)=(1/A)(A\psi_x+B\psi_y)^2=0,$$
$$Q(x,\psi)=A\psi_x+B\psi_y=0,\quad Q(x,x)=A\neq0$$

の関係が得られるから (*3.3*) から

$$L[u]=Au_{\xi\xi}+\cdots.$$

その結果，原方程式は

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}=G\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{3.14}$$

に移される. (*3.14*) が放物型の標準型である.

$x$ 方向に延びている一次元の熱伝導の方程式は時間変数を $t$ と書くとき

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \tag{3.15}$$

の形で与えられて，放物型の代表的例である.

## §4 波動の方程式の解と初期値，境界値との関連

一次元の波動の方程式は，簡単に一般解が得られて，指定された付加条件を満たす解も比較的容易に求められ，双曲型の方程式の重要な性質を説明するのに便利である. この節で，この簡単な例について多少立入った考察をするのは，単なる波動方程式そのものだけでなく，双曲型方程式の特徴を表わしている意味で着目するのである.

波動の方程式は §3 の方法に従えば，標準型にするに選ぶべき新独立変数 $\xi,\eta$ は

$$\xi=x+y,\quad \eta=x-y \tag{4.1}$$

であることがわかる. 実際この変換を行えば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0 \tag{4.2}$$

で与えられ，これからその一般解

$$u=F(\xi)+G(\eta) \tag{4.3}$$

が求められる．元の変数に戻せば

$$u=F(x+y)+G(x-y)=F(x+ct)+G(x-ct) \tag{4.4}$$

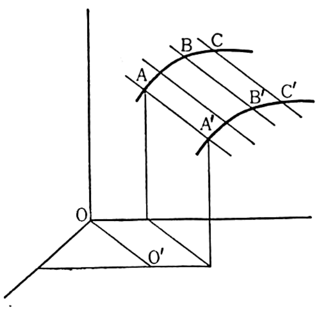
という一般解が得られて，物理的に $x$ 軸の正負の方向に伝わる二個の波動曲面の重ね合わせになっている．このように時刻 $t$ における場所 $x$ での波動 $u(x,t)$ は基本になる二個の波動曲面 $F,G$ を重ねたものであるが，各々の波動曲面 $F,G$ は §1 に示したように初期条件 (*1.6*),(*1.6′*) からその函数形が (*1.7*) によって与えられていた．すなわち幾何学的に考えると

$$\left.\begin{aligned} F(x+ct)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x+ct}\psi(X)dX\right\},\\ G(x-ct)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x-ct)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x-ct}\psi(X)dX\right\}\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

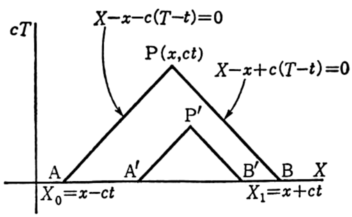
という二個の曲面を重ね合わせたものとして全体の波動は与えられるのである(1)．ただし $x_0$ による見掛上の不定性はもちろん重ね合わせの結果は消えて，Stokes の波動公式 (*1.9*) となる．

いま $X, cT$ を両軸とする直角座標をとり，場所 $X=x$，時刻 $T=t$ を表わす点 P$(x,ct)$ における $u$ の値に注目しよう (第 4.2 図).

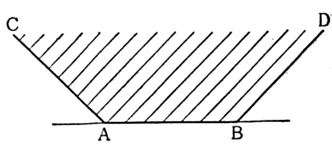
いま P を通り両軸に 45° の傾きをなす直線 PA, PB を引き $X$ 軸 ($T=0$) との交点を A, B とすれば，PA, PB は特性曲線であるからその上で $X-cT$, $X+cT$ の値は不




第 4.1 図




第 4.2 図

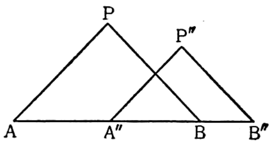



第 4.3 図

(1) なお特性曲線に沿っては $x\pm ct$ は定数で $F,G$ が不変だから，これらの波動曲面は特性曲線上では一定の高さをもつ直線を母線として囲まれた曲面を表わしている．$t=t$ で切った波動曲面の切口 O′A′B′C′ は初期 $t=0$ での O, A, B, C の各点が特性曲線に沿って移動してきた結果と考えられる．

変であって A 点の $X$ 座標は $X_0=x-ct$, B 点の $X$ 座標は $X_1=x+ct$ であるから Stokes の波動公式によって $u(x,t)$ の値は初期曲線 $T=0$ における A および B での $u$ の初期値 $\varphi(x-ct)$, $\varphi(x+ct)$ および AB の区間における $\partial u/\partial t$ の初期値 $\psi(X)$ の積分 $\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(X)dX$ にのみ依存することがわかる．すなわち波動方程式の解 "$u(x,t)$ の値は P 点を通る二本の特性曲線が初期曲線上に切りとる部分 AB の初期値にのみ依存する" ことがわかる．"AB を P の**依存区域**という"．逆に $T=0$ における区域 AB の影響の方は各点を通る二本の特性曲線に沿って $T>0$ の区域へ伝って行くから $T>0$ に対して末拡がりに拡がった第 4.3 図の斜線区域に及んでいる．"斜線区域 CABD を初期区域 AB の**影響区域**という"．

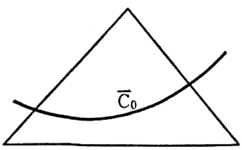
第 4.2 図 の △APB 内の任意の一点 P′ の波動は分域 A′B′ 上の初期値にのみ依存し A′B′ は AB の範囲を出ないから，"APB 内のどこの値も AB 上の初期値によって定まる．ゆえに △APB を AB の**決定区域**という"．△APB の外の点 P″ に対しては AB 上の初期値だけからは一意的に決定できない (第 4.4 図)．P″ の $u$ の値は A″B″ 上の初期値に依存し一般に A″B のみらず BB″ 上の初期値にも依存するからである．いま AB 上の初期値を確定しておいたとすれば，△APB の範囲にある限り積分曲面は確定しているが，BB″ 上の初期値を補って外にまで積分曲面を拡げると，BB″ 上の値の変化に応じて APB 内では同じ曲面だが "外側にでると異なる曲面に連なる多意の接続が可能になる"．すなわち "一本の特性曲線 PB を境にして一つの積分曲面を外に接続するときに多くの積分曲面が作れる"．



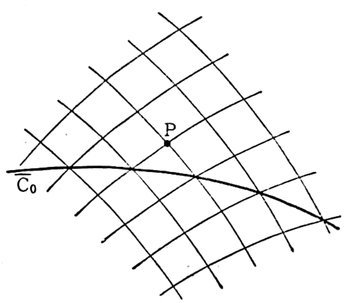
第 4.4 図

## §5 双曲型方程式の初期条件に関する一般的考察

"Cauchy の問題の一般の結果によれば，初期条件としては文字通り $t=0$ でなくても，同じ特性曲線と一度以上交わることのない勝手な初期 (基礎) 曲線 $\overline{C}_0$ (第 5.1 図) に沿って $u$ とその第一偏導函数を勝手に指定しても，その解が一意的に定まることが結論される"．この一般の場合，偏微分方程式の係数 $A,B,C$ などは一般には $x,y$ の函数になり，特性曲線が波動方程式の場合のように直線ではなく，一般の二種類の曲線族になる．この場合でも，標準型が



第 5.1 図



第 5.2 図

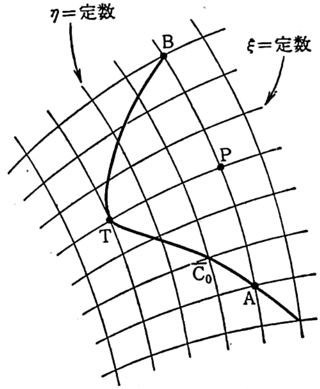
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0 \tag{5.1}$$

の形になるときなら一般解はやはり

$$u=F(\xi)+G(\eta) \tag{5.2}$$

の形で与えられ，積分曲面決定の問題は定性的には波動の方程式と全く同様である．$\overline{\mathrm{C}}_0$ 上の任意の点でその方向が特性曲線の方向と一致せず，第 5.2 図に示したように $\overline{\mathrm{C}}_0$ の近傍の点を通過して $\overline{\mathrm{C}}_0$ と交わる二種の特性曲線が必ず一本ずつ引けるときは [以下これを 1° の場合ということにする]，P を通る $\xi=$ 定数，$\eta=$ 定数 の値が定まり，$F(\xi)$, $G(\eta)$ が定まってくるからである．

しかし第 5.3 図の場合のように $\overline{\mathrm{C}}_0$ が一本の特性曲線に二回以上交わり，ある点でその方向が特性方向と一致するような場合 [以下これを 2° の場合ということにする] には，$\overline{\mathrm{C}}_0$ 全体を初期曲線として Cauchy の問題を解くことはできない．この場合，$\overline{\mathrm{C}}_0$ の一部 TA においては決して $\overline{\mathrm{C}}_0$ の方向が特性方向と一致することがなく，TA が三角形 TPA の決定区域になる．$\overline{\mathrm{C}}_0$ の他の一部 TB でも事情は同じで TB が三角形 BPT の決定区域になる．したがって，“一般に両方の部分から作った積分曲面は特性曲線 PT に沿って喰い違いがあり，初期曲線を含む一個の積分曲面というわけには行かない”．このことはまた初期曲線の一部“TB は他の一部 TA の影響区域に属し，すでにその $G(\eta)$ は TA 上の初期値から定まってしまうから，TA 上の値とは無関係に TB 上の初期値が与えられない”と考えても理解される．ただし“$\xi$ 特性曲線の方は TA の部分と TB の部分を通るものは全く異なるから，相互の影響はない”．すなわち“$F(\xi)$ の方は TB 上でも勝手に指定してよい”．



第 5.3 図

波動の方程式の初期値問題 (*1.6*) および (*1.6′*) の解が一意的に定まったのは，勝手に指定された二個の条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \tag{5.3}$$

から一般解を形成する二個の波動曲面 $F, G$ の形が $(4.5)$ によって $\varphi, \psi$ から一意的に定まったためであった．もっと一般の双曲型の方程式 $(5.1)$ の場合について，一般の Cauchy の問題の場合でもこの間の事情は同じであって，$1°$ の場合なら $(5.3)$ に対応する初期曲線 $\bar{C}_0$ 上で与えられた二個の条件

$$u = u(\sigma), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = N(\sigma) \tag{5.4}$$

が勝手に指定された結果 $(5.2)$ の "$F, G$ がやはり $(5.5)$ の $u, N$ からちょうど一意的に定められる"．

ところが $2°$ の場合だと，初期曲線上の一部 TA における初期値から $G(\eta)$ の方は他の部分 TB 上における値まで定まってしまうから，TB 上での初期値に対して "$F(\xi)$ のみが自由にきめられる余裕を残すだけである"．したがって "TB 上で $u(\sigma)$, $N(\sigma)$ の両方を同時に指定することは不可能であって，$u(\sigma)$ または $N(\sigma)$ の一方あるいはその結合 $N(\sigma)+L(\sigma)u(\sigma)$ のみを指定することが可能になる"．$u(\sigma)$ のみを $C_0$ 上で与える問題を**第一種の境界値問題**もしくは **Dirichlet の問題**と呼び，$N(\sigma)$ のみを与える問題を**第二種の境界値問題**もしくは **Neumann の問題**と呼び，$N(\sigma)+L(\sigma)u(\sigma)$ を与える問題を**第三種の境界値問題**と呼ぶ．これらの問題は楕円型の場合には，それ自身で単独の形で決定条件として最も重要な数理物理学の問題になるが，いまわれわれが専ら取り扱っている双曲型の場合には，上述のようなむしろやや例外的な場合に混合条件として姿を現わすだけである．

一般の初期値条件を意味する Cauchy の条件と，境界条件とが同時に課せられた問題を**混合問題**という．もちろん最も広い言葉の意味では変域の境界で条件を指定するのだから，これらの付加条件はすべて広義に考えれば一つの境界条件であってその条件の下に方程式を解くことはすべて境界値問題と呼んでも差支えないが，本編では便宜上，上述のような区別した名前で呼ぶことにする．境界値問題の基本的問題については [13], [3], [15] にそれぞれ特色のある解説がある．

## §6　双曲型方程式の特性初期値問題

一次元の波動の方程式およびこれと同型でその標準型が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$$

と書けるような双曲型方程式では，その一般解が

$$u=F(\xi)+G(\eta) \tag{6.1}$$

の形で与えられるので，物理的に重要な意味をもつ“どれだけの付加条件があれば積分曲面が一意的に定まるか”という問題は，“どれだけの条件から一意的に $F, G$ が定まるか”ということに帰着される．§5 では，これらの双曲型方程式では第一に Cauchy の問題の解の一意性の問題が，初期曲線が同じ特性曲線に一度以上交わらないという条件のもとに確定され，この条件が成立しない場合には混合問題が現われることを知ったのであるが，“一個の $\xi$ 特性曲線と一個の $\eta$ 特性曲線との一部が初期曲線を形成するような場合には，各特性曲線上で $u$ の初期値が指定されるだけで積分曲面が一意的に定まる”結果になる．この問題を**特性初期値問題**と呼ぶ．初期曲線に選ばれた $\xi$ 特性曲線

$$\xi=0 \quad \text{の上で} \quad u=\psi(\eta), \tag{6.2}$$

同じく初期曲線に選ばれた $\eta$ 特性曲線

$$\eta=0 \quad \text{の上で} \quad u=\varphi(\xi) \tag{6.3}$$

の初期値が指定されたとき，実際二つの任意函数 $F, G$ が一意的に次のように定まる．すなわち (6.1) に (6.2) および (6.3) を入れれば

$$F(0)+G(\eta)=\psi(\eta), \quad F(\xi)+G(0)=\varphi(\xi) \tag{6.4}$$

となって各特性曲線 $\xi=$ 定数，$\eta=$ 定数 の上で $G(\eta)$ および $F(\xi)$ が定められる：

$$F(\xi)=\varphi(\xi)-G(0), \quad G(\eta)=\psi(\eta)-F(0). \tag{6.5}$$

ただし積分曲面が一意的に定まるためには $\xi=0,\ \eta=0$ の交点 $(\xi=0,\ \eta=0)$ では両方の特性曲線 $\xi=0$ および $\eta=0$ で指定された初期値 $\psi(\eta)$ および $\varphi(\xi)$ が等しくなっていなければならないから

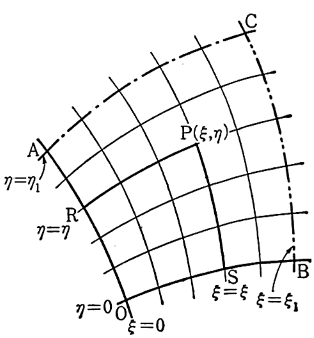
$$\varphi(0)=\psi(0)=F(0)+G(0) \tag{6.6}$$

の条件が満足されているように初期値が指定されているものとする．(6.5) を (6.1) に代入して

$$u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)-F(0)-G(0)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)-\frac{\varphi(0)+\psi(0)}{2},$$
$$\varphi(0)=\psi(0). \tag{6.7}$$

これが特性初期問題の解であって各特性初期曲線上で指定された初期値 $\varphi(\xi), \psi(\eta)$ のみから点 $\mathrm{P}(\xi,\eta)$ での $u$ の値が一意的に定まることを示している．

特に初期値が特性曲線 $\xi=0$ の一部 OA および特性曲線 $\eta=0$ の一部 OB 上で与えられていれば第 6.1 図の四辺形 OACB 内の任意の点 $\mathrm{P}(\xi,\eta)$ に対する $u$ の値すなわち積分曲面の高さは P を通る二本の特性曲線 PR, PS が初期特性曲線と交わる点 R, S での $\psi(\eta)$ および $\varphi(\xi)$ を用いて (6.7) により与えられる．ゆえに初期曲線上の“AOB の決定区域は四辺形 AOBC である”．特に AC, BC 上での



第 6.1 図

$u$ の値はすでに定まってしまう．以下に明らかになってくるように楕円型の方程式では閉曲線の周上で $u$ の境界値を指定する第一種の境界値問題が一意的に解けるのが常であるのに，いまの場合には，四辺形の二隣辺上での値が指定されただけで対辺上の値は定まってしまうから，一般に閉曲線上の全部で境界値を指定しようとすると条件過剰で一般に解は存在しなくなる．これは双曲型と楕円型との大きな性質的差異である．

解の境界値に関する依存性

| 問題 | 境界 | 双曲型 | 楕円型 | 放物型 |
|---|---|---|---|---|
| Cauchy | 開曲線 | 一意的安定 | 不安定 | 条件過剰 |
| | 閉曲線 | 条件過剰 | 条件過剰 | 条件過剰 |
| Dirichlet または Neumann | 閉曲線 | 多意的 | 一意的安全 | 条件過剰 |
| | 開曲線 | 条件不足 | 条件不足 | 一意的，一方に安定，他方に不安定 |
| 特性初期値 | 開曲線 | 一意的安定 | | |

## §7　半無限の波動の方程式における混合問題

端のない一次元の波動の初期値問題の解および得られた解の初期値との関連については §4 に述べたが，空間が限られていればこの端すなわち境界において境界条件を満たすようにしてやらねばならない．この簡単な例題として弦や綱が $0\leqq x<\infty$ の部分を占め一端 $x=0$ で固定されている問題を考える．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad 0\leqq x<\infty. \tag{7.1}$$

われわれは (7.1) の一般解

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct) \tag{7.2}$$

の $F, G$ を適当に選んで，通例の初期条件

$$u(x,0)=\varphi(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x),\qquad 0<x<\infty \tag{7.3}$$

の他に $x=0$ で境界条件

$$u(0,t)=0 \tag{7.4}$$

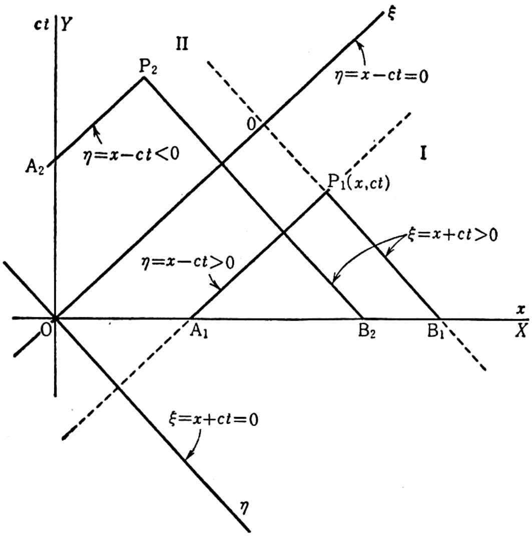
もあわせて満足できないかをしらべてみる．

Cauchy の問題の一般的考察に従ってわれわれの問題を考えれば，初期曲線 XOY 上で指定された条件を満たす (7.1) の積分曲面を決定する問題である．興味の区域は $0<x$, $0<t$ に限ることができる．この中 $P_1(x, ct)$ が $x-ct>0$, $t>0$ すなわち第 7.1 図の $x$ 軸と $\xi$ 軸の間に挟まれた区域 I にあるときは，境界 $x=0$ がなかったときと全然事情に変化はなく $P_1$ の依存区域は $A_1B_1$ で与えられ (1.7) から (1.8) が得られたのと全く同じ手続きにより，AB 上の初期値から

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct),\qquad x-ct>0,\ x+ct>0, \tag{7.5}$$

ここに

$$F(x+ct)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\Psi(x+ct)],\qquad x+ct>0, \tag{7.6}$$




第 7.1 図

$$G(x-ct)=\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)-\Psi(x-ct)], \quad x-ct>0 \tag{7.6'}$$

という最後の結果が得られる．ただし $\Psi(x)$ は積分：

$$\Psi(x)=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(X)dX \tag{7.7}$$

を意味する．ところが，$\xi$ 軸と $Y$ 軸とに挟まれた区域 II においては $x+ct>0$, $x-ct<0$ が成り立ち，$P_2$ の依存区域は $A_2OB_2$ で与えられる．すなわち

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct), \quad x+ct>0,\ x-ct<0 \tag{7.5a}$$

の函数 $F$ の方は上と同様 $x$ 軸上の Cauchy の条件から定められるが，それに反して $G$ の方は $t$ 軸すなわち境界 $x=0$ の上の境界条件 (7.4) に依存してきめられる．すなわち (7.2) で $x=0$, $t>0$ として (7.4) から

$$G(-ct)=-F(ct), \tag{7.8}$$

しかるに $F$ については $x+ct>0$ で (7.6) と同じでよいから $x=0$ として

$$F(ct)=\frac{1}{2}[\varphi(ct)+\Psi(ct)], \quad ct>0, \tag{7.9}$$

(7.8), (7.9) から

$$G(-ct)=-\frac{1}{2}[\varphi(ct)+\Psi(ct)], \quad ct>0, \tag{7.10}$$

(7.10) の $ct$ の代りに $ct\to ct-x$ とおけば

$$\begin{aligned}G(x-ct)&=-\frac{1}{2}[\varphi(ct-x)+\Psi(ct-x)]\\&=-F(ct-x), \quad x-ct<0.\end{aligned} \tag{7.11}$$

以上の結果を総合すれば，$F$ は I, II の区域を通じて

$$F(x+ct)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\Psi(x+ct)], \qquad x+ct>0 \tag{7.12}$$

であるのに対し，$G$ の方は

(I) では

$$G(x-ct)=\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)-\Psi(x-ct)], \qquad x-ct>0, \tag{7.13}$$

(II) では

$$G(x-ct)=-F(ct-x)=-\frac{1}{2}[\varphi(ct-x)+\Psi(ct-x)], \qquad x-ct<0 \tag{7.13$'$}$$

であって結局 $u(x,t)$ は

(I) では

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\Psi(x+ct)+\varphi(x-ct)-\Psi(x-ct)]\\&=\frac{1}{2}\{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(X)dX,\\&\qquad x+ct>0,\ x-ct>0,\end{aligned} \tag{7.14}$$

(II) では

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\Psi(x+ct)-\varphi(ct-x)-\Psi(ct-x)]\\&=\frac{1}{2}\{\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)\}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(X)dX,\\&\qquad x+ct>0,\ x-ct<0\end{aligned} \tag{7.14$'$}$$

の形で表わされることがわかる．(7.14′) において $x=0$ とすれば，境界条件 (7.4) が満たされていることがすぐ確かめられる．初期条件 (7.3) の満たされていることは (7.14) から確かめられる．

われわれの問題では，物理的意味から考えて，条件 (7.3) の方は初期条件，(7.4) の方は境界条件という言葉を使ったが，Cauchy の問題という考え方でこれを眺めれば，$x$ 軸と $t$ 軸を併せた全体 XOY を初期基礎曲線 $\overline{\mathrm{C}}_0$ と考えることができる．われわれの $\overline{\mathrm{C}}_0$ はその特性曲線 $\xi=x+ct=$ 定数，$\eta=x-ct=$ 定数 の内の一方，$\xi$ 特性曲線とは二回交っているから，一般論での 2° の場合，すなわち，第 5.3 図で表わされた場合で $\overline{\mathrm{C}}_0$ の全部を通じて Cauchy の条件を与えることは条件過剰の問題になる．そこで，$\eta$ 特性曲線に関しては $\eta=x-ct>0$ の部分では Cauchy の条件を与えるが，他の $\eta=x-ct<0$ の部分については Dirichlet の条件に止めた結果，ちょうど一意的に波動方程式の解が定まったのである．

双曲型方程式については特に [3], [6], [7] に詳細な記述がある．概観は [8], [21] で十分．

# 第 2 章　変数分離と固有値問題

## §1　直交曲線座標と変数分離

直角座標 $x, y, z$ と

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3) \tag{1.1}$$

の関係にある変換によって線素が

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_1 du_1{}^2 + g_2 du_2{}^2 + g_3 du_3{}^2, \tag{1.2}$$

$$g_k = \left(\frac{\partial x}{\partial u_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_k}\right)^2, \qquad k = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

の形に書けるとき，逆に (*1.1*) を

$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z)$$

と書いたとき，$u_k =$ 定数，$k = 1, 2, 3$ で与えられる曲面族は異なる $k$ に属するもの同志はたがいに直交し，いわゆる直交曲線座標を形成する (I §2.13 参照)．物理学，工学の基礎方程式によく現われる偏微分表式 grad, div, rot などをこの直交曲線座標[(1)]で表わすと

$$\mathrm{grad}\,\psi = \left(\frac{1}{\sqrt{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}, \frac{1}{\sqrt{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}, \frac{1}{\sqrt{g_3}}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right), \tag{1.4}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2 g_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(\sqrt{g_2 g_3}\, v_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\sqrt{g_3 g_1}\, v_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(\sqrt{g_1 g_2}\, v_{u_3})\right\}, \tag{1.5}$$

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_{u_1} = \frac{1}{\sqrt{g_2 g_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}(\sqrt{g_3}\, v_{u_3}) - \frac{\partial}{\partial u_3}(\sqrt{g_2}\, v_{u_2})\right\}, \tag{1.6}$$

および (1, 2, 3) を循環させた式が得られる．(*1.4*), (*1.5*) から

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &\equiv \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_1 g_2 g_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{g_2 g_3}{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{g_3 g_1}{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\sqrt{\frac{g_1 g_2}{g_3}}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right\}\end{aligned} \tag{1.7}$$

が得られる．応用数学で最も基礎になる偏微分方程式の一つに **Schrödinger の方程式**

$$\nabla^2\psi + (E - U)\psi = 0 \tag{1.8}$$

があるが，以下に方程式 (*1.8*) を直交曲線座標で表わしたときの主要な場合の変数分離の問題について略述する．

a)　**直角座標**

$$u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = z,$$

$$\nabla^2\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{1.9}$$

で，そのままで $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ の場合と考えることができる．(*1.8*) は $U = U_x(x) + U_y(y) + U_z(z)$ の場合には，変数分離によって解くことができる．すなわち

---

(1)　I §2.13 (51 頁), 3.17 (112 頁) 参照．各論的記述については犬井鉄郎：球函数，円壔函数，超幾何函数 (河出) 第 VI 章．

$$\psi = X(x)Y(y)Z(z) \tag{1.10}$$

を (*1.8*) に代入して $X(x)Y(y)Z(z)$ で割り，これを

$$X''(x)/X(x)-U_x(x) = -[\{Y''(y)/Y(y)-U_y(y)\}+\{Z''(z)/Z(z)-U_z(z)\}+E]$$

と書いてみれば，左辺は $x$ だけの函数で右辺は $y, z$ だけの函数だから，実は $x$ にも $y, z$ にも無関係な定数でなければならない．これを $E_x$ と書けば，$X$ は次の形の常微分方程式を満足しなければならないことが結論される．

$$X''+(E_x-U_x)X = 0. \tag{1.11}$$

変数分離のとき現われるこのような定数を**分離定数**という．同様に $y, z$ について入れかえたものが得られる．この形で最も簡単なものは $U_x$ が定数で $E_x-U_x = \lambda$ とおいたとき

$$X''+\lambda X = 0 \tag{1.12}$$

の形で，パラメタ $\lambda \gtreqless 0$ に応じて

$$X = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x} \quad \text{もしくは} \quad \cos\sqrt{\lambda}\,x,\ \sin\sqrt{\lambda}\,x \tag{1.13}$$

または

$$X = e^{\pm\sqrt{\lambda}x} \tag{1.13'}$$

の形の基本解を有する場合である．

b）**筒座標**　直交曲線座標で，特に

$$x = x(u_1, u_2), \quad y = y(u_1, u_2), \quad z = z \tag{1.14}$$

の場合には，線素 $ds$ が

$$ds^2 = g_1du_1{}^2+g_2du_2{}^2+dz^2, \tag{1.15}$$

$$g_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2, \quad g_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2 \tag{1.16}$$

と書けるので

$$\nabla^2\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{g_1g_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)\right\}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{1.17}$$

の形に書ける．特に応用上でよく用いられるものに**円筒座標**，**放物筒座標**，**楕円筒座標**がある．また最も普通の直角座標も角筒としてこの中に入れて考えることができる．

(i)　**円筒座標**

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{1.18}$$

$u_1 = \rho,\ u_2 = \varphi$ と考えて $g_1, g_2$ を計算すれば $g_1 = 1,\ g_2 = \rho^2$,

$$\therefore\quad \nabla^2\psi \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{1.19}$$

特に

$$U = U_z(z)+U_\rho(\rho) \tag{1.20}$$

の場合には (*1.8*) は

$$\psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{1.21}$$

の形の変数分離が可能で，分離定数を $m^2, \lambda$ とするとき

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi = 0, \tag{1.22}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(\lambda-U_z)Z=0, \tag{1.23}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left\{-\lambda+(E-U_\rho)-\frac{m^2}{\rho^2}\right\}R=0. \tag{1.24}$$

(*1.22*) が $e^{\pm im\varphi}$ もしくは $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ の解を有することは周知の通りである. (*1.23*) で $U_z(z)=z^2$ の場合は **Weber の方程式**

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(\lambda-z^2)Z=0 \tag{1.25}$$

になる. これについては §6 に詳論してある. また $U_z(z)=\kappa^2\cos^2 z$ の場合には

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(\lambda-\kappa^2\cos^2 z)Z=0 \tag{1.26}$$

となり **Mathieu の方程式**である.

(*1.24*) でも特に重要なのは **Helmholtz の方程式**

$$\Delta\psi+k^2\psi=0 \tag{1.27}$$

の場合 $U=0$, $E=k^2$ で (*1.24*) は

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2-\lambda^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{1.28}$$

の形をとり **Bessel の方程式**に帰着される. すなわち $\sqrt{k^2-\lambda^2}\,\rho=r$ とすれば, その標準型 (I §7.17, 313 頁)

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(1-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0 \tag{1.29}$$

に書きかえられる.

例題 1〕 三次元の熱伝導の方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\kappa^2\nabla^2 u$ の時間項と空間項を $u=T(t)v(x,y,z)$ の形に分離すれば, 空間項は Helmholtz の方程式を満足する.

実際, 放物型である熱伝導の方程式は, こうして楕円型である Helmholtz の方程式の問題に帰着して, 空間的には楕円型の方程式の境界値問題として取り扱うことの方が多い.

例題 2〕 Helmholtz の方程式 $\nabla^2 v+k^2 v=0$ を変数分離するとき現われるパラメタの正負に応じて

$$Z_1(z)=\cos\lambda z,\ \sin\lambda z \tag{a}$$

または

$$Z_2(z)=e^{\mu z},\ e^{-\mu z} \tag{b}$$

が現われ, 動径部分は Bessel の函数 $J_n$, Neumann の函数 $Y_n$ を用いて

$$R_1(r)=J_n(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r),\quad Y_n(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r) \tag{c}$$

または

$$R_2(r)=J_n(\sqrt{k^2+\mu^2}\,r),\quad Y_n(\sqrt{k^2+\mu^2}\,r) \tag{d}$$

が現われる(1).

**(ii) 放物筒座標**

---

(1) $J_n$ については I §11.1, 449 頁, また $Y_n$ については I §11.8, 467 頁参照.

$$x=(\xi^2-\eta^2)/2, \quad y=\xi\eta, \quad z=z, \tag{1.30}$$

$u_1=\xi$, $u_2=\eta$ として

$$g_1=g_2=(\xi^2+\eta^2), \quad g_3=1, \tag{1.31}$$

したがって Schrödinger の方程式 (*1.8*) は

$$\left\{\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right\}+(E-U)\psi=0 \tag{1.32}$$

に移される. $U$ が $z$ に無関係で $\xi,\eta$ だけの

$$U(\xi,\eta)=-2\frac{f(\xi)+g(\eta)}{\xi^2+\eta^2} \tag{1.33}$$

の形の函数の場合には, $\psi(\xi,\eta,z)=Z(z)X(\xi)Y(\eta)$ の変数分離が可能で

$$Z''\pm m^2Z=0, \tag{1.34}$$

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+[\lambda+(E\mp m^2)\xi^2+2f(\xi)]X=0, \tag{1.35}$$

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2}+[-\lambda+(E\mp m^2)\eta^2+2g(\eta)]Y=0. \tag{1.35'}$$

(*1.35*), (*1.35′*) は Helmholtz の方程式の場合なら $E=k^2$, $f=g=0$ で Weber の方程式 (*1.25*) に帰着する.

(iii) 楕円筒座標

$$x=c\cosh u\cos v, \quad y=c\sinh u\sin v, \quad z=z, \tag{1.36}$$

$u_1=u$, $u_2=v$ として

$$g_1(u,v)=g_2(u,v)=c^2(\cosh^2 u-\cos^2 v), \quad g_3=1. \tag{1.37}$$

ゆえに Schrödinger の方程式 (*1.8*) は

$$\frac{1}{c^2(\cosh^2 u-\cos^2 v)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+(E-U_{\text{pot}})\psi=0 \tag{1.38}$$

となり, $U_{\text{pot}}$ が $z$ に無関係で $u,v$ だけの函数

$$U_{\text{pot}}(u,v)=-\frac{f(u)+g(v)}{c^2(\cosh^2 u-\cos^2 v)} \tag{1.39}$$

なら

$$\psi(u,v,z)=U(u)V(v)Z(z) \tag{1.40}$$

の形に分離可能で

$$\frac{d^2Z}{dz^2}\pm mZ^2=0,$$

$$\frac{d^2U}{du^2}+\{-\lambda+cf(u)+(E\mp m^2)c^2\cosh^2 u\}U=0, \tag{1.41}$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+\{\lambda+cg(v)-(E\mp m^2)c^2\cos^2 v\}V=0. \tag{1.41'}$$

特に Helmholtz の方程式の場合, $E=f=g=0$ の場合には (*1.41*), (*1.41′*) は

$$\frac{d^2U}{du^2}+(-\lambda+k^2\cosh^2 u)U=0, \tag{1.42}$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}+(\lambda+k^2\cos^2 v)V=0 \tag{1.42'}$$

となり，(*1.42'*) は Mathieu の方程式，(*1.42*) は $u \to iv$ とすれば (*1.42'*) と同型の方程式に帰着される.

c)　**回転座標**　直角座標 $x, y, z$ から

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z \tag{1.43}$$

で筒座標に移ってから $\rho, z$ 面で

$$\rho = \rho(u_1, u_2), \quad z = z(u_1, u_2) \tag{1.44}$$

という変換で移った曲線座標 $(u_1, u_2, \varphi)$ が**回転座標**である．線素 $ds$ は

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 = g_1 du_1{}^2 + g_2 du_2{}^2 + g_3 d\varphi^2, \tag{1.45}$$

$$g_1 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2, \quad g_2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2, \quad g_3 = \rho^2 \tag{1.46}$$

と得られる．したがってたとえば $\nabla^2\psi$ は (*1.7*) に入れて

$$\nabla^2\psi \equiv \frac{1}{\rho\sqrt{g_1 g_2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\rho\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\rho\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)\right\} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{1.47}$$

に移される．これから出発してたとえば Schrödinger の方程式が種々の回転座標に関して変数分離が行われ，特殊常微分方程式が現われてくることを調べることができる．以下の応用で取り扱う回転座標の問題は球座標と回転放物面座標であるが，この場合はそれぞれ §6〜§7 および §8 において各論的に詳しく説明する.

## §2　Sturm-Liouville 型方程式の固有値と固有函数

1)　**境界条件による固有値の決定，固有函数**　変数分離の方法で種々の偏微分方程式を解くとき現われてくる常微分方程式は上の諸例でみたように，また §5〜§8 でみるように，どれも

$$L[u] \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u \tag{2.1}$$

を与えられた微分演算子として

$$L[u] + \lambda r(x)u = 0 \tag{2.2}$$

の形に表わすことができる．“$\lambda$ は分離定数として現われるパラメタで一般には勝手な値ではなく，境界条件その他の条件から定められるものである”.

“このような特定のパラメタ $\lambda$ の値を $\lambda$ の**固有値**と呼び”，$\lambda$ がその値をとったときの (*2.2*) の解 $u$ のことを固有値 $\lambda$ に属する**固有函数**と呼ぶことも，多くの読者の知るところであろう.

特に最も簡単な一群の問題では，独立変数 $x$ の変域が

有限区間 $[a, b]$, $-\infty < a \leqq x \leqq b < +\infty$ に限られ，区間 $[a, b]$ で，$p(x), q(x)$, $r(x)$ が連続で $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ の場合である.

(*2.2*) を **Sturm-Liouville 型方程式**，それに現われてくる $\lambda$ の固有値をき

める問題を **Sturm-Liouville 型固有値問題**と呼ぶ.

この場合に，両端 $a$ および $b$ での境界条件として

$$B_a[u] \equiv p(a)u'(a)\sin\alpha - u(a)\cos\alpha = 0, \tag{2.3 a}$$

$$B_b[u] \equiv p(b)u'(b)\sin\beta - u(b)\cos\beta = 0 \tag{2.3 b}$$

が与えられたものとしよう．これらの条件は，“境界での函数とその導函数との間の一次関係を 0 に等しいとおいたもの”で**第三種の同次境界条件**と呼ばれる．特に“$\alpha=0$ とすれば $u(a)=0$”となり**第一種の同次条件**，“$\alpha=\pi/2$ にとれば $u'(a)=0$”となり**第二種の同次条件**で，その間では $u'(a)-h(a)u(a)=0$, $h(a)=\cos\alpha/\sin\alpha\cdot p(a)$ で，$|h(a)|$ は 0 から $\infty$ まで変化する．

固有値を定める一般方式としては (2.3 a) だけを満足するものなら，この点は微分方程式の通常点だから

$$\varphi(a,\lambda)=\sin\alpha, \quad p(a)\varphi'(a,\lambda)=\cos\alpha \tag{2.4 a}$$

となるような初期条件の下に (2.2) の解を求める．そのとき $\lambda$ は勝手でよいから，パラメタ $\lambda$ を含む $\varphi(x,\lambda)$ の形の解が得られる．同様に初期条件

$$\chi(b,\lambda)=\sin\beta, \quad p(b)\chi'(b,\lambda)=\cos\beta \tag{2.4 b}$$

だけを満たす解 $\chi(x,\lambda)$ が求められる．このように“一方の端での条件だけを満たすような (2.1) の解 $\varphi(x,\lambda)$, $\chi(x,\lambda)$ をまず求め”，両方の条件を満たすためには“$\varphi$ と $\chi$ が線型的に独立でなくなる条件から $\lambda$ の値を決めればこれが $\lambda$ の固有値になる．二解 $\varphi, \chi$ が線型的に従属である条件は，$\varphi, \chi$ の **Wronski の行列式**が 0 である”ことで与えられるから[(1)]

$$W[\varphi(x,\lambda),\chi(x,\lambda)] = \varphi(x,\lambda)\chi'(x,\lambda)-\chi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)=0 \tag{2.5}$$

によって固有値 $\lambda$ が求められる．

例題 1〕

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0 \tag{2.6}$$

で第一種の条件

$$u(a,\lambda)=0, \quad u(b,\lambda)=0 \tag{2.7}$$

の場合なら

$$\varphi(x,\lambda)=\sin\{\sqrt{\lambda}(x-a)\}/\sqrt{\lambda}, \quad \chi(x,\lambda)=\sin\{\sqrt{\lambda}(b-x)\}/\sqrt{\lambda} \tag{2.8}$$

から

$$W[\varphi,\chi] = -\sin\{\sqrt{\lambda}(b-a)\}/\sqrt{\lambda}=0 \tag{2.9}$$

(1) I §7.3, 280 頁.

が得られ，λ の固有値は

$$\sqrt{\lambda_n}=n\pi/(b-a),\qquad n=1,2,3,\cdots. \tag{2.10}$$

これに対する固有函数は

$$\varphi_n(x)=\sin\{n\pi(x-a)/(b-a)\},\qquad n=1,2,3,\cdots, \tag{2.11}$$

第二種の条件

$$u'(a,\lambda)=0,\quad u'(b,\lambda)=0 \tag{2.12}$$

なら

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\{\sqrt{\lambda}(x-a)\},\quad \chi(x,\lambda)=\cos\{\sqrt{\lambda}(x-b)\}, \tag{2.13}$$

$$W[\varphi,\chi]=\sqrt{\lambda}\sin\{\sqrt{\lambda}(b-a)\}=0 \tag{2.14}$$

から固有値，固有函数として

$$\sqrt{\lambda_n}=n\pi/(b-a),\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{2.15}$$

$$\varphi_n(x)=\cos\{n\pi(x-a)/(b-a)\},\qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{2.16}$$

もちろんこれらの結果は周知のことで，上述の一般方式に従うまでもなく簡単に結果が得られるが，ここでは一般方式に従ってこれを出したのである．

同じ方程式 (2.6) で，境界条件が (2.7) もしくは (2.12) の代りに

$$u(a,\lambda)=u(b,\lambda),\quad u'(a,\lambda)=u'(b,\lambda) \tag{2.17}$$

という**周期性の条件**が課せられている場合には

$$u(x,\lambda)=e^{\pm i\sqrt{\lambda}x} \tag{2.18}$$

において (2.17) の条件を入れれば

$$e^{\pm i\sqrt{\lambda}(b-a)}=1$$

が得られ，λ の固有値として

$$\sqrt{\lambda_n}=2n\pi/(b-a),\qquad n=0,1,2,\cdots, \tag{2.19}$$

固有函数として

$$u_n(x)=e^{\pm i\frac{2n\pi}{b-a}x},\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{2.20}$$

が得られる．あるいはこれと同値なものとして

$$u_n(x)=\begin{cases}\cos\{2n\pi x/(b-a)\}, & n=0,1,2,3,\cdots;\\ \sin\{2n\pi x/(b-a)\}, & n=1,2,3,\cdots\end{cases} \tag{2.21}$$

が得られる．

例題 2〕

$$L[u]=\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}u+\lambda u=0. \tag{2.22}$$

この方程式の基本解は Bessel 函数 $J$ および Neumann 函数 $Y$ を用いて

$$u(x)=\sqrt{x}J_\nu(\alpha x),\quad \sqrt{x}Y_\nu(\alpha x),\ \text{ただし}\ \alpha=\sqrt{\lambda} \tag{2.23}$$

の形で与えられる(1)．$a\leqq x\leqq b$ の両端で第一種の条件

$$u(a)=0,\qquad u(b)=0 \tag{2.24}$$

を満足する固有値を求める．一端だけでこの条件を満たす解 $\varphi(x,\alpha)$，$\chi(x,\alpha)$ はそれぞ

(1) Bessel の方程式 $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}+\left(\alpha^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)v=0$ で $v=x^{-\frac{1}{2}}u$ と変換すれば，(2.22) が得られる．

れ

$$\varphi(x,\alpha)=\frac{\pi}{2}\sqrt{ax}\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu(\alpha a)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu(\alpha a)\}, \tag{2.25 a}$$

$$\chi(x,\alpha)=\frac{\pi}{2}\sqrt{bx}\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu(\alpha b)\} \tag{2.25 b}$$

で与えられるから，両端の条件を同時に満たすために $\varphi, \chi$ が線型的に独立でなくなる条件を

$$W[\varphi,\chi]=\varphi(x,\alpha)\chi'(x,\alpha)-\chi(x,\alpha)\varphi'(x,\alpha)=0 \tag{2.26}$$

から求めると

$$\varphi'(x,\alpha)=\frac{\pi}{2}(ax)^{\frac{1}{2}}\{\alpha J_\nu'(\alpha x)Y_\nu(\alpha a)-\alpha Y_\nu'(\alpha x)J_\nu(\alpha a)\}$$

$$-\frac{\pi}{4}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu(\alpha a)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu(\alpha a)\}, \tag{2.27 a}$$

$$\chi'(x,\alpha)=\frac{\pi}{2}(bx)^{\frac{1}{2}}\{\alpha J_\nu'(\alpha x)Y_\nu(\alpha b)-\alpha Y_\nu'(\alpha x)J_\nu(\alpha b)\}$$

$$-\frac{\pi}{4}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu(\alpha b)\}. \tag{2.27 b}$$

(2.25 a, b), (2.27 a, b) を (2.26) に入れて計算すれば

$$W[\varphi,\chi]$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(ab)^{\frac{1}{2}}(\alpha x)[\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu(\alpha a)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu(\alpha a)\}\{J_\nu'(\alpha x)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu'(\alpha x)J_\nu(\alpha b)\}$$

$$-\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu(\alpha b)\}\{J_\nu'(\alpha x)Y_\nu(\alpha a)-Y_\nu'(\alpha x)J_\nu(\alpha a)\}]$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(ab)^{\frac{1}{2}}(\alpha x)\{J_\nu'(\alpha x)Y_\nu(\alpha x)-Y_\nu'(\alpha x)J_\nu(\alpha x)\}\{J_\nu(\alpha b)Y_\nu(\alpha a)-Y_\nu(\alpha b)J_\nu(\alpha a)\}$$

$$=\frac{\pi}{2}(ab)^{\frac{1}{2}}\{J_\nu(\alpha a)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu(\alpha a)J_\nu(\alpha b)\}=0.$$

最後の項は，円筒函数に関する Lommel の公式 (I §11.9, 471 頁)

$$J_\nu(z)Y_\nu'(z)-Y_\nu(z)J_\nu'(z)=\frac{2}{\pi z}$$

を利用した．ゆえに求める方程式 (2.22) の $\lambda$ の固有値は超越方程式

$$J_\nu(\alpha a)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu(\alpha a)J_\nu(\alpha b)=0,\quad \alpha=\sqrt{\lambda} \tag{2.28}$$

の根として決定されることがわかる．

(2.28) の根を $\alpha_l$, $l=1,2,3,\cdots$ とするとき，$\alpha_l$ を用いて

$$\varphi_l(x)=\sqrt{x}\{J_\nu(\alpha_l x)Y_\nu(\alpha_l a)-Y_\nu(\alpha_l x)J_\nu(\alpha_l a)\} \tag{2.29}$$

が $l$ 番目の固有値 $\lambda_l=\alpha_l{}^2$ に属する固有函数である．

例題 3〕 方程式 $\dfrac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$, 境界条件 $u(0)=0$, $u'(l)+hu(l)=0$. (a)

(解) (2.3 a, b) で $a=0$, $\alpha=0$, $b=l$, $h=-\cot\beta$ ととれば境界条件 (a) の形になる．

$$\varphi(x,\lambda)=-\sin(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda},\quad \chi(x,\lambda)=\frac{\sin(l-x)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\cos\beta-\cos((l-x)\sqrt{\lambda})\sin\beta,$$

$$W(\varphi,\chi)=\frac{\sin(\sqrt{\lambda}l)}{\sqrt{\lambda}}\cos\beta-\cos(\sqrt{\lambda}l)\sin\beta.$$

これより固有値 $\lambda_n$ は超越方程式

$$\sqrt{\lambda_n}\cot(\sqrt{\lambda_n}l)=-h \tag{b}$$

の正根 $(n=1,2,3,\cdots)$，固有函数は $\sin(\sqrt{\lambda_n}x)/\sqrt{\lambda_n}$.

例題 4〕 方程式 $\dfrac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$, 境界条件 $u'(a)-ku(a)=0$, $u'(b)+hu(b)=0$. (c)

（解） $k=\cot\alpha$, $h=-\cot\beta$. 固有値は超越方程式

$$\sqrt{\lambda_n}\cot(\sqrt{\lambda_n}l)=(\lambda_n-hk)/(h+k),\quad l=b-a \tag{d}$$

の正根 $\lambda_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，固有函数は

$$\{\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}a)-k\sin(\sqrt{\lambda_n}a)\}\cos(\sqrt{\lambda_n}x)$$
$$+\{\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}a)+k\cos(\sqrt{\lambda_n}a)\}\sin(\sqrt{\lambda_n}x). \tag{e}$$

(d) は $k,h\to0$ では (2.14) に一致し，$k\to\infty$ では (b) に一致する.

### 2) 固有函数の諸性質

**直交関係** 上に求めた (2.11), (2.16), (2.29) などの異なる固有値に属する固有函数に関しては，いわゆる**直交関係** (I §4.11, 139 頁)

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_{n'}(x)dx=0,\qquad n\neq n' \tag{2.30}$$

がどの場合にも成り立っている．また複素値函数 (2.20) の場合には $\bar{\varphi}$ を $\varphi$ の共軛複素函数として

$$\int_a^b\varphi_n(x)\overline{\varphi_{n'}}(x)dx=0,\qquad n\neq n' \tag{2.31}$$

がこれに代る．さらに $r(x)=1$ でないもっと一般の (2.1) の Sturm-Liouville 型固有値問題の異なる固有値に属する固有函数 $\varphi_n(x)$ に関しても (2.30) を一般化した

$$\int_a^b r(x)\varphi_n(x)\varphi_{n'}(x)dx=0,\qquad n\neq n' \tag{2.32}$$

の関係が成り立つ．また固有函数が複素値函数となる場合には $\varphi_{n'}(x)$ の代りに $\overline{\varphi_{n'}}(x)$ を代えたもの

$$\int_a^b r(x)\varphi_n(x)\overline{\varphi_{n'}}(x)dx=0,\qquad n\neq n' \tag{2.32'}$$

が (2.32) の代りに成り立つ.

それは (2.1) の $L$ に対しては **Lagrange** の恒等式

$$u(x)L[v(x)]-v(x)L[u(x)]=\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left(u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}\right)\right\} \tag{2.33}$$

が成り立つので $u(x)$ を (2.1) の固有値 $\lambda_l$ に属する固有函数 $\varphi_l(x)$ に，$v(x)$ を異な

る固有値 $\lambda_k$ に属する固有函数 $\varphi_k(x)$ とすれば

$$(\lambda_l-\lambda_k)r(x)\varphi_l(x)\varphi_k(x)=\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left(\varphi_l\frac{d\varphi_k}{dx}-\varphi_k\frac{d\varphi_l}{dx}\right)\right\}$$

の関係が成り立ち，これを $(a,b)$ 区間に積分して $\varphi_l, \varphi_k$ がともに $(a,b)$ で境界条件 (2.3 a, b) を満足することを考慮すれば

$$(\lambda_l-\lambda_k)\int_a^b r(x)\varphi_l(x)\varphi_k(x)dx=p(x)\{\varphi_l(x)\varphi_k'(x)-\varphi_k(x)\varphi_l'(x)\}\Big|_a^b=0^{(1)}. \qquad (2.34)$$

すなわち異なる固有値に属する固有函数の直交性

$$\int_a^b r(x)\varphi_l(x)\varphi_k(x)dx=0 \qquad (\lambda_l\neq\lambda_k) \qquad (2.35)$$

が一般に証明された[2].

**Fourier 式展開** 直交函数系 $\varphi_n(x)$, $n=1,2,3,\cdots$ が $[a,b]$ でいわゆる完全系をなす場合 (I §4.11 参照) には，積分

$$(f, \varphi_n)=\int_a^b r(\xi)f(\xi)\varphi_n(\xi)d\xi, \qquad (2.36)$$

$$(\varphi_n, \varphi_n)=\int_a^b r(\xi)\{\varphi_n(\xi)\}^2 d\xi \qquad (2.37)$$

を用いて

$$f_n=\frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \qquad (2.38)$$

で表わされる $f_n$ を係数とした無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(x) \qquad (2.39)$$

を，与えられた函数 $f(x)$ に対して完全直交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ に関する **Fourier 式級数**と名づけ，$f_n$ を **Fourier 式係数**と名づける．

Fourier 式級数に関しては次の展開定理が成り立つ．

展開定理： $f(x)$ に対する Fourier 式級数が絶対かつ一様に収束するときは

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(x) \qquad (2.40)$$

が成り立つ．

---

(1) 一個の固有値にはただ一個の固有函数しか属さないときは，すべての固有函数の直交性がこれから結論されるが，多数個の固有函数が同じ固有値に属するいわゆる縮重した固有値を有する場合も一般にその数は有限個しかないので，たがいに直交するように固有函数を選ぶことができる．

(2) ここで固有函数は実と考えている．実際，以下でわれわれが問題にする固有函数はすべて実の形で取り扱うことができるが，(2.20) のように複素値函数として書く方が便利な場合もある．この場合も含めて (2.32′) の関係を満足するとき，固有函数 $\varphi_n, \varphi_n'$ を区間 $(a,b)$ で密度函数 $r(x)$ に関して直交であるという．このようにして与えられた固有函数系は直交函数系をなすと考えることができる．

(証明)　$F(x)=f(x)-\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi_n(x)$

の Fourier 式係数を考えると，$F(x)$ は絶対かつ一様に収束するから項別積分ができるから

$$F_{n'}=(F,\varphi_{n'})=(f,\varphi_{n'})-\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\varphi_n,\varphi_{n'}),$$

(2.32), (2.38) により

$$=(f,\varphi_{n'})-f_{n'}(\varphi_{n'},\varphi_{n'})=0$$

がすべての番号 $n'$ について成り立つ．$\varphi_n(x)$ が完全系をなすことから $F\equiv 0$, 従って (2.40) が得られる．

Fourier 式展開 (2.40) の可能性を仮定して Fourier 係数を定めることは容易である．すなわち (2.40) の両辺に $r(x)\varphi_{n'}(x)$ をかけて区間 $[a,b]$ に積分すれば

$$\int_a^b r(x)f(x)\varphi_{n'}(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\int_a^b r(x)\varphi_n(x)\varphi_{n'}(x)dx,$$

直交性 (2.32) により

$$=f_{n'}\int_a^b r(x)\{\varphi_{n'}(x)\}^2dx,$$

$$\therefore\quad f_{n'}=\frac{(f,\varphi_{n'})}{(\varphi_{n'},\varphi_{n'})}$$

これは上に与えた (2.38) に他ならない．

正規直交系の場合：　上の一般の完全直交函数系では (2.37) は一般にある正の値をとるが，この場合に $\varphi_n(x)$ の代りに $1/\sqrt{(\varphi_n,\varphi_n)}$ 倍した

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x)/\sqrt{(\varphi_n,\varphi_n)} \tag{2.41}$$

をとれば，いわゆる正規化 (規格化) 条件

$$(\psi_n,\psi_n)=1 \tag{2.42}$$

が満たされる．このようにして，**正規直交関係**

$$(\psi_n,\psi_{n'})=\delta_{n,n'}=\begin{cases}0, & n\neq n'\\ 1, & n=n'\end{cases}, \tag{2.43}$$

を満足する正規直交系 $\{\psi_n(x)\}$ が得られる．$\{\psi_n(x)\}$ による Fourier 式展開式は (2.38) で $\varphi_n\rightarrow\psi_n$ とした式で正規化条件 (2.42) を考慮して

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\psi_n(x),\qquad f_n=(f,\psi_n) \tag{2.44}$$

の形をとる.

## §3 固有函数展開の理論

函数 $f(x)$ が与えられたとき，これをある固有函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ によって $(2.40)$ の形の Fourier 式展開を行うことが可能だとすれば，その形を求めることは上述の通り Fourier 式係数 $f_n$ を定めることにより達せられるが，勝手な $f(x)$ に対しては Fourier 式級数 $(2.39)$ が必ずしも $f(x)$ を与えるとは限らないもので，例えば上述の展開定理の成立条件すなわち $(2.40)$ が絶対かつ一様に収束する場合に初めて展開 $(2.40)$ が保証されたのである．固有函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ は演算子 $(2.1)$ およびそれの定義されている基本区域ならびに境界条件に応じて定まるものであるから，Fourier 式展開の可能である $f(x)$ の形は当然これらのものに依存する．この問題で最も簡単な場合は区間 $[a,b]$ が有限域に限られ，演算子 $(2.1)$ に現れる函数 $p(x), q(x), r(x)$ が連続で $p(x)>0, r(x)>0$ のときである．この場合に対する固有値問題は**正則固有値問題**と呼ばれ，すでに古典的なものに属している．これに対する一つの代表的解法は I §13.15,（606頁）に述べられているもので，微分方程式の境界値問題を積分方程式の問題に帰着させて解く方法である．そのときには $f(x)$ は単に連続という条件ではなく，核函数 $K(x,\xi)$ に対し連続函数 $g(\xi)$ との積の積分 $f(x)=\int_a^b K(x,\xi)g(\xi)d\xi$ の形に書き表わしうるものと制限することにより初めて展開定理が一般に成立する．詳細は [2], [4] をみよ．また $f(x)$ が区分的に滑か，すなわち $[a,b]$ を有限個の部分区間に分けたとき各部分区間では $f'(x)$ が連続であるという条件で，微分方程式の範囲で論ずる方法もある（[14], [23] 参照）.

さて，実際応用上に現われる多くの重要な問題中には，その変域が有限でなかったり（$a$ または $b$ が $\infty$ になる），区間内のある $x$ の値に対して $p(x)=0$ になって微分方程式の特異点が現われたりして，いわゆる**特異性境界条件**が通常の境界条件 $(2.3\,\mathrm{a,b})$ に代ることが少くない．この特異性を含めた一般固有値問題を美しく解決したものに小平邦彦氏の研究（[12] 参照）がある.

E. C. Titchmarsh は小平氏の上述の研究に僅かに先んじて小平氏とは独立に全く同じ一般的結論に到達した．特異性問題の美しい研究は Weyl により（積分方程式論の線に沿って）打ち立てられ，Stone によって（Hilbert 空間の理論に立って）近代化され，Titchmarsh, 小平により完成されたが，小平氏の方法 [12] は Hilbert 空間論に基礎をおくのに対して，Titchmarsh は複素函数論の知識のみで完全に理解される．特異性境界値問題の解法を一般に論ずることは本書の性格を逸脱するが，一般固有値問題の核心に触れる展開定理の問題への極めて序論的部分を Titchmarsh の線に沿って触れてみたい（[19] 参照).

なお小平氏の方法を初等化して解説したものが [23], 第5章に与えられており，また高階の場合も含んだ詳しい初等的解説が [5] に与えられている.

**同次でない微分方程式の同次境界値問題**　微分方程式 $(2.2)$ に対してその同次でない方程式

$$L_x[\Phi]+\lambda r(x)\Phi=-r(x)f(x) \tag{3.1}$$

の同次境界条件

$$B_a[\Phi] \equiv p(a)\Phi'(a,\lambda)\sin\alpha - \Phi(a,\lambda)\cos\alpha = 0, \tag{3.2a}$$

$$B_b[\Phi] \equiv p(b)\Phi'(b,\lambda)\sin\beta - \Phi(b,\lambda)\cos\beta = 0 \tag{3.2b}$$

を満足する解 $\Phi=\Phi(x,\lambda)$ につき考えよう.

線型二階微分方程式の交代定理により同次でない方程式 (*3. 1*) の同次境界条件 (*3. 2* a, b) を満足する解はこれに属する同次方程式 (*2. 2*) の同じ同次境界条件 (*2. 3* a, b) を満たす解が恒等的に 0 に等しいもののみに限るとき (すなわち $\lambda$ が同次方程式の固有値 $\lambda_n$ に一致しないとき) には唯一の解 $\Phi=\Phi(x,\lambda)$ を有する (I §14. 3～14. 4 参照).

このような $\Phi(x,\lambda)$ が同次-同次問題 (*2. 2*)～(*2. 3* a, b) の固有函数 $\varphi_n(x)$ によって

$$\Phi(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda)\varphi_n(x) \tag{3.3}$$

の形に展開できるものと仮定して (*3. 1*) に代入すれば, $\varphi_n(x)$ が (*2. 2*) の $\lambda=\lambda_n$ に対する固有函数: $L[\varphi_n] = -\lambda_n r(x)\varphi_n(x)$ であることから

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda)(\lambda-\lambda_n)r(x)\varphi_n(x) = -r(x)f(x) \tag{3.4}$$

が得られる. 故に $\varphi_n(x)$ をかけて $[a,b]$ 区間に積分し, 直交関係 (*2. 32*) を考慮することにより

$$c_n(\lambda) = -\frac{f_n}{\lambda-\lambda_n} \tag{3.5}$$

で与えられることがわかる. ただし $f_n$ は $f(x)$ の直交函数系 $\varphi_n(x)$ による Fourier 式係数 (*2. 38*) である.

(*3. 3*), (*3. 5*) から

$$\Phi(x,\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x) \tag{3.6}$$

という関係式が得られる. $\Phi$ を $\lambda$ の函数とみるとこれは $\lambda=\lambda_n$ の各点で一位の極をもっている. 極 $\lambda=\lambda_m$ における留数は留数の公式 [(I *5. 18*), 192 頁] により

$$\lim_{\lambda\to\lambda_m} (\lambda-\lambda_m)\Phi(x,\lambda) = -f_m\varphi_m(x) \tag{3.7}$$

により与えられる. 従って $\Phi(x,\lambda)$ のすべての極 $\lambda=\lambda_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を

その中に含むような $\lambda$ 平面での周辺路 C に沿って正の向きに $\Phi(x,\lambda)$ を積分するならば，この周辺積分はすべての極での留数の総和として

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\Phi(x,\lambda)d\lambda=-\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi_n(x) \tag{3.8}$$

となることがわかる．

ところが右辺は (*2.40*) により $-f(x)$ に他ならないから，これから

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\Phi(x,\lambda)d\lambda \tag{3.9}$$

という関係が得られる．故にもし (*3.1*) の解 $\Phi(x,\lambda)$ が $\lambda$ に関していわゆる有理型函数 (meromorphic function) の形で求めることができれば，展開定理は (*3.9*) の積分を留数の和として求めるという形式で全く自然に得られるであろう．

$\Phi(x,\lambda)$ は同次でない方程式 (*3.1*) の解であるから，これに対する同次方程式 (*2.2*) の基本解 $\varphi_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$ が知れておれば[例えば定数変化の法（I §7.1 参照)] により

$$\Phi(x,\lambda)=-\varphi_2(x,\lambda)\int^{x}\frac{\varphi_1(\xi,\lambda)\{r(\xi)f(\xi)\}}{[\varphi_1,\varphi_2]_\xi}d\xi$$
$$+\varphi_1(x,\lambda)\int^{x}\frac{\varphi_2(\xi,\lambda)\{r(\xi)f(\xi)\}}{[\varphi_1,\varphi_2]_\xi}d\xi \tag{3.10}$$

の形に求めることができる．

ただしここに

$$[\varphi_1,\varphi_2]_\xi\equiv p(\xi)W[\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi)]p(\xi)\{\varphi_1(\xi)\varphi_2{}'(\xi)-\varphi_2(\xi)\varphi_1{}'(\xi)\} \tag{3.11}$$

である．今特に $a$ 端の境界条件 (*2.3* a) のみを満足する (*2.2*) の解を $\varphi(x,\lambda)$, $b$ 端の境界条件 (*2.3* b) のみを満足する (*2.2*) の解を $\chi(\varphi,\lambda)$ とすれば，(*3.1*) の解として次式を得る．

$$\Phi(x,\lambda)=-\chi(x,\lambda)\int_{a}^{x}\frac{\varphi(\xi,\lambda)\{r(\xi)f(\xi)\}}{[\varphi,\chi]_\xi}d\xi$$
$$-\varphi(x,\lambda)\int_{x}^{b}\frac{\chi(\xi,\lambda)\{r(\xi)f(\xi)\}}{[\varphi,\chi]_\xi}d\xi. \tag{3.12}$$

Lagrange の恒等式 (*2.33*) において $u(x)\to\varphi_1(x,\lambda)$, $v(x)\to\varphi_2(x,\lambda)$ とおくことによりすぐ知れるように

$$\frac{d}{dx}[\varphi_1,\varphi_2]=0\quad すなわち\quad [\varphi_1,\varphi_2]=\text{const},$$

いいかえれば $[\varphi_1, \varphi_2]$ は $x$ には無関係で $\lambda$ だけの函数である：

$$[\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda)] = \omega(\lambda). \tag{3.13}$$

特に $\varphi_1, \varphi_2$ を $a, b$ 各端のみの境界条件を満足する解 $\varphi, \chi$ に選んでも

$$[\varphi, \chi] = \omega(\lambda), \tag{3.13a}$$

従って

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\chi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_a^x \varphi(\xi,\lambda)r(\xi)f(\xi)d\xi$$
$$-\frac{\varphi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_x^b \chi(\xi,\lambda)r(\xi)f(\xi)d\xi. \tag{3.14}$$

さて $\lambda$ の固有値 $\lambda_n$ は

$$\omega(\lambda_n) = 0 \tag{3.15}$$

の根として求められることがわかる．なんとなればこのような $\lambda_n$ に対して $\varphi(x,\lambda_n), \chi(x,\lambda_n)$ は (3.13a) により $[\varphi, \chi]=0$，従って $\varphi(x,\lambda_n), \chi(x,\lambda_n)$ は線型的に従属となり，片方の境界条件を満足する $\varphi(x,\lambda_n)$ (あるいは $\chi(x,\lambda_n)$) は他方の境界条件までも満足することになり，$\varphi(x,\lambda_n)$ は固有函数となるからである．これは $\lambda_n$ は $\Phi(x,\lambda)$ の極となるという上に得た知見と符合する．

(3.6) によれば $\omega(\lambda_n)=0$ は実はいずれも単根で

$$\omega'(\lambda_n) \neq 0 \tag{3.16}$$

であるはずである．従って一位の極 $\lambda_n$ における $\Phi(x,\lambda)$ の留数は

$$\mathrm{res}\,[\Phi(x,\lambda)]_{\lambda_n} = \lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)\Phi(x,\lambda)$$
$$= \frac{-\chi(x,\lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)}\int_a^x \varphi(\xi,\lambda_n)r(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{-\varphi(x,\lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)}\int_x^b \chi(\xi,\lambda_n)r(\xi)f(\xi)d\xi. \tag{3.17}$$

$\lambda=\lambda_n$ に対しては $\varphi(x,\lambda)$, $\chi(x,\lambda)$ は線型的に従属であるから

$$\chi(x,\lambda_n)/\varphi(x,\lambda_n) = k_n \tag{3.18}$$

とおけば

$$\mathrm{res}\,[\Phi(x,\lambda)]_{\lambda_n} = -\frac{k_n}{\omega'(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n)\int_a^b \varphi(\xi,\lambda_n)r(\xi)f(\xi)d\xi. \tag{3.19}$$

故に (3.9) により

$$f(x) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_C \Phi(x,\lambda)d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{\omega'(\lambda_n)}\varphi_n(x)\int_a^b r(\xi)f(\xi)\varphi_n(\xi)d\xi \tag{3.20}$$

という展開公式が得られる．

(3.14) は

$$G(x,\xi;\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{\chi(x,\lambda)\varphi(\xi,\lambda)}{[\varphi,\chi]_\xi}, & \xi\leqq x,\\[2mm] -\dfrac{\varphi(x,\lambda)\chi(\xi,\lambda)}{[\varphi,\chi]_\xi}, & x\leqq \xi\end{cases}\tag{3.21}$$

なる函数を定義すれば

$$\Phi(x,\lambda)=\int_a^b G(x,\xi;\lambda)r(\xi)f(\xi)d\xi \tag{3.22}$$

と簡単に書くことができる．(3.21) で定義された $G(x,\xi,\lambda)$ は第3章以下にたびたび現われる Green 函数である (I §14.3, 621 頁参照).

(3.9) は (3.22) を解いて逆に $f$ を $\Phi$ に関しての $\lambda$ の複素積分として表わした形である．$\Phi$ は $\lambda$ の函数として有理型で $\lambda$ に関しての複素積分は各々の極における留数の総和の形として表わすことができる．それが (3.20) でみるように固有函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ による Fourier 式展開となっているのである．具体的に下に選んだ例題についてその間の事情を味読されたい.

例題 1〕

$$L[u]+\lambda u\equiv\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0, \tag{3.23}$$

$$B_a[u]\equiv u'(a)\sin\alpha-u(a)\cos\alpha=0, \tag{3.24 a}$$

$$B_b[u]\equiv u'(b)\sin\beta-u(b)\cos\beta=0, \tag{3.24 b}$$

(3.23)+(3.24 a) を満たす解 $\varphi(x,\lambda)$ は

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}}\sin\{\sqrt{\lambda}(x-a)\}-\sin\alpha\cos\{\sqrt{\lambda}(x-a)\}, \tag{3.25 a}$$

(3.23)+(3.24 b) を満たす解 $\chi(x,\lambda)$ は

$$\chi(x,\lambda)=\frac{\cos\beta}{\sqrt{\lambda}}\sin\{\sqrt{\lambda}(b-x)\}-\sin\beta\cos\{\sqrt{\lambda}(b-x)\}. \tag{3.25 b}$$

特に

1° $\alpha=0,\ \beta=0$ の場合には

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(x-a)\}}{\sqrt{\lambda}},\quad \chi(x,\lambda)=\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(b-x)\}}{\sqrt{\lambda}}, \tag{3.26}$$

$$\omega(\lambda)\equiv[\varphi,\chi]=-\sin\{\sqrt{\lambda}(b-a)/\sqrt{\lambda}\},$$

$$\omega(\lambda_n)=0 \quad より \quad \sqrt{\lambda_n}=n\pi/(b-a),\qquad n=1,2,3,\cdots, \tag{3.27}$$

$$\omega'(\lambda_n)=-(b-a)/(2\lambda_n)\cos n\pi=-(-1)^n(b-a)^3/2(n\pi)^2, \tag{3.28}$$

$$k_n=\sin\{n\pi(b-x)/(b-a)\}/\sin\{n\pi(x-a)/(b-a)\}=-(-1)^n, \tag{3.29}$$

$$\varphi_n(x)=\sin\{n\pi(x-a)/(b-a)\}/\{n\pi/(b-a)\}. \tag{3.30}$$

これらの式を (3.19) に代入して

$$\mathrm{res}\,[\Phi(x,\lambda)]_{\lambda_n}=\frac{-2}{b-a}\sin\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\int_a^b f(\xi)\sin\left(n\pi\frac{\xi-a}{b-a}\right)d\xi.$$

従って展開公式 (3.20) は

$$f(x)=\frac{2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\int_a^b f(\xi)\sin\left(n\pi\frac{\xi-a}{b-a}\right)d\xi \tag{3.31}$$

の形をとる.

2° $\alpha=\pi/2,\ \beta=\pi/2$ の場合なら

(3.26) の代りに

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}(x-a),\quad \chi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}(b-x) \tag{3.32}$$

が得られ,

$$\omega(\lambda)\equiv[\varphi,x]=\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(b-a)=0, \tag{3.33}$$

$$\omega'(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(b-a)+\frac{b-a}{2}\cos\sqrt{\lambda}(b-a) \tag{3.34}$$

から固有値は

$$\sqrt{\lambda_n}=n\pi/(b-a),\qquad n=0,1,2,3,\cdots, \tag{3.35}$$

$$\omega'(\lambda_n)=\{(b-a)/2\}\cos n\pi=(-1)^n(b-a)/2,\qquad n=1,2,3,\cdots, \tag{3.36}$$

$$k_n=\cos\{n\pi(b-x)/(b-a)\}/\cos\{n\pi(x-a)/(b-a)\}=(-1)^n,\qquad n=1,2,3,\cdots, \tag{3.37}$$

$$\varphi_n(x)=\cos\{n\pi(x-a)/(b-a)\},\qquad n=1,2,3,\cdots. \tag{3.38}$$

これらの諸式から展開の一般項は (3.19) から

$$\mathrm{res}\,[\Phi(x,\lambda)]_{\lambda_n}=\frac{-2}{b-a}\cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\int_a^b f(\xi)\cos\left(n\pi\frac{\xi-a}{b-a}\right)d\xi \tag{3.39}$$

であることがわかる. ただし今度の場合には $n=0$ も固有値となるが, この場合に (3.39) は $n=0$ にはそのまま用いられない. 実際 $\omega'(0)$ は $(b-a)/2$ ではなくて (3.34) から

$$\omega'(0)=\lim_{\lambda\to 0}\omega'(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(b-a)+\frac{b-a}{2}\cos\sqrt{\lambda}(b-a)\right\}=b-a.$$

従って

$$\mathrm{res}\,[\Phi(x,\lambda)]_0=\frac{-1}{b-a}\int_a^b f(\xi)d\xi,$$

故に一般展開公式 (3.20) はこの場合

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\xi)d\xi+\frac{2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\int_a^b f(\xi)\cos\left(n\pi\frac{\xi-a}{b-a}\right)d\xi \tag{3.40}$$

の形をとる.

(3.31), (3.40) で特に $a=0,\ b=\pi$ の場合を考えれば, 変域 $[0,\pi]$ で成り立つ

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\int_0^{\pi}f(\xi)\sin n\xi\,d\xi, \tag{3.41}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)d\xi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi}f(\xi)\cos n\xi\,d\xi \tag{3.42}$$

が得られる.

例題 2〕 25 頁の例題 2 で論じた固有函数 (*2.29*) すなわち,

$\alpha_l$ を

$$J_\nu(\alpha_l a)Y_\nu(\alpha_l b)-Y_\nu(\alpha_l a)J_\nu(\alpha_l b)=0 \tag{《2.28》}$$

の零点とするとき,

$$\varphi_l(x)=\sqrt{x}\{J_\nu(\alpha_l x)Y_\nu(\alpha_l a)-Y_\nu(\alpha_l x)J_\nu(\alpha_l a)\} \tag{《2.29》}$$

を用いて $[a,b]$ で定義された函数 $f(x)$ の展開式を求めてみよう.

第一種の境界条件: $\alpha=0,\ \beta=0$ に対する解

$$\varphi(x,\lambda)\equiv\varphi(x,\alpha^2)=\frac{\pi}{2}\sqrt{ax}\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu(\alpha a)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu(\alpha a)\},\quad \alpha=\sqrt{\lambda}, \tag{3.43a}$$

$$\chi(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{bx}\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu(\alpha b)\} \tag{3.43b}$$

から

$$\omega(\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{ab}\{J_\nu(\alpha a)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu(\alpha a)J_\nu(\alpha b)\}. \tag{3.44}$$

故に固有値 $\lambda_n$ は $\omega(\lambda_n)=0$ から求め,

$$\omega'(\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{ab}\Big[\frac{b}{2\sqrt{\alpha}}\{J_\nu(\alpha a)Y_\nu'(\alpha b)-Y_\nu(\alpha a)J_\nu'(\alpha b)\}$$
$$+\frac{a}{2\sqrt{\alpha}}\{J_\nu'(\alpha a)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu'(\alpha a)J_\nu(\alpha b)\}\Big] \tag{3.44'}$$

を Lommel の公式

$$\alpha x\{J_\nu(\alpha x)Y_\nu'(\alpha x)-Y_\nu(\alpha x)J_\nu'(\alpha x)\}=2/\pi$$

を利用して $Y_\nu'(\alpha x)$ を消去すると

$$\omega'(\lambda)=-\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{ab}}{2\alpha}\frac{J_\nu'(\alpha b)}{J_\nu(\alpha b)}\{J_\nu(\alpha a)Y_\nu(\alpha b)-Y_\nu(\alpha a)J_\nu(\alpha b)\}$$
$$-\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{ab}}{2\alpha}\frac{J_\nu'(\lambda a)}{J_\nu(\lambda a)}\{J_\nu(\alpha b)Y_\nu(\alpha a)-Y_\nu(\alpha b)J_\nu(\alpha a)\}$$
$$-\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{ab}}{\pi\alpha^2}\frac{J_\nu(\alpha a)}{J_\nu(\alpha b)}-\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{ab}}{\pi\alpha^2}\frac{J_\nu(\alpha b)}{J_\nu(\alpha a)}\qquad,\ \alpha=\sqrt{\lambda}$$
$$=-\left\{\frac{a}{2\alpha}\frac{J_\nu'(\alpha a)}{J_\nu(\alpha a)}+\frac{b}{2\alpha}\frac{J_\nu'(\alpha b)}{J_\nu(\alpha b)}\right\}\omega(\lambda_n)-\frac{\sqrt{ab}}{2\alpha^2}\left\{\frac{J_\nu(\alpha b)}{J_\nu(\alpha a)}-\frac{J_\nu(\alpha a)}{J_\nu(\alpha b)}\right\},$$

$$\therefore\quad \omega'(\alpha_l^2)=\frac{-\sqrt{ab}}{2\alpha_l^2}\left\{\frac{J_\nu^2(\alpha_l b)-J_\nu^2(\alpha_l a)}{J_\nu(\alpha_l a)J_\nu(\alpha_l b)}\right\} \tag{3.45}$$

また

$$k_l=\chi(x,\lambda_l)/\varphi(x,\lambda_l)=\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{J_\nu(\alpha_l x)Y_\nu(\alpha_l b)-Y_\nu(\alpha_l x)J_\nu(\alpha_l b)}{J_\nu(\alpha_l x)Y_\nu(\alpha_l a)-Y_\nu(\alpha_l x)J_\nu(\alpha_l a)}$$

に, $\omega(\lambda_n)=0$ から得られる

$$Y_\nu(\alpha_l a)/J_\nu(\alpha_l a)=Y_\nu(\alpha_l b)/J_\nu(\alpha_l b)$$

を入れて

$$k_l=\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{J_\nu(\alpha_l b)}{J_\nu(\alpha_l a)}. \tag{3.46}$$

故に (*3.20*) から次の展開式が得られる.

$$f(x)=\frac{\pi^2}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\alpha_l^2 J_\nu^2(\alpha_l b)}{J_\nu^2(\alpha_l a)-J_\nu^2(\alpha_l b)}\sqrt{x}\{J_\nu(\alpha_l x)Y_\nu(\alpha_l a)-Y_\nu(\alpha_l x)J_\nu(\alpha_l a)\}$$
$$\cdot\int_a^b\sqrt{\xi}\{J_\nu(\alpha_l\xi)Y_\nu(\alpha_l a)-Y_\nu(\alpha_n\xi)J_\nu(\alpha_n a)\}f(\xi)d\xi. \qquad (3.47)$$

問題 1〕 $[-\pi,\pi]$ で与えられた区分的になめらかな函数 $f(x)$ が周期性条件

$$f(-\pi)=f(\pi) \qquad f'(-\pi)=f'(\pi)$$

を満足する．一般展開定理より通常の Fourier 展開公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)d\xi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\cos n\xi\,d\xi$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\sin n\xi\,d\xi \qquad (3.48)$$

を導け．ただし $f(x)$, $f'(x)$ とも $x=0$ で連続と仮定する．

（ヒント） $F(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ は $F(0)=0$, $F(\pi)=0$ を満たす．$[0,\pi]$ で $F(x)$ を考え，例題 1 の $1^\circ$ の結果を利用せよ．同様に $F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ に例題 1 の $2^\circ$ の結果を適用せよ．

（解） $(3.41)$ によって

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\int_0^{\pi}\{f(\xi)-f(-\xi)\}\sin n\xi\,d\xi, \qquad (3.49)$$

また $F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ は $F'(0)=0$, $F'(\pi)=0$ を満たす．$[0,\pi]$ で $F(x)$ を考えて例題 1 の $2^\circ$ の結果を利用し，$(3.42)$ から

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{f(\xi)+f(-\xi)\}d\xi$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi}\{f(\xi)+f(-\xi)\}\cos n\xi\,d\xi. \qquad (3.50)$$

しかるに $(3.49)$, $(3.50)$ は次のように変形される．

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\sin n\xi\,d\xi$$
$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)d\xi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\cos n\xi\,d\xi.$$

この両式の和を作れば求める結果が得られる．

問題 2〕 25 頁の例題 3 に論じた

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0, \qquad u(0)=0,\ u'(l)+hu(l)=0$$

に対する固有函数

$$\varphi_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x), \qquad \sqrt{\lambda_n}\cot(\sqrt{\lambda_n}\,l)=-h$$

を用いて $f(x)$, $(0\leqq x\leqq l)$ を展開せよ．

（ヒント） 25 頁の例題 3 に与えた

$$\varphi(x,\lambda)=-\sin(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda},$$
$$\chi(x,\lambda)=\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(l-x)\}}{\sqrt{\lambda}}\cos\beta-\cos\{\sqrt{\lambda}(l-x)\}\sin\beta$$

および

$$\omega(\lambda)\equiv[\varphi,\chi]=\frac{\sin(l\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\cos\beta-\cos(l\sqrt{\lambda})\sin\beta$$

から $\omega'(\lambda_n)$ および $k_n=\chi(x,\lambda_n)/\varphi(x,\lambda_n)$ を計算し，展開公式 (3.20) に従って展開式を求めよ．

(解) $$\omega(\lambda_n)=\frac{\sin(l\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}}\cos\beta-\cos(l\sqrt{\lambda_n})\sin\beta=0,$$

$$\omega'(\lambda_n)=\frac{l\cos\beta\cos(l\sqrt{\lambda_n})}{2\lambda_n}\{1-(\tan\beta/l)+\lambda_n\tan^2\beta\},$$

$$\begin{aligned}k_n&=\left[\frac{\sin\{\sqrt{\lambda_n}(l-x)\}}{\sqrt{\lambda_n}}\cos\beta-\cos\{\sqrt{\lambda_n}(l-x)\}\sin\beta\right]\Big/\{-\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x)/\lambda_n\}\\&=-\sqrt{\lambda_n}\{\sin(\sqrt{\lambda_n}\,l)\sin\beta+\cos(\sqrt{\lambda_n}\,l)\cos\beta/\sqrt{\lambda_n}\}\\&=-\cos\beta\cos(\sqrt{\lambda_n}\,l)\{1+\lambda_n\tan^2\beta\}.\end{aligned}$$

従って (3.20) によって

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\lambda_n\tan^2\beta}{1-(\tan\beta/l)+\lambda_n\tan^2\beta}\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x)\int_0^l f(\xi)\sin(\sqrt{\lambda_n}\,\xi)d\xi\\&=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n+h^2}{\lambda_n+(h/l)+h^2}\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x)\int_0^l f(\xi)\sin(\sqrt{\lambda_n}\,\xi)d\xi,\end{aligned}\tag{3.51}$$

## §4 種々の Sturm-Liouville 型方程式の固有値と固有函数による展開公式

Sturm-Liouville 型微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u+\lambda r(x)u=0\tag{4.1}$$

に属する特殊の方程式で応用上最もよく現われる代表的な境界条件とそれに応ずる固有値，これに属する正規直交系をなす固有函数をまとめてみると第 4.1 表のようになる．

この表にあげた $\varphi_n(x)$ は密度函数 $r(x)$ に関しての正規直交系 $(\varphi_n,\varphi_{n'})=0,\ n\neq n'$, $(\varphi_n,\varphi_n)=\int_a^b r(\xi)|\varphi_n(\xi)|^2d\xi=1$ であって $f(x)$ の Fourier 式展開は

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)(f,\varphi_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\int_a^b r(\xi)f(\xi)\overline{\varphi}_n(\xi)d\xi\tag{4.6}$$

で与えられる．両辺に $\sqrt{r(x)}$ をかけて $\sqrt{r(x)}f(x)=F(x)$ とおけば $\sqrt{r(x)}\varphi_n(x)=\psi_n(x)$ に関しては簡単に

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\int_a^b F(\xi)\overline{\psi}_n(\xi)d\xi\tag{4.6a}$$

と書ける．第 4.1 表の $\psi_n(x)$ はこれである．これは (密度函数 1 に関して) 正規直交系をなしている：

$$\int_a^b\psi_n(\xi)\overline{\psi}_{n'}(\xi)d\xi=\delta_{n,n'}.\tag{4.7}$$

たとえば (4.2) では

第 4.1 表

| 方　程　式 | 基本区域 | 境界条件 | 固有値 $\lambda_n$ | 正規直交系 $\psi_n(x)=\sqrt{r(x)}\varphi_n(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)=1,\ q(x)=0,\ r(x)=1$<br>$\dfrac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$ | $(-l, l)$ | 周期性条件<br>$u(-l)=u(l)$<br>$u'(-l)=u'(l)$ | $(n\pi/l)^2$<br>$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2l}}e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ | (4.1′) |
| | $(0, l)$ | 両端固定<br>$u(0)=u(l)=0$ | $(n\pi/l)^2$<br>$n=1, 2, 3, \cdots$ | $\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ | (4.1″) |
| | $(0, l)$ | 両端自由<br>$u'(0)=u'(l)=0$ | $(n\pi/l)^2$<br>$n=0, 1, 2, \cdots$ | $\sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ | (4.1‴) |
| Legendre の微分方程式<br>$p(x)=(1-x^2)$<br>$q(x)=0,\ r(x)=1$<br>$\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{du}{dx}\right)+\lambda u=0$<br>特異点 $x=\pm 1$ | $(-1, 1)$ | 特異性境界条件<br>$u(\pm 1)$ 有界<br>または<br>$\Vert u\Vert=(u, u)^{\frac{1}{2}}$ 存在 | $n(n+1)$<br>$n=0, 1, 2, \cdots$ | $\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}P_n(x)$ | (4.2) |
| Legendre の陪微分方程式<br>$p(x)=(1-x^2)$<br>$q(x)=\dfrac{m^2}{1-x^2},\ r(x)=1$<br>$\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{du}{dx}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)u=0$<br>特異点 $x=\pm 1$ | $(-1, 1)$ | $u(\pm 1)$：有界<br>または $\Vert u\Vert$ 存在 | $n(n+1)$<br>$n=0, 1, 2, \cdots$<br>$m=0, 1, 2, \cdots$<br>$m\leqq n$ | $\sqrt{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^m(x)$ | (4.2′) |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bessel の微分方程式<br>$p(x)=x,\ q(x)=\dfrac{\nu^2}{x}$<br>$r(x)=x$<br>$\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{du}{dx}\right)+\left(\alpha^2 x-\dfrac{\nu^2}{x}\right)u=0$*<br>特異点 $x=0$ | $(0,a)$ | $u(0)$：有界<br>$u(a)=0$ | $\alpha=\alpha_l$：<br>$\alpha_l^{-\nu}J_\nu(\alpha_l)=0$<br>$l=1,2,3,\cdots$ | $\dfrac{\sqrt{2x}}{aJ_{\nu+1}(\alpha_l)}J_\nu\left(\alpha_l\dfrac{x}{a}\right)$ | $(4.3)$ |
| | $(0,a)$ | $u(0)$：有界<br>$u'(a)+hu(a)=0$ | $\alpha=\beta_l$：<br>$\beta^{-\nu}\{\beta_l J_\nu'(\beta_l)$<br>$+hJ_\nu(\beta_l)\}=0$<br>$l=1,2,3,\cdots$ | $\dfrac{\beta_l}{a\sqrt{\beta_l^2+h^2-\nu^2}}\dfrac{\sqrt{2x}J_\nu\left(\beta_l\dfrac{x}{a}\right)}{J_\nu(\beta_l)}$ | $(4.3')$ |
| | $(0,a)$ | $u(0)$：有界<br>$u'(a)=0$ | $\alpha=\gamma_l$：<br>$\gamma_l^{1-\nu}J_\nu'(\gamma_l)=0$ | $\dfrac{\gamma_l}{a\sqrt{\gamma_l^2-\nu^2}}\dfrac{\sqrt{2x}J_\nu\left(\gamma_l\dfrac{x}{a}\right)}{J_\nu(\gamma_l)}$ | $(4.3'')$ |
| Weber-Hermite の微分方程式<br>$p(x)=e^{-x^2},\ q(x)=e^{-x^2}$<br>$r(x)=e^{-x^2}$<br>$\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\dfrac{du}{dx}\right)-e^{-x^2}u+\lambda e^{-x^2}u=0$ | $(-\infty,\infty)$ | $\Vert u\Vert$：存在 | $2n+1$<br>$n=0,1,2,\cdots$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ | $(4.4)$ |
| Laguerre の陪微分方程式<br>$p(x)=e^{-x}x^{m+1}$<br>$q(x)=me^{-x}x^m,\ r(x)=e^{-x}x^m$<br>$\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}x^{m+1}\dfrac{du}{dx}\right)-me^{-x}x^m u$<br>$+\lambda e^{-x}x^m u=0$ | $(0,\infty)$ | $\Vert u\Vert$：存在 | $n$<br>$n=0,1,2,\cdots$<br>$m=0,1,2,\cdots$<br>$m\leqq n$ | $\sqrt{\dfrac{(n-m)!}{(n!)^3}}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{m}{2}}L_n^m(x)$ | $(4.5)$ |

* 便宜上 Bessel の場合だけ標準型 (*4.1*) で $\lambda$ の代りに $\alpha^2$ と書いてある．

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} P_n(\xi)P_{n'}(\xi)d\xi=\delta_{n,n'}, \tag{4.8}$$

(*4.3*) では

$$\frac{2}{a^2}\frac{1}{\{J_{\nu+1}(\alpha_l)\}^2}\int_0^a \xi J_\nu\left(\alpha_l\frac{\xi}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{l'}\frac{\xi}{a}\right)d\xi=\delta_{l,l'}, \tag{4.9}$$

(*4.3′*) では

$$\frac{2}{a^2}\frac{\beta_l^2}{(\beta_l^2+h^2-\nu^2)\{J_\nu(\beta_l)\}^2}\int_0^a \xi J_\nu\left(\beta_l\frac{\xi}{a}\right)J_\nu\left(\beta_{l'}\frac{\xi}{a}\right)d\xi=\delta_{l,l'} \tag{4.10}$$

がそれである.

Fourier 式展開に関しては，たとえば (*4.3*) に対応するもの (**Fourier-Bessel 展開**) は (*4.6*a) から

$$F(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2x}J_\nu\left(\alpha_l\frac{x}{a}\right)}{aJ_{\nu+1}(\alpha_l)}\int_0^a F(\xi)\frac{\sqrt{2\xi}J_\nu\left(\alpha_l\frac{\xi}{a}\right)}{aJ_{\nu+1}(\alpha_l)}d\xi,\quad 0\leqq x\leqq a \tag{4.11}$$

である．これに対し (*4.6*) からは $r(x)=x$ を含んだ通常の形

$$f(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2J_\nu\left(\alpha_l\frac{x}{a}\right)}{a^2\{J_{\nu+1}(\alpha_l)\}^2}\int_0^a \xi f(\xi)J_\nu\left(\alpha_l\frac{\xi}{a}\right)d\xi,\quad 0\leqq x\leqq a \tag{4.12}$$

が得られる.

このような正規直交函数系 $\psi_n(x)$ に関しては

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\psi_n)\psi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(\xi)\overline{\psi}_n(\xi)d\xi\cdot\psi_n(x), \tag{4.13}$$

積分と総和との順を代えることが許される場合には

$$f(x)=\int_a^b f(\xi)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\overline{\psi}_n(\xi)\right\}d\xi, \tag{4.14}$$

しかるに第3章 (特に §2) に説明する $\delta$ 函数の表現を使って成り立つ関係

$$f(x)=\int_a^b f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi \tag{4.15}$$

と比較すれば

$$\delta(x-\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\overline{\psi}_n(\xi) \tag{4.16}$$

が得られる．右辺の級数は収束しないから厳密な意味でこの展開式は意味を持たないが，函数 $f(\xi)$ にかけて積分して $f(x)$ を与える意味で形式的に使うと便利であることは第3章以下の応用でみる通りである.

以下の計算に使う $\delta$ 函数の表示式を (*4.1′*)～(*4.3″*) の $\psi_n(x)$ から作ってみると，次の通りになる.

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{in\pi}{l}(x-\xi)\right]^{(1)},\quad -l<{x \atop \xi}<l \tag{4.17}$$

---

(1)　一般の複素数 $z$ に対する指数函数 $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$ に対して $\exp z$ または $e^z$ 両方の記法が用いられる.

$$=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l},\qquad 0<{x \atop \xi}<l \tag{4.17'}$$

$$=\frac{1}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l},\qquad 0<{x \atop \xi}<l$$

$$(\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1,2,3,\cdots) \tag{4.17''}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)P_n(\xi),\qquad -1<{x \atop \xi}<1 \tag{4.18}$$

$$=\frac{2\sqrt{x\xi}}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_\nu\left(\alpha_l\frac{x}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_l\frac{\xi}{a}\right)}{\{J_{\nu+1}(\alpha_l)\}^2},\qquad \alpha_l^{-\nu}J(\alpha_l)=0,\ 0<{x \atop \xi}<a \tag{4.19}$$

$$=\frac{2\gamma_l^2\sqrt{x\xi}}{a^2(\gamma_l^2-\nu^2)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_\nu\left(\gamma_l\frac{x}{a}\right)J_\nu\left(\gamma_l\frac{\xi}{a}\right)}{\{J_\nu(\gamma_l)\}^2},\qquad \gamma^{1-\nu}_l J_\nu'(\gamma_l)=0,\ 0<{x \atop \xi}<a. \tag{4.19'}$$

## §5 Fourier 展開および Fourier-Bessel 展開の極限としての Fourier 積分および Fourier-Bessel 積分

区間 $(-a,a)$ で $e^{i\frac{n\pi x}{a}}$, $n=0\pm1,\pm2,\cdots$ はすべての整数をもれなくとれば，基本区間 $(-a,a)$ で完全直交系をなし，複素 Fourier 展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi x}{a}},\qquad C_n=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(\xi)e^{-i\frac{n\pi\xi}{a}}d\xi \tag{5.1}$$

が成り立つ．

境界 $(-a,a)$ を $(-\infty,\infty)$ に追いやれば，$(-\infty,\infty)$ で定義された函数 $f(x)$ は級数の代りに積分を使って

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-ik\xi}d\xi,\qquad -\infty<x<\infty \tag{5.2}$$

の形の二重積分によって表わされる．これが **Fourier の積分定理**である．I §3·9 には Dirichlet の積分から厳密にこれを導いてあるがここでは (5.1) から (5.2) に導く発見的な路について触れておく．

$$\frac{n\pi}{a}=k_n$$

と書き，$\varDelta k_n=k_{n+1}-k_n=\pi/a$ を使うと Fourier 係数 $C_n$ は

$$C_n=\frac{\varDelta k_n}{2\pi}\int_{-a}^{a}f(\xi)e^{-ik_n\xi}d\xi$$

と書けるから

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi}{a}x}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{ik_nx}\varDelta k_n\int_{-a}^{a}f(\xi)e^{-ik_n\xi}d\xi. \tag{5.3}$$

$a\to\infty$ とともに $\varDelta k_n\to0$, $k_n$ はほとんど連続的に変化する．その結果 $n$ についての総和は (5.2) の積分の形に移行することを示唆する．

(4.17) で上と同様の極限移行の路によれば

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk\qquad(-\infty<x,\ \xi<8) \tag{5.4}$$

の $\delta$ の積分表示式を示唆する.

これはまた Fourier 積分公式 (*5.2*) で積分の順序を形式的に交換して

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk$$

と書いた場合

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$$

と比較して得られる関係である.

複素数値表現で書いた Fourier 積分 (*5.2*) の代りに実数値表現

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos k(x-\xi)d\xi,\qquad -\infty<x<\infty \tag{5.2a}$$

をとれば

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos k(x-\xi)dk,\qquad -\infty<x,\xi<\infty, \tag{5.5}$$

また $0<x$ に対して成立する

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos kx\,dk\int_0^{\infty}f(\xi)\cos k\xi\,d\xi,\qquad 0<x<\infty, \tag{5.2b}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin kx\,dk\int_0^{\infty}f(\xi)\sin k\xi\,d\xi,\qquad 0<x<\infty \tag{5.2c}$$

から

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos kx\cos k\xi\,dk,\qquad 0<x,\xi<\infty, \tag{5.6}$$

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin kx\sin k\xi\,dk,\qquad 0<x,\xi<\infty \tag{5.6'}$$

が得られる. どれも以下の応用でたびたび利用する関係である.

Fourier 展開で区間 $(-a,a)$ を $a\to\infty$ に極限移行して Fourier 積分を求めたのと同様の取扱いをすれば, **Fourier-Bessel 積分**公式として知られている積分定理

$$f(x)=\int_0^{\infty}kJ_\nu(kx)dk\int_0^{\infty}\xi f(\xi)J_\nu(k\xi)d\xi \tag{5.7}$$

を発見的に導くことができる. (I §16.16 (490頁) にその証明が与えられている.)

Fourier-Bessel 展開 (*4.12*) で

$$\alpha_l/a=k_l \tag{5.8}$$

と書き

$$\Delta k_l=k_{l+1}-k_l=(\alpha_{l+1}-\alpha_l)/a,$$

$a\to\infty$ を考えるので, この式では近似的に Bessel 函数の漸近展開 (I §11.15 参照)

$$J_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{5.9}$$

から出した零点

$$\alpha_l=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \tag{5.10}$$

で間に合わせることができる. すると,

$$\varDelta k_l \approx (\pi/a), \tag{5.11}$$

$$J_{\nu+1}(\alpha_l) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_l}} \cos\left(\alpha_l - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi k_l a}}. \tag{5.12}$$

また Bessel 係数 $C_n$ もこれらの関係と (4.12) から,

$$C_n = \pi\frac{k_l}{a}\int_0^a \xi f(\xi) J_\nu(k_l\xi)d\xi = k_l \varDelta k_l \int_0^a \xi f(\xi) J_\nu(k_l\xi)d\xi.$$

ゆえに (4.12) で $a\to\infty$ の極限移行の結果は

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} k_l J_\nu(k_l x)\varDelta k_l \int_0^\infty \xi f(\xi) J_\nu(k_l\xi)d\xi$$

となって $\varDelta k_l \to 0$ とともに (5.7) の成立することを示唆している.

同様に (4.19) の極限移行は

$$\delta(x-\xi) = \sqrt{x\xi}\int_0^\infty kJ_\nu(kx)J_\nu(k\xi)dk, \qquad 0<x, \xi<\infty \tag{5.13}$$

の形の積分表示式の成立を示唆している.

あるいは Fourier-Bessel 積分 (5.7) を

$$f(x) = \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty k\xi\, f(\xi)J_\nu(kx)J_\nu(k\xi)dk$$

のように変形して

$$\delta(x-\xi) = \sqrt{\frac{x}{\xi}}\,\delta(x-\xi)$$

の関係を考慮すれば, また (5.13) に到達する.

§4~5 に与えた $\delta$ 函数の表現のもう少し詳しい解説については [11] を参考するとよい.

## §6 量子力学的調和振動子 Weber-Hermite の函数

量子力学で調和振動子に関する Schrödinger の方程式を書くと, Weber の方程式 (1.25) が得られる. これを書き直すと

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda-\xi^2)\psi &= \left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi(\xi,\lambda) + (\lambda-1)\psi(\xi,\lambda) \\ &= \left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\psi(\xi,\lambda) + (\lambda+1)\psi(\xi,\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

という形に書くことができる. ここに微分演算子

$$\overset{(\lambda)}{T} = \frac{d}{d\xi} - \xi, \quad \underset{(\lambda)}{T} = \frac{d}{d\xi} + \xi \tag{6.2}$$

は "(6.1) の解でパラメタ $\lambda$ の値に相当する $\psi(\xi,\lambda)$ に作用すると, 同じ Weber の方程式の解で, $\lambda$ の値が $\lambda\pm2$ をもつものに移す性質をもっている":

$$\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda) = \psi(\xi,\lambda+2), \tag{6.3}$$

$$\underset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda) = \psi(\xi,\lambda-2). \tag{6.3'}$$

それで (6.2) の $\overset{(\lambda)}{T}$ を λ の**上昇演算子**, $\underset{(\lambda)}{T}$ を λ の**下降演算子**と名づける[1].

演算子 $\overset{(\lambda)}{T}, \underset{(\lambda)}{T}$ を使えば, (6.1) は

$$\overset{(\lambda)}{T}\underset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda)+(\lambda-1)\psi(\xi,\lambda)=0, \tag{6.4}$$

$$\underset{(\lambda)}{T}\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda)+(\lambda+1)\psi(\xi,\lambda)=0 \tag{6.4'}$$

と書けるから, (6.4′) に $\overset{(\lambda)}{T}$ を作用すれば

$$\overset{(\lambda)}{T}\underset{(\lambda)}{T}(\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda))+(\lambda+1)(\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda))=0$$

と書ける. 一方 (6.4) で $\lambda\to\lambda+2$ とおけば

$$\overset{(\lambda)}{T}\underset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda+2)+(\lambda+1)\psi(\xi,\lambda+2)=0$$

となる.

これは $\overset{(\lambda)}{T}\psi(\xi,\lambda)$ が $\psi(\xi,\lambda+2)$ と同じ微分方程式を満たすことを示している. この意味で (6.3) の性質があることが確かめられた. 全く同様に (6.3′) の成立することが確かめられる.

さて (6.1) の形に書いてみると Weber の方程式が λ の特定の値の場合には簡単な解を許すことがわかる. すなわち $\lambda=1$ の場合には (6.1) は

$$\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi(\xi,1)=0 \tag{6.5}$$

となって $\left(\dfrac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi(\xi,1)=0$ ならば十分だから

$$\frac{d\psi(\xi,1)}{\psi(\xi,1)}+\xi d\xi=0$$

を解いて

$$\psi(\xi,1)=e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{6.6}$$

を得る. すると (6.6) に上昇演算子 $\overset{(\lambda)}{T}$ を作用させて順に $\lambda=3,5,\cdots,(2n+1),\cdots$ に対する解を求めることができる. 昇降演算子は定数倍しても同じ性質を保つから

$$\psi(\xi,3)=\left(\xi-\frac{d}{d\xi}\right)\psi(\xi,1)=2\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

$$\psi(\xi,5)=\left(\xi-\frac{d}{d\xi}\right)\psi(\xi,3)=\{(2\xi)^2-2\}e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\psi(\xi,2n+1)=\left(\xi-\frac{d}{d\xi}\right)\psi(\xi,2n-1)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-2r+1)}{r!}(2\xi)^{n-2r}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \tag{6.7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

という有様で $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ に多項式のかかった形の解が作られてくる. この多項式の形の詳しいことについては (6.23) 以下に論じてある.

(1) 昇降演算子については 18 頁の脚注 (1) に上げた文献に詳しい.

“これらの式は $-\infty<\xi<\infty$[1] の全区間で有界または二乗積分可能，すなわち $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\xi)|^2 d\xi$ が存在する” という量子力学での要請を満足する “いわゆる特異性境界条件に対する固有函数である”．このような場合は，上にみたようにパラメタ $\lambda$ が奇数：

$$\lambda = 2n+1, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.8}$$

の場合に起ることで “(6.8) が特性境界条件に対する $\lambda$ の固有値である”．ところが以下に示すように，$\lambda$ の固有値は (6.8) に限られ，したがって固有函数も (6.7) 以外には存在しない．

(6.7) の結果を考慮に入れて Weber の方程式で

$$\psi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}H(\xi) \tag{6.9}$$

と変換してみよう．すると $H$ は微分方程式

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH}{d\xi} + (\lambda-1)H = 0^{(2)} \tag{6.10}$$

を満足しなくてはならないことがわかる．(6.10) は **Hermite の方程式**と呼ばれる．(6.10) の $\xi=0$ はこの方程式の正則点だからその解は $\xi=0$ の周りに必ず整級数

$$H(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \tag{6.11}$$

の形で表わされる．

$$H'(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \xi^{k-1}, \quad H''(\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k \xi^{k-2}$$

を (6.10) に代入して

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k \xi^{\rho+k-2} - \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1-\lambda)a_k \xi^{\rho+k} = 0,$$

第一の総和で $k \to k+2$ と書きかえると

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\{(k+2)(k+1)a_{k+2} - (2k+1-\lambda)a_k\}\xi^{\rho+k} = 0,$$

---

(1) Weber の方程式 (6.1) は有限の所では係数は特異点をもたないけれど変域が $(-\infty, +\infty)$ におよんでいるので (2.3 a, b) のような確定した境界条件で論ずることができない．

(2) (6.10) を自己随伴型で書き表わせば (4.4) に与えた

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dH}{dx}\right) - e^{-x^2}H + \lambda e^{-x^2}H = 0$$

である．

これから (6.11) の係数間には

$$a_{k+2} = \frac{(2k+1-\lambda)}{(k+2)(k+1)} a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.12}$$

という**漸化関係**が成立しなければならないことがわかる．

上に求まっていた"λ の固有値 (6.8) に対しては $k=n$ のとき右辺はそのような正整数の値に対して 0 となり，係数 $a_{n+2}$ は 0 となる"．これより番号の偶数だけ大きい係数は (6.12) の関係を $k=n+2, n+4, \cdots$ に対して使うことにより全部 $a_{n+2}=0$ で表わされるから 0 となり，(6.11) の級数は結局 $\xi^n$ で切れる．すなわち，$n$ 次の多項式となる．したがって (6.7) が固有函数となるという上の結論は級数解の立場からも再確認される．

$\lambda \neq 2n+1$ の場合には，級数が有限で切れることは起らない．十分 $k$ が大きいとき漸近的に

$$a_{k+2}/a_k \sim \frac{2}{k} \tag{6.13}$$

の関係が知れるから，級数 (6.11) はその一般項が $\xi^{2k}/k!$ の形をもつ級数，つまり $e^{\xi^2}$ (もしくはこれに $\xi$ のベキがかかったもの) と収束性を等しくする．すなわち $H(\xi)$ は $|\xi| \gg 1$ で漸近的に程度 $e^{\xi^2}\xi^n$ の形をもち，これに $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ のかかった (6.9) でも

$$\psi(\xi) \sim e^{\frac{\xi^2}{2}}\xi^n \tag{6.14}$$

の程度で $|\xi| \gg 1$ とともに指数函数的に発散し，特異性境界条件に対する固有函数にはなり得ないことが結論される．

$\xi \to \infty$ での Hermite 函数の振舞いをもっと正確に調べるためには，Hermite の方程式の原点の周りの級数解 (6.11) と無限遠点の周りの解の間の**変換関係**を知る必要がある．Weber, Hermite の諸函数のこれらの諸性質は合流型超幾何方程式 (I 第7章，問題 23, 319 頁参照[1])

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{du}{dx} - \alpha u = 0 \tag{6.15}$$

の解の性質から論ずるのが最もはっきりする．(6.15) の原点 $x=0$ はいわゆる確定特異点で

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\rho+k}$$

の形の解が少なくとも一個存在することが知れている．その一個は合流型超幾何級数

(1) 詳細は例えば 18 頁脚注 (1) に述べた文献参照．

$F(\alpha;\ \gamma; x)$ を用いて

$$u_{1,0}(x) = F(\alpha;\gamma;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)} x^k \tag{6.16}$$

と書き表わされる．これに独立な解はパラメタ $\alpha, \gamma$ の値によっては種々の場合が起るが，一番簡単な場合は $\gamma \neq$ 整数 のときで，同じく $F$ を用いて

$$u_{2,0}(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma; 2-\gamma; x) \tag{6.17}$$

で与えられる．(6.15) の独立変数を

$$x = \xi^2 \tag{6.18}$$

により変換すれば，

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left\{\frac{2\gamma-1}{\xi} - 2\xi\right\}\frac{du}{d\xi} - 4\alpha u = 0 \tag{6.19}$$

が得られる．

Hermite の方程式 (6.10) は (6.19) で

$$\gamma = 1/2, \quad \alpha = (1-\lambda)/4 \tag{6.20}$$

とした特殊の場合になっている．ゆえに Hermite の方程式の基本解は合流型超幾何函数を使えば

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}(\xi) &= F\left(\frac{1-\lambda}{4}; \frac{1}{2}; \xi^2\right), \\ H^{(2)}(\xi) &= \xi F\left(\frac{1-\lambda}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \xi^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.21}$$

と表わすことができる．あるいは

$$\lambda = 2\nu + 1 \tag{6.22}$$

とおいて

$$H^{(1)}(\xi) = F\left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \xi^2\right), \quad H^{(2)}(\xi) = \xi F\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; \xi^2\right). \tag{6.23}$$

特に (6.22) で $\nu = n$: 正整数 の場合には，(6.23) は多項式解を与えるはずであるが，実際この場合を考えると，$\nu = n$: 偶数 の場合には，$-n/2$ が負の整数となるため $H^{(1)}$ の分子は $n/2$ 項目できれて

$$F\left(-\frac{n}{2}; \frac{1}{2}; \xi^2\right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}+1\right)\cdots\left(-\frac{n}{2}+k-1\right)}{k!\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)} \xi^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!}{(2k)!\left(\frac{n}{2}-k\right)!} (2\xi)^{2k}, \tag{6.24}$$

あるいは $n/2-k = r$ と置換して降べキの順に書きなおし

$$= \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-r}\left(\frac{n}{2}\right)!}{(n-2r)!\,r!} (2\xi)^{n-2r}.$$

これに定数 $(-1)^{n/2} n!/(n/2)!$ 倍したもの：

$$H_n(\xi)=(-1)^{n/2}\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}F\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\xi^2\right)=\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^r\frac{n!}{r!(2n-r)!}(2\xi)^{n-2r} \quad (6.25)$$

は Hermite の多項式と呼ばれているものである.

$\nu=n$: 奇数 の場合は, 反対に $H^{(2)}(\xi)$ の分子が有限できれて

$$\xi F\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2};\xi^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^k\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,(2\xi)^{2k+1}}{(2k+1)!\left(\frac{n-1}{2}-k\right)!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^{\frac{x-1}{2}-r}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\,(2\xi)^{n-2r}}{(n-2r)!\,r!}, \quad (6.26)$$

これに定数 $2(-1)^{\frac{n-1}{2}}n!\Big/\left(\frac{n-1}{2}\right)!$ 倍したものは

$$H_n(\xi)=2(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\xi F\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2};\xi^2\right)=\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r\frac{n!}{r!(2n-r)!}(2\xi)^{n-2r}.$$

$$(6.27)$$

Hermite の多項式を $n$ が奇数と偶数との両方の場合をまとめて次の形に表わすことができる.

$$H_n(\xi)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{r!(2n-r)!}(2\xi)^{n-2r} \quad (6.28)$$

である. ただし $\left[\frac{n}{2}\right]$ は $n$ が偶数のときはちょうど $\frac{n}{2}$ そのもの, $n$ が奇数のときはそれより小さい最も近い整数 $\frac{n-1}{2}$ を表わす.

以上はすでに直接 Weber, Hermite の方程式から得られていた結果を合流型超幾何方程式の特殊の場合として論じたのであるが, これから変換関係を論ずる.

$\lambda=2n+1$ 以外の場合には, $H^{(1)}(\xi)$, $H^{(2)}(\xi)$ とも有限級数にはならないから, これらの函数の $|\xi|\gg 1$ での行動を調べなくてはならない. もし $\xi=\infty$ が方程式 (*6. 10*) の少なくとも確定特異点ならば, この周りで収束する基本解を求めて $\xi=0$ の周りで求めた基本解をこの $\xi=\infty$ の周りの基本解の線型結合として表わす係数を定めればよい. ところが今の場合に, "$\xi=\infty$ は (*6. 19*) の不確定特異点であってその周りで収束する級数解は得られない. そのためその**漸近展開**によってその漸近性質を知るだけで満足するよりほかない".

合流型超幾何方程式 (*6. 19*) の不確定特異点の $x=\infty$ の周りの漸近解は 0 次の近似において

$$u_{1,\infty}(x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-x)^{-\alpha}, \tag{6.29}$$

$$u_{2,\infty}(x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^x x^{\alpha-\gamma} \tag{6.29'}$$

で与えられる[1].

$\xi=0$ の周りの解，基本解 $H^{(1)}(\xi)$, $H^{(2)}(\xi)$ は合流型超幾何函数を用いて (6.21) で与えられていた.

$F(\alpha;\gamma;x)$ は上の $u_{1,\infty}(x)$, $u_{2,\infty}(x)$ の和の形で表わされ，したがって $F(\alpha;\gamma;x)$ に対する漸近展開式は第零近似において

$$F(\alpha;\gamma;x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-x)^{-\alpha}+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^x x^{\alpha-\gamma} \tag{6.30}$$

で与えられることがわかる[2].

これを (6.21) に代入して考えれば, $H^{(1)}(\xi)$, $H^{(2)}(\xi)$ どちらも必ず $e^{\xi^2}\xi^{\frac{1-\lambda}{2}-1} = e^{\xi^2}\xi^{-\nu-1}$ の項がついてくる．したがって "Weber の方程式の解は $\nu=n$ でない限り必ず

$$\psi(\xi) \sim e^{\frac{\xi^2}{2}}\xi^{-\nu-1}$$

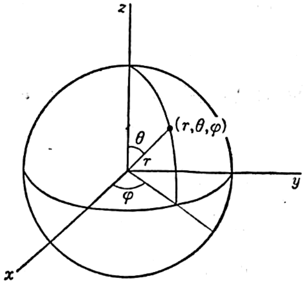
という程度で無限遠で発散する"．これは (6.14) で述べた考察の結果と一致する．このようにして "(6.8) 以外のパラメタの値に対しては固有値は存在せず，したがって固有函数も上に求めたものに限る".

## §7 量子力学的 Kepler 問題の固有値問題 1

### 角部分

$$\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\psi+(E-U)\psi=0, \tag{7.1}$$

$\hbar=h/2\pi$, $h$ は Planck の定数, $m_0$ は電子の質量においてポテンシアル $U$ が定点からの距離 $r$ だけの函数である場合には，その空間的対称性から考えて最も自然な球座標を使って書き表わす.




第 7.1 図

---

(1) たとえば福原満洲雄：常微分方程式の解法 (線型の部), 岩波, 87 頁, または犬井鉄郎：球函数, 円壔函数, 超幾何函数 (河出), 375 頁.

(2) $F(\alpha;\gamma;x)$ の $x^k$ の係数を $a_k$ とするとき (6.13) と同様 $a_k/a_{k-1}=\frac{1}{k}\frac{(\gamma+k-1)}{(\alpha+k-1)}\sim\frac{1}{k}$, これは $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ での同じ比 $a_k/a_{k-1}=\frac{1}{k}$ と一致するから, $F(\alpha;\gamma;x)$ が漸近的に $e^x$ の程度の項を与えることは (6.30) をまつまでもなく確かである.

その結果

$$\nabla^2\psi \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{7.2}$$

と書き表わされる．いま (7.1) の解 $\psi(r,\theta,\varphi)$ が $r$ のみの函数 $R(r)$ と $\theta,\varphi$ のみの函数 $Y(\theta,\varphi)$ との積の形を有する：

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \tag{7.3}$$

と仮定して (7.1) に代入し $R(r)Y(\theta,\varphi)$ で割ると

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2m_0r^2}{\hbar^2}(E-U)R\right]$$
$$= -\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda \tag{7.4}$$

という関係が得られる．§1 と同様このような $\lambda$ は実は $r$ にも $\theta,\varphi$ にも無関係な定数でなければならない．その結果 (7.1) は (7.3) の形に分離されて $R(r)$ は常微分方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left\{\frac{2m_0}{\hbar^2}(E-U)-\frac{\lambda}{r^2}\right\}R=0 \tag{7.5}$$

を満足し $Y(\theta,\varphi)$ は偏微分方程式

$$\Lambda Y+\lambda Y \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0 \tag{7.6}$$

を満足すべきことが知れる．

角部分 $Y(\theta,\varphi)$ は物理的に考えてまず区域 $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$, すなわち，単位球面上で一価連続ということが要請される．そのような函数は**球面（調和）函数**として知られている．以下に詳論するように一価連続の要請から変数分離のときに現れたパラメタ $\lambda$ が $l$ を正整数として

$$\lambda = l(l+1), \qquad l=0,1,2,\cdots \tag{7.7}$$

でなければならないことが結論される．以下の取扱いでわかるように，これも Sturm-Liouville 型方程式の特異性固有値問題に帰着されて解かれる．

球面函数の偏微分方程式 (7.6) はさらに $\theta$ と $\varphi$ とに関して分離可能で

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{7.8}$$

とおいて二個の常微分方程式

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0, \tag{7.9}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \tag{7.10}$$

が導かれる．$m$ は上と同様変数分離のとき現われたパラメタである．

一価の要請を (*7.9*) の解に行うとそれは $\varphi$ に関しての §2 に論じた周期性の条件

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \tag{7.11}$$

となって $m=$ 正整数 が固有値として選ばれ，これに対する固有函数は

$$\Phi(\varphi)=e^{\pm im\varphi}, \qquad m=0,1,2,\cdots \tag{7.12}$$

によって与えられる．一方 (*7.10*) で

$$x=\cos\theta \tag{7.13}$$

を独立変数に選べば，**Legendre の陪微分方程式**

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0 \tag{7.14}$$

が得られる．$\lambda$ の固有値 $\lambda=l(l+1)$ に対する (*7.14*) の基本解は

$$\Theta(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left(C_1\frac{d^mP_l}{dx^m}+C_2\frac{d^mQ_l}{dx^m}\right) \tag{7.15}$$

により与えられる．ここに $P_l(x)$, $Q_l(x)$ は第一種および第二種の **Legendre 函数**と名づけられ，**Legendre の微分方程式**

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right)+\lambda\Theta=0 \tag{7.16}$$

の $\lambda$ の固有値 $\lambda=l(l+1)$ に対する基本解である (I 第 10 章)．

(*7.16*) は $m=0$ の特殊の場合として (*7.14*) に含まれる．$Y(\theta,\varphi)$ が一価連続という要請はこの結果 (*7.14*) の解 $\Theta(x)$ がその全区域 $-1\leqq x\leqq 1$ で一価連続という条件でおきかえられる．$\Phi(\varphi)$ は (*7.12*) によって一価連続であることが明らかだからである．

われわれは (*7.16*) の解がそのような性質を有するためには $\lambda$ の固有値が (*7.7*) で与えられることを示そう．そのことは

$$\lambda=\nu(\nu+1) \tag{7.17}$$

と書いたとき，$\nu$ が 0 または正整数であることと同値である．(*7.14*) で (*7.17*) とおき，独立変数を $x$ から

$$\xi=(1-x)/2 \tag{7.18}$$

によって $\xi$ に移すと，(*7.14*) は

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}+(1-2\xi)\frac{d\Theta}{d\xi}+\nu(\nu+1)\Theta=0 \tag{7.19}$$

に移される．これは **Gauss の超幾何微分方程式**

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2w}{d\xi^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)\xi\}\frac{dw}{d\xi}-\alpha\beta\, w=0 \tag{7.20}$$

で

$$\alpha=\nu+1,\quad \beta=-\nu,\quad \gamma=1 \tag{7.21}$$

の特殊の場合である．

超幾何方程式 (7.20) が超幾何級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\xi^k \tag{7.22}$$

の形の解を有することは (7.20) の $\xi=0$ の周りの級数解

$$w(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi^{\rho+k},\qquad a_0\neq 0 \tag{7.23}$$

を仮定して原方程式に代入して確かめることができる(1)．

われわれが使うのは (7.21) によって $\gamma=1$ の場合で

$$w_1(\xi)=F(\alpha,\beta,1;\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k!)^2}\xi^k, \tag{7.24}$$

これに独立な解は

$$w_2(\xi)=F(\alpha,\beta,1;\xi)\log\xi+F_1(\alpha,\beta,1;\xi), \tag{7.25}$$

$$F_1(\alpha,\beta,1;\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k!)^2}\cdot\left\{\sum_{r=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\alpha+r}+\frac{1}{\beta+r}\right)-\sum_{r=1}^{k}\frac{2}{r}\right\}\xi^k \tag{7.25a}$$

で与えられ $\xi\to 0$ とともに対数的に無限大となる．

話を (7.19) の一価連続な解の問題に戻せば，(7.25) に対応する解は $\xi\to 0$ で対数的無限大が現われて連続ではないから (7.24) で (7.21) とおいた解

$$F(\nu+1,-\nu,1;\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+k-1)}{(k!)^2}\xi^k \tag{7.26}$$

のみが残される．これは $\xi=0$ の近傍すなわち元の変数でいえば $x=1$ の近傍では収束だが $\xi\to 1$ すなわち元の変数で $x=-1$ の近傍は $\nu=n$ でない限り発散になる．

(7.26) の級数の $\xi^k$ の係数を $a_k$ とするとき

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{(k+\nu)(k-\nu-1)}{k^2} \tag{7.27}$$

---

(1)　(7.23) を (7.20) に代入しまとめると

$$\rho(\rho-1+\gamma)a_0\xi^{\rho-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\{(\rho+k)(\rho+k-1+\gamma)a_k-(\rho+k-1+\alpha)(\rho+k-1+\beta)a_{k-1}\}\xi^{\rho+k-1}=0.$$

第一項から $\rho=0$ または $\rho=1-\gamma$，第二項から

$$(\rho+k)(\rho+k-1+\gamma)a_k=(\rho+k-1+\alpha)(\rho+k-1+\beta)a_{k-1},\qquad k=1,2,3,\cdots.$$

$\rho=0$ の方が係数間の漸化式

$$a_k=\frac{(\alpha+k-1)(\beta+k-1)}{k(\gamma+k-1)}a_{k-1}$$

を与える．これから (7.22) の級数解が定まる．

の関係があるから，$\nu$ がある定まった正整数 $l$ に等しいときは $k=l+1$ のとき $a_{l+1}=0$ が現われて級数が有限で切れる場合が起るが，このときを除けば十分 $k$ が大きいときは $k$ に対して $\nu$ は無視できるから

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{k-1}{k} \tag{7.27 a}$$

となって $\xi\approx 1$ で (7.26) は対数的に発散である(1)．

ゆえに"(7.16) の解で $-1\leqq x\leqq 1$ の全区間で連続であるためには $\lambda=l(l+1),\ l=0,1,2,\cdots$(2) の場合にかぎる"．これが (7.7) の固有値である．この場合には (7.26) は $k=l$ で止まり，それ以上の係数はすべて 0 となる．すなわち $l$ 次の多項式になる．多項式が一価連続であることは明らかだから多項式解が固有函数になる．実際，第一種の Legendre 函数 $P_l(x)$ は $l$ 次の多項式であって，(7.16) の $\lambda$ の固有値 $l(l+1)$ に対する固有函数になっている．最も普通に用いられる表式は次のものである (I §10.1 405 頁)．

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l=\frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!\,x^{l-2k}}{k!\,(l-k)!\,(l-2k)!}. \tag{7.28}$$

Legendre の陪方程式 (7.14) の $\lambda$ の固有値も同様に処理できる．すなわち (7.14) で

$$\Theta=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u \tag{7.29}$$

とおけば $u$ に関する方程式は

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2(m+1)x\frac{du}{dx}+\{\nu(\nu+1)-m(m+1)\}u=0 \tag{7.30}$$

となる．(7.30) に変換 (7.18) を行えば，(7.19) の代りに

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2}+\{m+1-2(m+1)\xi\}\frac{du}{d\xi}+(\nu-m)(\nu+m+1)u=0 \tag{7.31}$$

となって超幾何方程式で

$$\alpha=\nu+m+1,\quad \beta=-\nu+m,\quad \gamma=m+1 \tag{7.32}$$

の場合である．したがって $\xi\approx 0$ で有限な (7.26) に相当する解は(3)

$$F(\nu+m+1,-\nu+m;m+1;\xi)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+m+1)(\nu+m+2)\cdots(\nu+m+k)(-\nu+m)(-\nu+m+1)\cdots(-\nu+m+k-1)}{k!\,(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\xi^k. \tag{7.33}$$

---

(1) $\log(1-\xi)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^k}{k}$ の $\xi^k$ の係数を $a_k$ とすれば $a_k/a_{k-1}=(k-1)/k$ の関係があって (7.27 a) の右辺と一致する．ゆえに (7.26) は $\log(1-\xi)$ と収束発散を共にする．

(2) $l$ の代りに $-l-1$ とかえても $l(l+1)$ は同じ値をとる．この意味で負の整数の $l$ も同じ $\lambda$ の固有値を与える点では同等の資格があるが独立な固有函数を与えない．それは (7.26) は $\nu$ の代りに $-\nu-1$ としても全然同じものしか与えないことから明らかである．それで $l=-1,-2,\cdots$ の方は考慮する必要がない．

(3) 第二解はさらに複雑であるが，$\xi^{-m}$ の程度に無限大になるもので問題にならない．

したがってその一般項には $(7.27)$ に対応して

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{(k+\nu+m)(k-\nu+m-1)}{k(k+m)}. \tag{7.34}$$

$\nu=n$: 正整数 のとき, $k=n-m+1$ で $a_k=0$ になる場合を除いて級数は有限項で切れることはなく十分 $k$ が大きいときは $k$ に対して $\nu$ を無視して

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}\approx\frac{k+m-1}{k}, \qquad k\gg 1 \tag{7.35}$$

となってこれまた $\xi\sim 1$ で $(7.33)$ が発散である. その発散の程度を考えると, これは $(1-\xi)^{-m}$ の程度であることがわかる. すなわち $(1-\xi)^{-m}$ の展開式

$$(1-\xi)^{-m}=1+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-m}{k}(-\xi)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!}\xi^k$$

から, その一般項の係数 $a_k, a_{k-1}$ の比は

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{k+m-1}{k} \tag{7.35a}$$

となって $(7.35)$ と一致するからである.

すなわち今度は $(7.29)$ の $u(\xi)$ が $\xi\sim 1$ でこのように $(1-\xi)^{-m}$ の程度で発散することが知れ, これに $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}=2^m\xi^{\frac{m}{2}}(1-\xi)^{\frac{m}{2}}$ からくる $(1-\xi)^{\frac{m}{2}}$ を考慮しても

$$\Theta(\xi)\sim(1-\xi)^{-\frac{m}{2}}$$

の程度で $\xi\to 1$ とともに発散する. すなわち $\nu\neq l$, $l$: 正整数 なる限り Legendre の陪方程式の有界な解はあり得ない.

すなわち“$\lambda=l(l+1)$, $l$: 0 または正整数 のみが特異性境界条件に対する固有値である”. この固有値に属する $(7.14)$ の固有函数は

$$\Theta(x)=P_l{}^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_l}{dx^m} \tag{7.36}$$

である.

ゆえに球面函数の偏微分方程式 $(7.6)$ の解が全球面上で一価連続であるためのパラメタ $\lambda$ の固有値は $(7.7)$ で与えられ, この固有値 $\lambda=l(l+1)$ に属する固有函数 $Y_l(\theta,\varphi)$ には

$$P_l(\cos\theta),\quad P_l{}^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\quad P_l{}^m(\cos\theta)e^{-im\varphi},\quad 0\leqq m\leqq l \tag{7.37}$$

の $2l+1$ 個が存在する.

量子力学の理論によれば, 原子の角運動量演算子を $\boldsymbol{L}$ とするとき $\boldsymbol{L}^2$ の固有値が $l(l+1)\hbar$ で与えられることは多くの読者の知る所であろう.

以下の問題は直接は §4 に続くものだが, 本編では都合上球面函数に関する事項はこの §7 で初めて論じたのでここにおいた. 第四章 §9 においてその結果を使うであろう.

問題 1〕 球面 $(0\leqq\theta\leqq\pi,\ -\pi\leqq\varphi\leqq\pi)$ 上で定義された完全直交函数系 $P_n^{|m|}(\cos\theta)$

$\cdot e^{im\varphi}$, $m=-n, -n+1, \cdots, 0, 1, \cdots, n$; $n=1,2,3,\cdots$ によって Fourier 式展開を行えば

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{nm}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{a}$$

$$C_{nm}=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta',\varphi')e^{-im\varphi'}P_n^{|m|}(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'. \tag{b}$$

また実数で書けば

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\{A_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_n{}^m(\cos\theta)\}, \tag{c}$$

$$\left.\begin{aligned}A_{n0}&=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta',\varphi')P_n(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi',\\ \begin{pmatrix}A_{nm}\\B_{nm}\end{pmatrix}&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\\ &\quad\times\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta',\varphi')P_n{}^m(\cos\theta')\begin{pmatrix}\cos m\varphi'\\ \sin m\varphi'\end{pmatrix}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'.\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

問題 2〕 正規直交系 $\Theta_n^{|m|}(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(\cos\theta)$, $\Phi_m(\varphi)=e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$ を使えば, $P_n(\cos\omega)$ を正規化した函数

$$D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\equiv\frac{2n+1}{4\pi}P_n(\cos\omega)=\sum_{m=-n}^{n}\Theta_n^{|m|}(\cos\theta)\Theta_n^{|m|}(\cos\theta')\Phi_m(\varphi)\Phi_m(\varphi')$$

は積分公式

$$\int\int_S Y_n(\theta,\varphi)D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=Y_n(\theta',\varphi')$$

を満足する. ここに $P_n(\cos\omega)$ は

$$P_n(\cos\omega)=\sum_{m=-n}^{n}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n^{|m|}(\cos\theta)P_n^{|m|}(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')}$$

$$=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

ただし $\cos\omega=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$

((I *10.58*) および (I *10.58* a) 参照).

(ヒント) $Y_n(\theta,\varphi)$ を $n$ 次の球面函数とするとき I, § *10.13* で示してあるように

$$\int\int Y_n(\theta,\varphi)P_n(\cos\omega)d\Omega=\frac{4\pi}{2n+1}Y_n(\theta',\varphi')$$

の関係が成り立つ. この式を変形せよ.

問題 3〕 問題 2 で定義した $D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')$ から作った函数

$$D(\theta,\varphi;\theta',\varphi')=\sum_{n=0}^{\infty}D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\Theta_n^{|m|}(\cos\theta)\Theta_n^{|m|}(\cos\theta')\Phi_m(\varphi)\overline{\Phi}_m(\varphi')$$

は球面上での $\delta$ 函数すなわち

$$f(\theta,\varphi)=\int\int D(\theta,\varphi;\theta',\varphi')f(\theta',\varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

の性質がある.

（ヒント）　問題2の正規直交系 $\Theta_n^{|m|}, \Phi_m$ を使えば，問題1の展開式 (a), (b) は

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}D_{nm}\Theta_n^{|m|}(\cos\theta)\Phi_m(\varphi),$$

$$D_{nm}=\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta',\varphi')\Theta_n^{|m|}(\cos\theta')\overline{\Phi}_m(\varphi)\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

とかける．これを変形せよ.

## §8　量子力学的 Kepler 問題の固有値問題 2　動径部分

角部分の特異性固有値問題が解けたから動径函数の特異性固有値問題の方に移る．ただし以下特に Coulomb 力によるポテンシアル $V(r)=\dfrac{-e^2}{r}$ の場合に限る．$\lambda$ の固有値は $l(l+1)$ と定まったから，(*7.5*) は

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left\{\varepsilon+\frac{2}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R=0,\qquad l=0,1,2,\cdots\tag{8.1}$$

と書ける．ただしここでは $m_0=1$, $\hbar=1$, $e=1$ のいわゆる原子単位を使って，また $\varepsilon=2E$ として簡単に書いた.

(*8.1*) で従属変数を $R$ から

$$W=rR\tag{8.2}$$

に移せば，$r, W$ に関して

$$\frac{d^2W}{dr^2}+\left\{\varepsilon+\frac{2}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}W=0\tag{8.3}$$

を得る.

(*8.3*) は §6 の場合と同様その主要部が因子分解できた

$$\begin{aligned}&\frac{d^2W}{dr^2}+\left\{\varepsilon+\frac{2}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}W\\&=\left\{\frac{d}{dr}+\frac{1}{l}-\frac{l}{r}\right\}\left\{\frac{d}{dr}-\frac{1}{l}+\frac{l}{r}\right\}W(r,l)+\left\{\varepsilon+\frac{1}{l^2}\right\}W(r,l)\\&=\left\{\frac{d}{dr}-\frac{1}{l+1}+\frac{l+1}{r}\right\}\left\{\frac{d}{dr}+\frac{1}{l+1}-\frac{l+1}{r}\right\}W(r,l)\\&\quad+\left\{\varepsilon+\frac{1}{(l+1)^2}\right\}W(r,l)=0\end{aligned}\tag{8.4}$$

の形に書くことができる.

$$\overset{(l)}{T}=\frac{d}{dr}+\frac{1}{l+1}-\frac{l+1}{r},\qquad \underset{(l)}{T}=\frac{d}{dr}-\frac{1}{l}+\frac{l}{r}\tag{8.5}$$

と書いてみれば§6と同様の考察からこれらがパラメタ $l$ に関して昇降演算子:

$$\overset{(l)}{T} W(r,l)=W(r,l+1), \quad \underset{(l)}{T} W(r,l)=W(r,l-1) \tag{8.6}$$

であることが結論される．ところが (8.4) は

$$\varepsilon=-\frac{1}{(l+1)^2} \tag{8.7}$$

の場合には，その解は一階方程式

$$\left\{\frac{d}{dr}+\frac{1}{l+1}-\frac{l+1}{r}\right\}W=0 \tag{8.8}$$

を解く問題に帰着されて

$$W(r)=r^{l+1}e^{-\frac{r}{l+1}} \tag{8.9}$$

という簡単な解の存在することがわかる．

微分方程式 (8.1) は $r=0$ に確定特異点，$r=\infty$ に不確定特異点を有し，その解は $r\to 0$ もしくは $r\to\infty$ としたとき一般には発散するが，解 (8.9) は $0\leqq r<\infty$ の全区間で一価連続（有界）の解になっている．これはパラメタ $\varepsilon$ が，特に (8.7) に選ばれたためで (8.7) が $\varepsilon$ の特性境界条件に対する固有値であることを示している．このように 1, 2, 3, … の値を有する正整数 $n=l+1$ に対し

$$\varepsilon=-\frac{1}{n^2}, \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{8.10}$$

がパラメタ $\varepsilon$ の固有値であることがわかった．物理的に $\varepsilon$ は電子のエネルギーを表わすから (8.10) はエネルギー固有値を与える関係になる．(8.9) は $\varepsilon$ の固有値が正整数 $n$ に対して (8.10) で与えられるとき，$l$ が 1 だけ小さい $l=n-1$ に対応する状態(1)の固有函数であるが，これに下降演算子 $\underset{(l)}{T}$ を作用させることにより $\varepsilon$ すなわち $n$ が不変で $l$ が 1 ずつ小さい値に相当する状態の固有函数が作られる．

一般に (8.9) から出発して同じ $n=l+1$ に属して $l$ の値の整数だけ小さい固有函数が作られてゆく．こうして $l=0$ に達すれば，それ以上 $l$ を下げて $l$ が負の整数の場合を考える必要はない．§7 の考察から同じ $\lambda$ の固有値を与える $-l-1$ は $l$ と全く同じ固有函数しか与えないからである．こうして作られる函数はすべて $e^{-\frac{r}{l+1}}$ の指数函数に $r$ の多項式がかかるだけで $r$ の全区間で

(1)　物理的にいえば，方位量子数 $l$ が主量子数 $n$ より 1 だけ小である状態．

一価連続の範囲を出ないから (*8.10*) の $\varepsilon$ の固有値に対して $l=n-1, n-2, \cdots, 1, 0$ の都合 $n$ 個の固有函数

$$W_{n,n-1}(r),\ W_{n,n-2}(r),\ \cdots,\ W_{n,l}(r),\ \cdots,\ W_{n,1}(r),\ W_{n,0}(r)$$

が得られる. (*8.9*) から

$$\int_0^{\infty}(r^n e^{-\frac{r}{n}})^2 dr = \left(\frac{n}{2}\right)^{2n+1}(2n)!$$

の関係があるから

$$W_{n,n-1}(r) = r^n e^{-\frac{r}{n}} \Big/ \left(\frac{n}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{(2n)!} \qquad (8.11)$$

をとれば, 正規化:

$$\| W_{n,n-1}(r) \|^2 \equiv (W_{n,n-1}(r), W_{n,n-1}(r)) = 1 \qquad (8.12)$$

されている.

(*8.10*) 以外に $\varepsilon$ の固有値は存在しないであろうか. $\varepsilon<0$ の場合には, §7 において調和振動子の固有値問題で論じた場合と全く同様な取扱いによって, これ以外にはあり得ないことがわかる.

(*8.3*) において独立変数を

$$\rho = 2\sqrt{-\varepsilon}\, r, \qquad \varepsilon<0 \qquad (8.13)$$

にかえれば, いわゆる **Whittaker の方程式**

$$\frac{d^2W}{d\rho^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{k}{\rho}-\frac{m^2-\frac{1}{4}}{\rho^2}\right\}W=0, \qquad k=1/\sqrt{-\varepsilon},\ m=l+\frac{1}{2} \qquad (8.14)$$

になる. さらに Whittaker の方程式 (*8.14*) は

$$W(z) = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{m+\frac{1}{2}} w \qquad (8.15)$$

の変換によって

$$\rho\frac{d^2w}{d\rho^2}+\{(2m+1)-\rho\}\frac{dw}{d\rho}-\left(m-k+\frac{1}{2}\right)w=0 \qquad (8.16)$$

に移される. (*8.16*) は §6 に論じた合流型超幾何方程式 (*6.15*) で

$$\alpha = m-k+\frac{1}{2}, \qquad \gamma = 2m+1 \qquad (8.17)$$

の場合である. したがって (*8.16*) の $\rho=0$ の近傍で正則な解は合流型超幾何函数を用いて

$$\begin{aligned} w_1(\rho) &= F\left(m-k+\frac{1}{2}; 2m+1; \rho\right) \\ &= 1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\left(m-k+\frac{1}{2}\right)\left(m-k+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(m-k+\frac{1}{2}+s-1\right)}{s!\,(2m+1)(2m+2)\cdots(2m+s)}\rho^s \end{aligned} \qquad (8.18)$$

で表わされる．もとの変数およびパラメタで書けば

$$w_1(r) = F(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon}; 2l+2; 2\sqrt{-\varepsilon}\, r), \tag{8.19}$$

したがって (8.14) の $r=0$ の近傍で正則な解として

$$U_1(r) = e^{-\sqrt{-\varepsilon}\, r}(2\sqrt{-\varepsilon}\, r)^{l+1}F(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon}; 2l+2; 2\sqrt{-\varepsilon}\, r) \tag{8.20}$$

が得られる．

上の因子分解法によって固有値であることを知った (8.10) の値は実は (8.20) に現れる合流型超幾何級数の分子が $l-1/\sqrt{-\varepsilon}+s$, $s=1,2,3,\cdots$ の因子を有するために，$\sqrt{-\varepsilon}=1/n$, $n$ は正整数 ならば与えられた正整数の組：$n$, $l \leqq n-1$ については十分大きな $s$ の整数値に対し分子が 0 となり，ここで級数が有限できれて多項式解を与える場合である．そうすれば前につく指数函数の項によって $\varepsilon<0$ なる限り (8.20) は無限遠まで有界になって特性境界値問題の固有函数となる．このような事情が起らない場合はどうなるか．$F(\alpha;\gamma;x)$ の漸近展開 (6.30) によれば，(8.20) は $r\to\infty$ で

$$F(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon}; 2l+2; 2\sqrt{-\varepsilon}\, r) \sim \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+1/\sqrt{-\varepsilon})}(-2\sqrt{-\varepsilon}\, r)^{(1/\sqrt{-\varepsilon})-l-1}$$

$$+\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon})}e^{2\sqrt{-\varepsilon}\, r}(2\sqrt{-\varepsilon}\, r)^{-(l+1+1/\sqrt{-\varepsilon})} \tag{8.21}$$

のように行動するから $\sqrt{-\varepsilon} \neq 1/n$ ならば $1/\Gamma(l+1-1/\sqrt{-\varepsilon})$ が 0 になることがないから必ず第二項の $e^{2\sqrt{-\varepsilon}\, r}$ のかかった項が残り[(1)]，(8.20) の前にかかる因子 $e^{-\sqrt{-\varepsilon}\, r}$ にもかかわらず $U_1(r)$ は $r\to\infty$ とともに結局 $e^{\sqrt{-\varepsilon}\, r}$ の程度で指数函数的に発散することが知れる．

したがって"$\varepsilon$ の固有値は $\varepsilon<0$ なる限り (8.10) 以外には存在し得ない"．

量子力学的 Kepler 問題の動径固有函数はしばしば **Laguerre 函数** $L_n^{(m)}$ を使って表わされている．それは

$$L_n^{(m)}(z) = \frac{d^m L_n(z)}{dz^m} = (-1)^m \frac{\{\Gamma(n+1)\}^2}{m!\,\Gamma(n-m+1)}F(-(n-m); m+1; z) \tag{8.22}$$

の関係で定義された合流型超幾何函数の一種である．ただし，いまは $n=$ 正整数のため級数は有限項できれる．

(8.22) の Laguerre 函数を使えば (8.2), (8.20) から動径函数 $R$ は (8.22) で $m\to 2l+1$, $n\to n+l$, $m-n\to l+1-n$ とした関係を用いて

$$R_{n,l}(\rho) = W_{n,l}(\rho)/\rho = (-1)^{2l+1}\frac{(2l+1)!\,(n-l-1)!}{\{(n+l)!\}^2}e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^l\cdot L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho),$$

$$\rho = 2r/n \tag{8.23}$$

---

(1) (8.19) の級数の $(\rho)^s=(2\sqrt{-\varepsilon}\, r)^s$ の係数 $a_s, a_{s-1}$ の比 $a_s/a_{s-1} = \dfrac{l-1/\sqrt{-\varepsilon}+s}{s(2l+2+s)} \sim \dfrac{1}{s}$ は $e^\rho = \sum_{s=0}^{\infty}\dfrac{\rho^s}{s!}$ の同じ比と漸近的に一致するから，この程度の項の漸近的存在は (8.21) をまたずとも確かである．

と書ける[(1)].

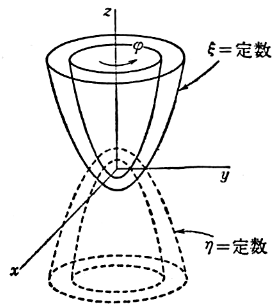
## §9　量子力学的 Kepler 問題の固有値問題 3　回転放物面座標による変数分離，連続スペクトル

量子力学的 Kepler 問題に関する Schrödinger の方程式 (8.1) は回転放物面座標 $(\xi, \eta, \varphi)$ を用いても変数分離が可能である (第9.1図)．変換

$$x = \xi\eta\cos\varphi, \quad y = \xi\eta\sin\varphi, \quad z = (\xi^2-\eta^2)/2 \qquad (9.1)$$

によって線素

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2+dy^2+dz^2 \\ &= (\xi^2+\eta^2)(d\xi^2+d\eta^2)+\xi^2\eta^2 d\varphi^2 \end{aligned} \qquad (9.2)$$



第 9.1 図

の関係があり，原点から $(x, y, z)$ への距離 $r$ は

$$r = (\xi^2+\eta^2)/2 \qquad (9.3)$$

と表わされる．その結果 (2.47) で $g_1 = g_2 = (\xi^2+\eta^2)$, $\rho = \xi\eta$ とおいて

$$\nabla^2\psi \equiv \frac{1}{(\xi^2+\eta^2)}\left\{\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right\} \qquad (9.4)$$

の関係が得られる．したがって (7.1) の解で，$z$ 軸の周りの方位角 $\varphi$ に関して

$$\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$$

の周期性をもつ解は

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}, \qquad m: \text{正整数} \qquad (9.5)$$

となって (9.4) で $\psi(\xi, \eta, \varphi) = \Psi(\xi, \eta)e^{\pm im\varphi}$ とおくと，$\Psi$ は偏微分方程式

$$\begin{aligned} &\frac{\hbar^2}{2m_0}\left\{\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)\right\} \\ &\qquad +\left\{\left(E+\frac{2e^2}{\xi^2+\eta^2}\right)(\xi^2+\eta^2)-\frac{\hbar^2}{2m_0}m^2\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\right\}\Psi = 0 \end{aligned} \qquad (9.6)$$

を満足しなければならない．いま $\hbar = 1$, $m_0 = 1$, $e = 1$ の単位を用い，この方程式をさらに

---

(1)　$m = l+\frac{1}{2}$, $k = n =$ 正整数 だから (8.16) はこの場合

$$\rho\frac{d^2w}{d\rho^2}+\{(2l+1+1)-\rho\}\frac{dw}{d\rho}+(n+l-2l-1)w = 0$$

となり (4.5) の Laguerre の方程式で $\lambda = n \to n+l$, $m \to 2l+1$ の場合であるから $L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)$ が現われるのは当然である．

$$\Psi(\xi,\eta)=X(\xi)Y(\eta)$$

と変数分離を仮定して $X, Y$ の満足すべき常微分方程式を求めると，分離パラメタを $\lambda$ として，$\varepsilon=2E$ とおいて

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dX}{d\xi}\right)+\left\{\lambda+2+\varepsilon\xi^2-\frac{m^2}{\xi^2}\right\}X=0, \tag{9.7}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dY}{d\eta}\right)+\left\{-\lambda+2+\varepsilon\eta^2-\frac{m^2}{\eta^2}\right\}Y=0 \tag{9.7'}$$

が得られる．

$$\xi^2/2=\rho_\xi,\quad \eta^2/2=\rho_\eta,\quad \xi\,d\xi=d\rho_\xi,\quad \eta\,d\eta=d\rho_\eta \tag{9.8}$$

を新独立変数に使うと

$$\frac{d^2X}{d\rho_\xi^{\,2}}+\frac{1}{\rho_\xi}\frac{dX}{d\rho_\xi}+\left\{\varepsilon+\frac{\lambda/2+1}{\rho_\xi}-\frac{m^2/4}{\rho_\xi^{\,2}}\right\}X=0, \tag{9.9}$$

$$\frac{d^2Y}{d\rho_\eta^{\,2}}+\frac{1}{\rho_\eta}\frac{dY}{d\rho_\eta}+\left\{\varepsilon+\frac{-\lambda/2+1}{\rho_\eta}-\frac{m^2/4}{\rho_\eta^{\,2}}\right\}Y=0 \tag{9.9'}$$

と書ける．

いま $\varepsilon<0$ の場合を考え

$$\varepsilon=-\nu^2/4,\quad \nu\begin{pmatrix}\rho_\xi\\ \rho_\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{9.10}$$

と選べば (9.9) は

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dX}{dx}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\lambda/2+1}{\nu}\frac{1}{x}-\frac{m^2/4}{x^2}\right\}X=0, \tag{9.11}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{dY}{dy}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{-\lambda/2+1}{\nu}\frac{1}{y}-\frac{m^2/4}{y^2}\right\}Y=0. \tag{9.11'}$$

さらに

$$X=W/\sqrt{x}\quad \text{または}\quad Y=W/\sqrt{y} \tag{9.12}$$

と従属変数をかえれば (9.11), (9.11') はともに Whittaker の方程式

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{z}-\frac{m^2/4-1/4}{z^2}\right\}W=0 \tag{9.13}$$

に移される．ただし (9.11) に対応しては

$$z=x=\nu\rho_\xi,\quad \kappa=\kappa_\xi=\{(\lambda/2)+1)\}/\nu. \tag{9.14}$$

(9.11') に対応しては

$$z=y=\nu\rho_\eta,\quad \kappa=\kappa_\eta=\{-(\lambda/2)+1\}/\nu \tag{9.14'}$$

をとるものとする．§8 で知ったように (9.13) の $x=0$ の近傍で正則な解は (8.15)〜(8.18) により

$$W_1(z)=e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+1}{2}}F\left(\frac{m+1}{2}-\kappa;m+1;z\right), \tag{9.15}$$

したがって

$$X_1(z)=e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m}{2}}F\left(\frac{m+1}{2}-\kappa;m+1;z\right) \tag{9.15a}$$

で与えられる．故に §8 のと同様にして (9.15a) が $z=\infty$ で有界であるためには $\dfrac{m+1}{2}-\kappa=-n,\ n=0,1,2,\cdots$ でなければならぬことが結論される．

ゆえに (9.14) の特異性固有値としては

$$\kappa_\xi=n_\xi+\frac{m+1}{2},\qquad n_\xi=0,1,2,\cdots \tag{9.16}$$

と定まる．全く同様に (9.14′) に対しては

$$\kappa_\eta=n_\eta+\frac{m+1}{2},\qquad n_\eta=0,1,2,\cdots \tag{9.16′}$$

であることが結論される．(9.14), (9.14′) により $2/\nu=\kappa_\xi+\kappa_\eta$，従って (9.16), (9.16′) の和を作れば

$$\frac{2}{\nu}=\kappa_\xi+\kappa_\eta=n_\xi+n_\eta+m+1=n. \tag{9.17}$$

$n_\xi, n_\eta, m$ がいずれも 0 または正の整数であることから $n$ は $n=1,2,3,\cdots$ の正整数である．(9.10), (9.17) から

$$\sqrt{-\varepsilon}=\frac{\nu}{2}=\frac{1}{n},\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{9.18}$$

が得られ，エネルギー固有値に関して (8.10) で得た結果と一致することが知れる．

また (9.16), (9.16′) の差を作れば

$$\frac{1}{2}\lambda=\frac{\nu}{2}(n_\xi-n_\eta)=\frac{n_\xi-n_\eta}{n} \tag{9.19}$$

であることがわかる．

これらの固有値に対応する固有函数としては (9.15) に (9.16) とおいて，さらに (8.22) により Laguerre 函数をもって表わせば，$\kappa_\xi=n_\xi+\dfrac{m+1}{2}$ に対しては

$$X_{n_\xi,m}(\rho_\xi)=e^{-\nu\frac{\rho_\xi}{2}}\rho_\xi^{m/2}L^{(m)}_{n_\xi+m}(\nu\rho_\xi), \tag{9.20}$$

あるいは

$$X_{n_\xi,m}(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2n}}\xi^m\frac{L^{(m)}_{n_\xi+m}\left(\dfrac{\xi^2}{n}\right)}{\Gamma(n_\xi+1)}. \tag{9.21}$$

同様に，$\kappa_\eta=n_\eta+\dfrac{m+1}{2}$ に対しては

$$Y_{n_\eta,m}(\eta)=e^{-\frac{\eta^2}{2n}}\eta^m\frac{L^{(m)}_{n_\eta+m}\left(\dfrac{\eta^2}{n}\right)}{\Gamma(n_\eta+1)}. \tag{9.21′}$$

結局，全体の固有函数は

$$\psi_{n_\xi, n_\eta, m}(\xi, \eta, \varphi) = e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2n}}(\xi\eta)^m \frac{L_{n_\xi+m}^{(m)}\left(\frac{\xi^2}{n}\right)}{\Gamma(n_\xi+1)} \frac{L_{n_\eta+m}^{(m)}\left(\frac{\eta^2}{n}\right)}{\Gamma(n_\eta+1)} e^{\pm im\varphi}, \qquad (9.22)$$

$$n = n_\xi + n_\eta + m + 1.$$

特に $z$ 軸の周りに完全に対称である解は $m=0$ の場合で

$$\psi_{n_\xi, n_\eta}(\xi, \eta) = e^{-\frac{(\xi^2+\eta^2)}{2n}} L_{n_\xi}\left(\frac{\xi^2}{n}\right) L_{n_\eta}\left(\frac{\eta^2}{n}\right) \Big/ \Gamma(n_\xi+1)\Gamma(n_\eta+1)$$

$$= e^{-\frac{r}{n}} L_{n_\xi}\left(\frac{\xi^2}{n}\right) L_{n_\eta}\left(\frac{\eta^2}{n}\right) \Big/ \Gamma(n_\xi+1)\Gamma(n_\eta+1). \qquad (9.23)$$

いままでは負のエネルギーの場合ばかり考えていた．その結果許されるエネルギーの固有値は

$$\sqrt{-\varepsilon} = 1/n$$

だけが許されたが"$\varepsilon>0$ の場合には勝手な $\varepsilon$ の値が特異性境界条件を満足し，いわゆる**連続固有値**が現われる"．$\varepsilon>0$ の場合には (*9.10*) で定義された $\nu$ は純虚数になるから，これを (*9.18*) の代りに

$$\nu/2 = ik = 1/n \qquad (9.24)$$

とすれば $k$ は実数である．その結果たとえば $X(\rho_\xi)$ は (*9.21*) の実変数の Laguerre 函数の代りに純虚数の変数になって

$$X_{n_\xi, m}(\xi) = e^{-ik(\xi^2/2)}\xi^m L_{n_\xi+m}^{(m)}(ik\xi^2) \qquad (9.25)$$

が現われる．

同様に

$$Y_{n_\eta, m}(\eta) = e^{-ik(\eta^2/2)}\eta^m L_{n_\eta+m}^{(m)}(ik\eta^2), \qquad (9.25')$$

したがって全体の固有函数は

$$\psi_{n_\xi, n_\eta, m}(\xi, \eta, \varphi) = e^{-ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}(\xi\eta)^m L_{n_\xi+m}^{(m)}(ik\xi^2) L_{n_\eta+m}^{(m)}(ik\eta^2) e^{\pm im\varphi}. \qquad (9.26)$$

このように純虚数の Laguerre の函数は無限遠で有界であるために級数が有限項でとまる必要は全くない．すなわち (*8.22*) により Laguerre の函数 $L_n{}^m(z)$ は $z$ が有界ならば有界であるところの $F(-(n-m); m+1; z)$ で表わされ，その無限遠近傍では (*6.30*) を用いて得られる漸近展開式

$$F(-(n-m); m+1; ix) \sim \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}(-ix)^{(n-m)}$$

$$+ \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(-(n-m))} e^{ix}(ix)^{-n-1} \qquad (9.27)$$

から明らかなように $|e^{ix}|=1$ のために指数函数的に発散するというようなことは起らない．また $n$ が純虚数ならば $|(x)^{\pm n}|=|e^{\pm n\log x}|=1$ であって無限遠点の近傍で有界である．この結果 $\varepsilon<0$ の場合と全く事情が異なって $\varepsilon>0$ の場合には特異性境界条件は $\varepsilon$ の値に何の制限も加えずエネルギーは $\varepsilon>0$ なる限り連続的に勝手の値が許され，いわゆる連続固有値が現われる．

$\varepsilon>0$ に属する場合で物理的に興味のある特殊の場合を少し調べよう．

特に $z$ 軸の周りに回転対称な解では，(9.23) から

$$\psi_{n_\xi,n_\eta}(\xi,\eta)=e^{-ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}L_{n_\xi}(ik\xi^2)L_{n_\eta}(ik\eta^2)/\Gamma(n_\xi+1)\Gamma(n_\eta+1). \tag{9.28}$$

(9.17), (9.24) より

$$n_\xi+n_\eta+1=n=-i/k$$

の関係があるから $n_\xi, n_\eta$ は同時に実数にはなれず $\Re(n_\xi+n_\eta)=-1$, 特殊の場合として $n_\xi=-1$ の場合を考えてみる．すると，$n_\eta=n=-i/k$.

まず

$$n_\eta=n=-i/k \tag{9.29}$$

の場合には，(8.22) から

$$L_{n_\eta}(ik\eta^2)=\Gamma(n_\eta+1)F(-n_\eta;1;ik\eta^2), \tag{9.30}$$

したがって，(9.27) から

$$L_{n_\eta}(ik\eta^2)/\Gamma(n_\eta+1)\sim\left\{\frac{1}{\Gamma(1+n_\eta)}(-ik\eta^2)^{n_\eta}+\frac{1}{\Gamma(-n_\eta)}e^{ik\eta^2}(ik\eta^2)^{-n_\eta-1}\right\}. \tag{9.31}$$

一方

$$n_\xi=-1$$

の特殊の場合には

$$\lim_{n_\xi\to-1}L_{n_\xi,0}(ik\xi^2)/\Gamma(n_\xi+1)=F(1;1;ik\xi^2)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(ik\xi^2)^s}{s!}=e^{ik\xi^2}, \tag{9.32}$$

$$\therefore\quad \psi_{-1,n_\eta}(\xi,\eta)\sim e^{ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}e^{ik\xi^2}\left\{\frac{(-ik\eta^2)^{n_\eta}}{\Gamma(1+n_\eta)}-\frac{n_\eta}{(-n_\eta)\Gamma(-n_\eta)}e^{ik\eta^2}(ik\eta^2)^{-n_\eta-1}\right\}$$

$$=e^{ik\frac{\xi^2-\eta^2}{2}}\left\{\frac{(-ik\eta^2)^{n_\eta}}{\Gamma(1+n_\eta)}+in_\eta\frac{(ik\eta^2)^{-n_\eta}}{\Gamma(1-n_\eta)}\frac{e^{ik\eta^2}}{k\eta^2}\right\}. \tag{9.33}$$

(9.1) によれば第一項は $e^{ikz}$ に比例し，また第二項は (9.3) により $e^{ikr}/r$ に比例するものであることがわかる．これを

$$\psi_{-1,n_\eta}(\xi,\eta)\sim C_1e^{ikz}+C_2\frac{e^{ikr}}{r} \tag{9.34}$$

と書けば，係数 $C_1, C_2$ はそれぞれ

$$C_1=(-ik\eta^2)^{n_\eta}/\Gamma(1+n_\eta),\ C_2=\frac{in_\eta}{k}(ik\eta^2)^{-n_\eta}/\Gamma(1-n_\eta)(1-\cos\theta)^{(1)}. \tag{9.35}$$

(1) (9.1), (9.8) から $\eta^2=r-z=r(1-\cos\theta)$.

(9.29) により $n_\eta$ は純虚数 $-i/k$ で与えられるから

$$C_1=\frac{(-ik\eta^2)^{-i/k}}{\Gamma(1-i/k)},\tag{9.36}$$

$$C_2=\frac{1}{k^2}\frac{(ik\eta^2)^{i/k}}{\Gamma(1+i/k)}\frac{1}{(1-\cos\theta)}=\frac{\overline{C_1}}{k^2(1-\cos\theta)}.\tag{9.36'}$$

(9.34) の解に時間項 $e^{-i\omega t}$ を配して考えれば，"第一項は時間とともに $z$ の増す方向に進行する平面波を表わすのに対し第二項は同様に $r$ の増す方向に進む射出球面波を表わしている". (9.34) のような漸近的形を有している定常解が存在しているということは"強度 $C_1$ の平面波の形で $z$ の正の方向に進む波が Coulomb 力場により散乱されてその強度が" (9.36), (9.36′) からわかるように "$1/k^2(1-\cos\theta)$ 倍された分布を有している" ことを示す．この形は Rutherford の公式としてよく知られている衝突断面が $1/k^4(1-\cos\theta)^2$ に比例する結果に導く．

# 第 3 章　Green 函数と境界値問題

偏微分方程式の境界値問題を解くのに用いられる有力の方法として Green 函数の方法がある．これに関しては I，第 14 章に一般的解説が与えられているが，量子力学における Dirac の研究で $\delta$ 函数と称するものが導入されてから，Green 函数をこの $\delta$ 函数を用いて定義する新しい方法が現われ近時応用方面の文献ではこの線に沿って取り扱われることが多い．それで以下の取扱いでも専らこの方法によることにする．

この方法は厳格にはやかましい取扱いと長い計算を経て得られる結果を形式的に簡単に導き得るところに実用的長所があるが，$\delta$ 函数そのものは古典的函数概念に立っては明確な意味を有しないもので，その現代数学的基礎付けは難解な超函数 (distribution) の理論によって始めて与えられたものである．この意味で新しい方法を一般的に数学的厳正に解説することは本書の性質から望まれない．それで本章では常微分方程式の場合の一二の重要な代表例について I に従って解を求め，これを新しい方法によって形式的簡単に同じ結果が得られることを示す．そしてその形式的取扱いが超函数の考え方により基礎付けられている事情を説明する．このために超函数としての $\delta$ 函数の考え方を解説するが，超函数の一般理論を述べる心算はない．一般的な超函数というものの正確な定義さえ (収束に関する点に困難があるので) 述べないのもそのためである．

基礎付けに関することは主として常微分方程式の範囲に限られている．偏微分方程式に進んでは専ら簡便と実用性の見地から厳密性は犠牲にして紙数の許す範囲でなるべく種々の問題に新しい方法がどんな形で適用されるかを示すことに重点をおいて解説した．

## §1　Heaviside の階段函数，Dirac の $\delta$ 函数

**1)　Heaviside の函数 $Y(x, \xi)$，Dirac の $\delta$ 函数 $\delta(x)$**　本論に入るに先だち計算の具として常用する Heaviside の階段函数および Dirac の $\delta$ 函数に関して述べる．

次の表式で与えられる函数 $Y_\varepsilon(x, \xi)$ に着目しよう．

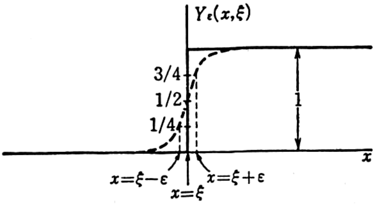
$$Y_\varepsilon(x, \xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(x-\xi)^2} dx = \frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{x-\xi}{\varepsilon}+\frac{\pi}{2}\right\}. \qquad (1.1)$$

$\xi$ を与えられた定数としこれに対し $\varepsilon$ は $0<\varepsilon\ll 1$ なるパラメタと考えれば，$x$ の函数としての $Y_\varepsilon(x, \xi)$ のグラフは第 1.1 図に破線で示した曲線として与えられる．

従って $Y_\varepsilon(x, \xi)$ のグラフは与えられた小さい正の数 $\varepsilon$ に対して $x=\xi$ の近傍で急激に 0 から 1 の値に上昇する一本の曲線であって $\varepsilon\to 0$ の極限では

$$Y(x,\xi)=\begin{cases}0, & x<\xi,\\ 1, & \xi<x\end{cases} \tag{1.2}$$

という式で書かれ，$x=\xi$ で不連続的に 0 から 1 に跳び上る第 1.1 図に実線で示した函数にいくらでも近づく（第 1.1 図の下の説明参照）．函数 $Y(x,\xi)$ は Heaviside の階段函数と呼ばれている．




第 1.1 図 $Y_\varepsilon(x,\xi)=\frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{x-\xi}{\varepsilon}+\frac{\pi}{2}\right\}$

$0<\varepsilon\ll1$ だと，$x<\xi$ なら $\tan^{-1}\frac{x-\xi}{\varepsilon}\sim-\frac{\pi}{2}$ であるから $Y_\varepsilon(x,\xi)\sim0$ であり，$\xi<x$ なら $\tan^{-1}\frac{x-\xi}{\varepsilon}\sim\frac{\pi}{2}$ であるから $Y_\varepsilon(x,\xi)\sim1$ であるから，$\varepsilon$ が小さければ小さいほど $x=\xi$ の極めて近傍の外は $x<\xi$ ではほとんど 0，$x>\xi$ ではほとんど 1 で，これに反し $x=\xi$ では $Y_\varepsilon(\xi,\xi)=1/2$，$x=\xi\mp\varepsilon$ ではそれぞれ $Y_\varepsilon(\xi-\varepsilon,\xi)=1/4$，$Y_\varepsilon(\xi+\varepsilon,\xi)=3/4$ である．

$Y_\varepsilon(x,\xi)$ の $x$ に関する導函数を

$$\delta_\varepsilon(x-\xi)=\frac{dY_\varepsilon(x,\xi)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(x-\xi)^2} \tag{1.3}$$

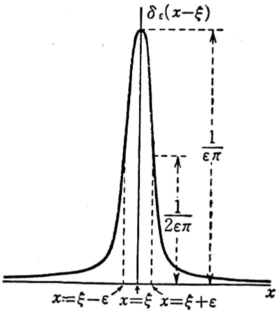
と表わすと，そのグラフは第 1.2 図に示したような曲線で与えられる（第 1.2 図の下の説明参照）．この曲線は $\varepsilon\to0$ とともに $x\neq\xi$ では到る所 0，これに反し $x=\xi$ では $\infty$ となり，非常に特異性の強い不連続性を示すことになる．Dirac は

(i) $\delta(x-\xi)=0,\quad x\neq\xi,$ (1.4)

(ii) $\delta(x-\xi)=\infty,\quad x=\xi,$ (1.5)

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)dx=1$ (1.6)

の性質を持つものを δ 函数と呼んだが，われわれが上に考えた $\delta_\varepsilon(x-\xi)$ の $\varepsilon\to0$ の極限はそのような性質をもつと考えることができる．すなわち $\varepsilon\to0$ とともに $x\neq\xi$ では $\delta_\varepsilon(x-\xi)\to0$，$x=\xi$ では $\delta_\varepsilon(x-\xi)\to\infty$ の性質はちょうど上述 $\delta(x-\xi)$ の性質 (i), (ii) である．また (1.1), (1.3) から




第 1.2 図

$\delta_\varepsilon(x-\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(x-\xi)^2}$

$|x-\xi|\sim1$ においては $\delta_\varepsilon(x-\xi)=(\varepsilon/\pi)$ であるに対し，$x=\xi$ では $\delta_\varepsilon(x-\xi)=1/(\varepsilon\pi)$，$x=\xi\pm\varepsilon$ では $\delta_\varepsilon(x\pm\xi)=1/(2\varepsilon\pi)$ からわかるように $x=\xi$ の近傍のみで圧倒的に大きくこれから左右に急激に減小する．

$$\int_{-\infty}^{x}\delta_\varepsilon(x-\xi)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(x-\xi)^2}dx=Y_\varepsilon(x,\xi) \tag{1.7}$$

が成り立つが，$Y_\varepsilon(x,\xi)$ は上にしらべたように $\varepsilon\to 0$ とともに $x<\xi$ なら $Y_\varepsilon(x,\xi)\sim 0$, $\xi<x$ なら $Y_\varepsilon(x,\xi)\sim 1$ が成り立ち $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x-\xi)\,dx=1$. すなわち (*1.3*) の $\delta_\varepsilon(x-\xi)$ が (iii) の性質を極限においても保つものとするならば，上のような連続函数 $\delta_\varepsilon(x-\xi)$ の極限として $\delta$ 函数を考えることができる.

$\delta$ 函数の性質 (i), (ii), (iii) から区間 $[a,b]$, $a<b$ で積分したとき

$$\int_a^b \delta(x-\xi)\,dx=\begin{cases}0, & \xi<a \quad \text{または} \quad b<\xi,\\ 1, & a<\xi<b\end{cases} \tag{1.8}$$

が成り立つことになる．すなわち，$\delta$ 函数はその不連続点 $x=\xi$ を含まないような任意の区間 $[a,b]$ で積分しても 0 であるが，$x=\xi$ を含む任意の小区間 $[a,b]$ で積分すれば 1 となる.

(1.4)～(1.6) で定義されたいわゆる $\delta$ 函数なるもの及びまた (*1.8*) の性質をもつような積分は古典的函数の概念に立ってはその存在は考えられない．ただし物理的には次のような描像を脳裏に画くことが可能である．すなわち $\rho(x-\xi)$ を $x=\xi$ の近傍である連続な分布をしている電荷（もしくは質量）の密度と考え，その全電荷（もしくは全質量）を 1 として $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x-\xi)dx=1$ を満たすものと考えよう．上に考えた $\delta_\varepsilon(x-\xi)$ はそのような一つの実例である．そこで連続分布をしていた電荷（もしくは質量）がただ一点 $x=\xi$ に集中して点電荷（質点）に移行したとすれば，$x=\xi$ での密度は無限大となり $x=\xi$ 以外では到る所 0 であってしかも全電荷（全質量）は 1 である．このような点電荷（または質点）は物理的に $\delta(x-\xi)$ の描像を与えることになる(1).

なお $\delta$ 函数は性質 (i)～(iii) の結果として，$\varphi(x)$ が連続函数であるとき

(iv)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta(x-\xi)\,dx=\int_{\xi-0}^{\xi+0}\varphi(x)\,\delta(x-\xi)\,dx=\varphi(\xi) \tag{1.9}$$

を満足するものとされている(2)．あるいは (1.9) で $\xi=0$ とおけば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta(x)\,dx=\varphi(0). \tag{1.9a}$$

(*1.9*) または (*1.9*a) はいわゆる $\delta$ 函数がもつ最も基礎的な性質を表わしているもので，後述の超函数による $\delta$ 函数の基礎付けの見地からみても，勝手な $\varphi$ に対してこの関係式を成立させるようなものとして $\delta$ 函数を定義することが最も自然なものであることがわかる．その意味で (*1.9*) または (*1.9*a) は $\delta$ 函数の満足する函数方程式と呼んで然るべきものである．§5 において $\delta$ 函数の

(1) この考え方を数学的に定式化するとき測度という概念が生れる．後述 Dirac の測度（75 頁）参照.

(2) この考係式は形式的には，$\delta$ の代りに連続函数 $\delta_\varepsilon$ でおきかえ積分に関する平均値の定理を使って得られる式で $\varepsilon\to 0$ の極限をとることによって容易に導かれる.

表示式として求めておいた $(4.17)\sim(4.19')$, $(5.4)\sim(5.13)$ などの諸式はすべて函数方程式 $(1.9)$ を満足するように定めたものである.

$(1.9)$ の $x, \xi$ の代りに $-x, -\xi$ とおきかえ $\varphi(-x)=\psi(x)$ と書けば $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,\delta(\xi-x)\,dx=\psi(\xi)$ の関係が得られる. 従って $\delta(x-\xi)$ とともに $\delta(\xi-x)$ も同じ $(1.9)$ の関係を満足することが知れる. これと $(1.6)$ とから $\delta(\xi-x)\equiv\delta(x-\xi)$ いいかえれば $\delta$ 函数はその変数に関して偶函数: $\delta(-x)=\delta(x)$ の性質をもっているものと定めてよいことが知れる.

$(1.3)$ でみた $Y_\varepsilon(x-\xi)$ の導函数が $\delta_\varepsilon(x-\xi)$ であるという関係が $\varepsilon\to 0$ にしても成り立つと考えれば

$$\delta(x-\xi)=\frac{dY(x,\xi)}{dx}, \tag{1.10}$$

あるいは $Y(x,\xi)\equiv Y(x-\xi)$ であるから, $x-\xi$ の代りに $x$ と書いて

$$\delta(x)=\frac{dY(x)}{dx} \tag{1.10a}$$

という関係式が得られる.

$(1.9)\sim(1.9\text{a})$, $(1.10)\sim(1.10\text{a})$ の関係は直観的には不自然なものではなく Dirac (1926) 以来いわゆる $\delta$ 函数を用いる取扱いにおいて常用される関係であるが, 古典的函数の概念に立っては明確な意味をもち得ないものである.

2) **Laplacian と $\delta$ 函数** $(1.10)$ すなわち

$$Y'(x,\xi)=\delta(x-\xi) \tag{1.10'}$$

の形式的関係と函数

$$X(x,\xi)=\begin{cases}0, & x\leqq\xi,\\ x-\xi, & \xi\leqq x\end{cases} \tag{1.11}$$

の導函数は Heaviside 函数 $Y(x,\xi)$ に等しい: $X'(x,\xi)=Y(x,\xi)$ ということを使えば $(1.11)$ の $X(x,\xi)$ が二階の特異性微分方程式

$$X''(x,\xi)=\delta(x-\xi) \tag{1.12}$$

を満たすことが形式的に導かれる. $\delta$ 函数を用いる取扱いで常用される表現に従えば $(1.11)$ が特異性微分方程式の解である. 逆に発散積分を適当に解釈することによって

$$\int_{x_0}^{x_1}X''(x,\xi)\,dx=\begin{cases}0, & x_1<\xi \text{ または } \xi<x_0, & (1.13\text{a})\\ 1, & x_0<\xi<x_1 & (1.13\text{b})\end{cases}$$

の関係式を形式的に導き出すことができる.

$(1.13\text{a})$ の方は問題なく成立する. $x\lessgtr\xi$ いずれの区域でも $X''(x,\xi)=0$ が恒等的に成立するからである. 一方 $(1.13\text{b})$ の方は $X''(x,\xi)$ が $x=\xi$ で無限大の不連続性をもちこの積分は意味が不明であるから, 厳格にはこれ以上議論を進めることができない. しかし, 今 $x=\xi$ に特異性のない例えば連続である場合に成立する関係

$$\int_{x_0}^{x_1} U''(x)\,dx = U'(x_1) - U'(x_0) \qquad (1.14)$$

において $U(x)\to X(x,\xi)$ とおきかえて積分 $\int_{x_0}^{x_1} X''(x,\xi)\,dx$, $x_0<\xi<x_1$ の代りに右辺の相当式 $X'(x_1,\xi)-X'(x_0,\xi)$, $x_0<\xi<x_1$ で置き換えて解釈することにすると, $X'(x_1,\xi)=Y(x_1,\xi)=1$, $\xi<x_1$, $X'(x_0,\xi)=Y(x_0,\xi)=0$, $x_0<\xi$ であることから (*1.13* b) が得られる. 同様の形式的計算が2次元, 3次元の場合にも, 以下の例題で示すように行われる.

例題 1〕 平面内の一点 Q から与えられた閉曲線 C 上の一点 Rまでの距離を $r_{RQ}$ とし R 点での外向き法線を $n_R$ とするとき

$$\oint_C \frac{\partial}{\partial n_R}\left\{-\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r_{RQ}}\right)\right\} ds_R = \begin{cases} 0, & Q \notin D, \qquad (1.15\text{a}) \\ 1, & Q \in D, \qquad (1.15\text{b}) \end{cases}$$

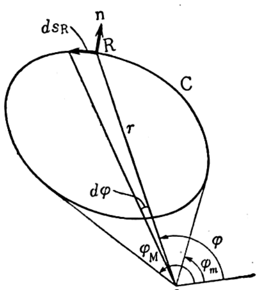
ただし D は閉曲線 C で囲まれた二次元区域である. すなわち Q 点が閉曲線 C の外にあるか内にあるかで (*1.15*) の左辺の曲線積分は 0 または 1 の値をとる.

$$\frac{\partial}{\partial n}\log r = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})}{r}, \quad \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\,ds = r\,d\varphi \qquad (1.16)$$

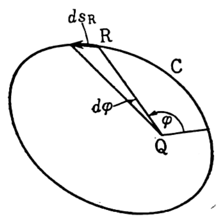
の関係があるから

$$\oint_C \frac{\partial}{\partial n_R}(\log r_{RQ})\,ds_R = \oint_C d\varphi \qquad (1.17)$$

第 1.3 図の場合のように Q 点が C の外にあれば, 右辺は R が C 上を一周するとき $\varphi$ が $\varphi_m$ から $\varphi_M$ の間を往復して元の値に戻るだけであるから0, 第 1.4 図の場合のように内部にあれば, $\varphi$ から $2\pi$ まで増加するから $2\pi$, 従って (*1.15*) が得られる.



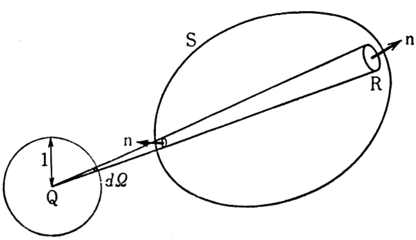

第 1.3 図



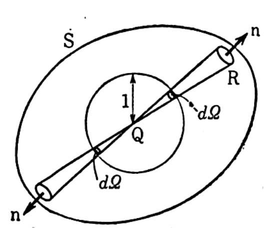

第 1.4 図

例題 2〕 空間の一点 Q から与えられた閉曲面 S 上の一点までの距離を $r_{RQ}$ とし, P における曲面の外向きの法線を $n_R$ とする

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n_R}\left(\frac{-1}{4\pi r_{RQ}}\right) d\sigma_R = \begin{cases} 0, & Q \notin V \qquad (1.18\text{a}) \\ 1, & Q \in V \qquad (1.18\text{b}) \end{cases}$$




第 1.5 図




第 1.6 図

ただし V は閉曲面 S で囲まれた体積とする．すなわち Q 点が S の外部にあるか内部にあるかで左辺の表面積分は 0 または 1.

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\boldsymbol{n}, \nabla\frac{1}{r}\right)$$

$$=-\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})}{r^2}, \tag{1.19}$$

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\,d\sigma=r^2\,d\Omega, \quad d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{1.20}$$

$$\therefore \quad \int\!\!\int_S \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{-1}{r_{PQ}}\right)d\sigma_P=\int\!\!\int_S d\Omega. \tag{1.21}$$

ここに $d\Omega$ は $d\sigma_R$ の Q に対して張る立体角すなわち Q を中心とする半径 1 の球面への射影であって，図 1.5 のように Q が S 外にあれば $d\Omega$ は 0 から $\Omega_M$ まで増加するが再び減じて $d\sigma_R$ が全閉曲面 S 上を一巡すると 0 となり，これに対し第 1.6 図のように S 内にあれば $\int\!\!\int_S d\Omega=\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=4\pi$，これから (*1.18*) が得られる．

例題 3〕 $\nabla_P{}^2\left(\frac{-1}{4\pi r_{PQ}}\right)=\delta(P,Q)$ なることを示せ．ただし $\nabla_P{}^2$ は P 点の座標 $x,y,z$ に関する Laplacian $\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ の略記号で，$\delta(P,Q)\equiv\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)$ は三次元の $\delta$ 函数を意味する．

三次元空間での二点 $P(x,y,z)$ と $Q(\xi,\eta,\zeta)$ の距離 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ の逆数 $1/r$ は，$x,y,z$ の函数と考えたとき Laplace の方程式

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=0 \tag{1.22}$$

を満足することは周知のことである．このことは P, Q の距離が 0 に近づけば $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$ は高次の無限大となり (*1.22*) は成り立たなくなる．そして (*1.12*) に対する三次元の類同である特性微分方程式で表わされる関係

$$\nabla_P{}^2\left(\frac{-1}{4\pi r_{PQ}}\right)=\delta(P,Q) \tag{1.23}$$

が得られる．

また (*1.14*) の類似の解釈を下すことによって

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \nabla_P{}^2\left(\frac{-1}{4\pi r_{PQ}}\right)d\tau_P=\begin{cases}0, & Q\notin V, \quad (1.24\text{a})\\ 1, & Q\in V \quad (1.24\text{b})\end{cases}$$

の関係を導くことができる．

(*1.24* a) は明かである．$Q\in V$ のために $r_{PQ}\neq 0$ であれば $1/r_{PQ}$ が Laplace の方程式の解であることから左辺の被積分函数は恒等的に 0 だから，その積分も 0 である．

ところが小球 K の内には $r_{PQ}=0$ となる点が含まれていて $\nabla^2(1/r_{PQ})$ は極度の特異性をもち体積積分の意味は不明である．故に厳格にこれ以上議論が進められなくて実際は三次元での超函数に対する微分方程式 (92 頁例題 2 参照) として解釈しなおさねばならない．

しかしいま特異性のないときに成り立つ Gauss の公式

$$\iiint_{\mathrm{K}} \nabla^2 u\, d\tau = \iint_{\mathrm{S_K}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

において $u \to 1/r$ とした右辺の表面積分をもって (*1.24* b) の右辺の代りに置き換えてみよう．すると (*1.18* b) から $\displaystyle\iint_{\mathrm{S_K}} \frac{\partial}{\partial n_{\mathrm{R}}}\left(\frac{-1}{4\pi r_{\mathrm{RQ}}}\right) d\sigma_{\mathrm{R}} = 1$, 従って

$\displaystyle\iiint_{\mathrm{V}} \nabla_{\mathrm{P}}{}^2\left(\frac{-1}{4\pi r_{\mathrm{PQ}}}\right) d\tau_{\mathrm{P}} = \iiint_{\mathrm{K}} \nabla_{\mathrm{P}}{}^2\left(\frac{-1}{4\pi r_{\mathrm{PQ}}}\right) d\tau_{\mathrm{P}} = 1.$　これは (*1.24* b) にほかならない．

(*1.24*) からまた一次元の場合の (*1.9*) に対応する関係

$$\iiint_{\mathrm{V}} f(\mathrm{P})\, \nabla_{\mathrm{P}}{}^2\left(\frac{-1}{4\pi r_{\mathrm{PQ}}}\right) d\tau_{\mathrm{P}} = \begin{cases} 0, & \mathrm{Q} \notin \mathrm{V}, \quad (1.25\,\mathrm{a}) \\ f(\mathrm{Q}), & \mathrm{Q} \in \mathrm{V} \quad (1.25\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

が得られる．

例題 4〕　二次元の場合の (*1.23*) に対応する式は

$$\nabla_{\mathrm{P}}{}^2\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}\right) = -\delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \tag{1.26}$$

である．すなわち $\displaystyle -\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}\right)$ が二次元空間（平面上）における $\delta$ 函数であることを示せ．ただし $\nabla_{\mathrm{P}}{}^2$ は二次元の Laplace 演算子 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を意味し $\delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \delta(x-\xi)\cdot\delta(y-\eta)$.

(*1.24*) に対応する二次元での類同は

$$\iint_{\mathrm{D}} \nabla_{\mathrm{P}}{}^2\left(\frac{-1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}\right) d\sigma_{\mathrm{P}} = \begin{cases} 0, & \mathrm{Q} \notin \mathrm{D}, \quad (1.27\,\mathrm{a}) \\ 1, & \mathrm{Q} \in \mathrm{D} \quad (1.27\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

であって，これも上と同じように二次元の Gauss の公式から直接導ける，$\log(1/r_{\mathrm{PQ}})$ が $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$ なる限り二次元の Laplace の方程式の解であることから (*1.27* a) の成立は明かである．また $\mathrm{Q} \in \mathrm{D}$ の場合は例題 3 と同様に

$$\iint_{\mathrm{D}} \nabla_{\mathrm{P}}{}^2\left(\log\frac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}\right) d\sigma_{\mathrm{P}} = \iint_{\mathrm{K}} \nabla_{\mathrm{P}}{}^2\left(\log\frac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}\right) d\sigma_{\mathrm{P}} = \oint_{\mathrm{C_K}} \frac{\partial}{\partial n_{\mathrm{R}}}\log\left(\frac{1}{r_{\mathrm{RQ}}}\right) ds_{\mathrm{R}}, \tag{1.28}$$

すなわち (*1.27*) の右辺にある二次元積分を形式的に右辺の Q を中心とする小円周に沿う曲線積分で置き換えて考える．すると (*1.15* b) によって積分値は 1 に等しい．故に形式的に (*1.27* b) が導かれる．

## §2　函数概念の拡張　超函数

**1)　超函数による導函数概念の拡張　超函数としての $\delta$ 函数**　$f(x)$ は $-\infty<x<\infty$ で定義された与えられた連続函数とし，これに対して $\varphi(x)$ は十分大きな実数 $X_0, X_1$ を選んだとき $-X_0<x<X_1$ の外では $\varphi(x)\equiv 0$ となるような無限回連続微分可能[(1)]な函数とするとき，積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ の値に着

(1)　この $\varphi(x)$ が無限回連続微分可能な函数ということは一般の超函数の理論を展開するために必要な仮定である．われわれは以下で論ずる $\delta$ 函数とその導函数を論ずるだけなら，$\varphi''(x)$ まで連続で十分である．

目しよう.

上の条件からこの積分は一つの有限な値を持ち, $\varphi(x)$ をきめたとき異なる $f(x)$ に対し異なった値をとるから

$$L_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{2.1}$$

と書けば, $\varphi$ をきめた上で $L_f(\varphi)$ の値は $f$ に依存して定まるから, 独立変数 $x$ と従属変数 $y=f(x)$ を直接の対応関係 $x\Rightarrow f(x)$ として函数 $f(x)$ を考えるのと併行して $\varphi$ と $L_f(\varphi)$ との対応関係 $\varphi\Rightarrow L_f(\varphi)$ を考えることによっても $f$ の函数関係というものが考えられる. あるいは $f$ への依存性を強調して $L_f(\varphi)$ の代りに $f(\varphi)$ と書いて

$$f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{2.1a}$$

$\varphi\Rightarrow f(\varphi)$ の対応として新しい函数概念を作ってみる. この新しい立場に立ち, $f'(x)$ が特に連続な場合に成り立つ部分積分の公式を手がかりとして導函数の概念が非常に都合よく拡張されることが L. Schwartz (1946) により発見された ([16], [17] および [10] 参照). すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\,\varphi(x)\,dx=f(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi'(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi'(x)\,dx, \tag{2.2}$$

部分積分による第一項が落ちたのは $\varphi(x)$ の上に仮定した条件から $\varphi(-\infty)$, $\varphi(+\infty)$ とも 0 だからである. (2.1a) の記法によればこの関係は

$$f'(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi'(x)\,dx \tag{2.3}$$

と表わされる.

この関係は $f'(x)$ が連続のときは合法的に得られた関係であって, もう少し一般の場合例えば $f'(x)$ が不連続の場合には成立しないが, この場合にでも $f(x)$ が連続でありさえすれば, 右辺の積分は確かに存在している. それで $\varphi\Rightarrow f(\varphi)$ によって函数を定義する新しい考え方に従って, この一般の場合でも対応

$$\varphi\Rightarrow-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi'(x)\,dx\equiv-L_f(\varphi') \tag{2.4}$$

によって超函数としての導函数 $f'$ を定義することができる. すなわち

$$f'(\varphi)=-L_f(\varphi')=-f(\varphi') \tag{2.5}$$

によって $f'$ を定義する．高階の場合は

$$f^{(p)}(\varphi)=(-1)^p L_f(\varphi^{(p)})=(-1)^p f(\varphi^{(p)}),\quad p=2,3,4,\cdots \tag{2.6}$$

で定義するわけである．以上が超函数としての導函数の定義である[1].

新しい定義による函数の例として Heaviside の函数を考えてみよう．(*1.2*) で $\xi=0$ とおいた $Y(x)\equiv Y(x,0)$ を (*2.1*a) に代入して

$$Y(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}Y(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx, \tag{2.7}$$

また (*2.3*) において $f(x)$ の代りに同じ $Y(x)$ を代入すれば

$$Y'(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}Y(x)\,\varphi'(x)\,dx=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0). \tag{2.8}$$

Heaviside の函数の導函数が Dirac の $\delta$ 函数に形式的に等しいという解釈については既に述べた ((*1.10*) 参照)．そこで $Y'(\varphi)$ を $\delta(\varphi)$ と書いて超函数としての $\delta$ を定義する．すなわち超函数として Heaviside の函数 $Y(\varphi)$ を考えその超導函数 $Y'(\varphi)$ として $\delta(\varphi)$ を定義する：

$$\delta(\varphi)=Y'(\varphi). \tag{2.9}$$

すると (*2.8*) から

$$\delta(\varphi)=\varphi(0). \tag{2.10}$$

この関係で定義された $\delta$ は $\varphi(x)\Rightarrow\varphi(0)$ という対応関係を与えるという明確な意味をもった一つの超函数である．

さて $\delta(\varphi)$ を一般の $f(\varphi)$ を定義した (*2.1*a) と同じ形式で

$$\delta(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{2.11}$$

で現わしたとすると，(*2.10*), (*2.11*) から

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(0) \tag{2.12}$$

が成り立たねばならない．ところが (*2.12*) は Dirac の $\delta(x)$ が満足すべき函

(1)　このようにして $f(x)$ としては連続な導函数が存在しないような場合にも超函数としての $f(x)$ は無限回微分可能になるのである．しかしわれわれは超函数の一般論に触れず，ただ $\delta$ 函数の概念の理解という点でこれに言及するだけである．

なおここで (*2.1*) のように二つの函数 $f(x)$ と $\varphi(x)$ との積の積分という形に表わし得るのは簡単な超函数に限られることとで，すべての超函数がこのように書けるのではない．極めて特殊な超函数 $\delta$ がすでにこの形には表わせない．

数方程式 (*1.9* a) にほかならない. すなわち超函数 $\delta(\varphi)$ に一般の $f(\varphi)$ と同じ形式の表現を与えるために $f(x)$ の位置におくべき $\delta(x)$ はちょうど Dirac の $\delta$ 函数の性質を満足していなければならない. (*2.12*) を満たすような Dirac の $\delta$ 函数 $\delta(x)$ は古典的函数概念の下には許されないものであるけれど, $\delta$ 函数が役に立つのは形式的公式 (*2.12*) を満たすことによるもので, これが超函数 $\delta(\varphi)$ の性質 (*2.10*) として確立され, また不明確だった $Y'(x)$ と $\delta(x)$ の関係 (*1.10* a) は超函数の間の微分関係式 (*2.9*) として疑点がなくなったわけである. このようにして超函数 $\delta(\varphi)$ の合法性から "厳密ではないがうまく行く" $\delta(x)$ 使用の合理性が基礎付けられたわけである.

なお超函数 $\delta(\varphi)$ は超函数としては特殊の場合の測度と呼ばれるものの最も簡単な一例に過ぎないことを Schwartz は述べている([16],[17]). われわれは上で (*2.1*) の積分の値が $f(x)$ に応じて定まる値 $f(\varphi)$ をとることから $\varphi\Rightarrow f(\varphi)$ の対応として超函数の概念を導入したが, この式で $f(x)$ を質量の密度分布を表わすものと考えれば $f(x)\,dx$ は区間 $(x, dx)$ にある質量である. これを $d\mu(x)$ と書けば (*2.1*) の右辺の積分は $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,d\mu(x)$ と書ける. この値は質量分布 $d\mu(x)$ に依存する値をとるから, これを

$$\mu(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,d\mu(x) \tag{2.13}$$

と書いて考えると, $\varphi\Rightarrow\mu(\varphi)$ の対応関係として (*2.1*) のときに考えたのと同様にしてやはり超函数の概念が得られる. $d\mu(x)$ は直観的に $x$ にある質量と考えて $x=x_i$ 付近の質量の分布を $x_i$ 点に集中させて質点 $m(x_i)$ にしても右辺の積分を $\sum_i\varphi(x_i)m(x_i)$ でおきかえてよいことにすれば, (*2.13*) は不連続な質量分布の場合にも成り立つ. 特に $d\mu(x)=0,\ x\neq 0,\quad d\mu(0)=1$ のような $\mu$ を考えれば

$$\mu(\varphi)=\varphi(0) \tag{2.14}$$

となって, ちょうど $\delta(\varphi)$ と一致する.

上の質量分布が連続分布から一点に集中して質点に移行する結果として (*2.13*) はもはや普通の意味の積分ではなくなるので, (*2.13*) に厳格な意味を持たせるためには積分の定義を Stieltjes の積分(1)と呼ばれるものと考え直す要があるが, これは上に直観的に述べたことを厳格に定式化しただけのものと考えてよい. このように考えたとき (*2.13*) で定義される $\mu(\varphi)$ は測度と呼ばれる. その特例である $\delta(\varphi)$ は測度である. すなわちいわゆる Dirac の函数はこの意味で函数ではなく Dirac の測度と呼ぶべきである. Dirac の測度を含めた測度 $\mu(\varphi)$ は対応 $\varphi\Rightarrow\mu(\varphi)$ によって上に述べた超函数の中に含まれる ([16],[17] 参照).

$\varphi(x)\Rightarrow\varphi(0)$ の代りに $\varphi(x)\Rightarrow\varphi(\xi)$ の対応を表わす超函数を $\delta_\xi(\varphi)$ と書く:

(1) 例えば, 高木貞治: 増訂解析概論 §39, 岩波 (昭 24) 参照.

$$\delta_\xi(\varphi)=\varphi(\xi). \tag{2.15}$$

(2.1a) で $f$ の代りに $\delta_\xi$ とおけば

$$\delta_\xi(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\xi(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(\xi). \tag{2.15a}$$

しかるに (2.12) から

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(\xi)^{(1)}, \tag{2.15b}$$

(2.15a) と (2.15b) を比較して

$$\delta_\xi(x)=\delta(x-\xi) \tag{2.16}$$

であることがわかる.

この意味において函数方程式 (2.15b) を満足する種々の表式を $\delta(x-\xi)$ の表示式として (4.17)〜(4.19′), (5.14), (5.15)〜(5.16′), (5.13) などに出しておいたものは, いずれも無限級数もしくは無限積分としてそのままでは発散するものであって, これを適当に選んだ函数 $f(x)$ に作用させた上で通常の意味を持ち得るのである. 例えば $\delta(x-\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk$ では $-\infty<x<\infty$ で定義された $f(x)$ に作用して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{ik(x-\xi)}d\xi$$

とすることによって Fourier 積分の定理により $f(x)$ を与え, また $\delta(x-\xi)=\dfrac{1}{2l}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{n\pi}{l}(x-\xi)\right]$ では $-l\leqq x\leqq l$ で定義された函数 $f(x)$ に作用して

$$\int_{-l}^{l}\delta(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{n\pi}{l}(x-\xi)\right]d\xi$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{n\pi x}{l}\right]\cdot\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\exp\left[-i\frac{n\pi\xi}{l}\right]d\xi$$

とすることにより Fourier 級数の定理により $f(x)$ を与えることを知るのである.

2) **不連続点をもつ函数の超導函数** われわれの超函数 $f(\varphi)$ の導函数は $f(x)$ が全区間 $(-\infty,\infty)$ で連続なとき, またはもう少し一般に区分的に連続であるとき

$$f'(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi'(x)\,dx \tag{2.17}$$

で定義され, 函数 $f(x)$ の普通の意味の導函数 $f'(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で連続であることを仮定していない. しかし特に $f'(x)$ が連続なときは部分積分によって

$$f'(\varphi)=-f(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{2.18}$$

---

(1) (2.12) で $x=x'-\xi$ と書き $\varphi(x)=\varphi(x'-\xi)=\psi(x')$ とおけば $\varphi(0)=\psi(\xi)$ となって, $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x'-\xi)\psi(x')\,dx'=\psi(\xi)$ という結果が出る. $\psi$ の代りに $\varphi$ と書いたものが (2.15b) にほかならない.

となる．ただし $f(x)$ 及び $f'(x)$ が全区間で連続という仮定から右辺の積分が存在し，$\varphi(x)$ が $|x|$ が十分大きな場合には 0 となる仮定により第二辺の第一項は消えたのである．

次にもう少し一般の場合を考えて $f(x)$ 及び $f'(x)$ がともに区分的に連続だとすると，$f(x)$ の区分的に連続な各区間 $(-\infty, \xi_1-0), \cdots(\xi_{i-1}+0, \xi_i-0)$, $(\xi_i+0, \xi_{i+1}-0), \cdots(\xi_n+0, \infty)$ と分けて積分をとってみれば明かなように，部分積分の際出る $-f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}$ の代りに

$$-f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\xi_1-0}+\cdots+-f(x)\varphi(x)\Big|_{\xi_{i-1}+0}^{\xi_i-0}+-f(x)\varphi(x)\Big|_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0}$$
$$+\cdots-f(x)\varphi(x)\Big|_{\xi_n+0}^{\infty}=\sum_i\{f(\xi_i+0)-f(\xi_i-0)\}\varphi(\xi_i)$$

が得られる．いま，

$$f_{\xi_i}=f(\xi_i+0)-f(\xi_i-0)=f(x)\Big|_{\xi_i-0}^{\xi_i+0} \tag{2.19}$$

とおいて，これを $\sum_{\xi_i}f_{\xi_i}\varphi(\xi_i)$ と略記すれば

$$f'(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)\,dx+\sum_{\xi_i}f_{\xi_i}\varphi(\xi_i) \tag{2.20}$$

と書くことができる．$f_{\xi_i}$ は $f(x)$ の不連続点 $\xi_i$ での値の跳びを表わす．ただし右辺の第一項の積分は $f'(x)$ が区分的に連続の仮定から当然存在する．さて，右辺の第一項は函数 $f'(x)$ に対応する超函数であるから，これを $[f'](\varphi)$ と書いて左辺すなわち (*2. 17*) で定義された超函数 $f(\varphi)$ の導超函数 $f'(\varphi)$ と区別すれば (*2. 20*) は，従って

$$f'(\varphi)=[f'](\varphi)+\sum_{\xi_i}f_{\xi_i}\delta_{\xi_i}(\varphi) \tag{2.21}$$

と書ける．あるいはこれを

$$f'=[f']+\sum_{\xi_i}f_{\xi_i}\delta_{\xi_i},\quad f_{\xi_i}=f(x)\Big|_{\xi_i-0}^{\xi_i+0} \tag{2.21a}$$

で表わす．導超函数 $f'$ と導函数に対応する超函数 $[f']$ とは一般に不連続項からの寄与 $\sum_{\xi_i}f_{\xi_i}\varphi(\xi_i)$ だけ異なっており，$f$ の値に不連続がないときに限り一致する．

同様にして $f(x)$, $f'(x)$ のみならず $f''(x)$ も区分的に連続なときは (*2. 19*) と同様に $f(x)$ の不連続点を $\eta_k$，$f'(x)$ の不連続点を $\xi_i$ とすれば

$$f''(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi''(x)\,dx=\{f(x)\varphi'(x)\}\Big|_{-\infty}^{\eta_1-0}\cdots+\Big|_{\eta_k+0}^{\eta_{k+1}-0}\cdots+\Big|_{\eta_n+0}^{\infty}$$

$$-\{f'(x)\varphi(x)\}\Big|_{-\infty}^{\xi_1-0}\cdots+\Big|_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0}\cdots+\Big|_{\xi_m+0}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}f''(x)\varphi(x)\,dx$$

$$=\sum_{\eta_k}f(x)\Big|_{\eta_k-0}^{\eta_k+0}\{-\varphi'(\eta_k)\}+\sum_{\xi_i}f'(x)\Big|_{\xi_i-0}^{\xi_i+0}\varphi(\xi_i)+[f''](\varphi), \tag{2.22}$$

(2.19) の記法を使えば

$$f''(\varphi)=\sum_{\eta_k}f_{\eta_k}\delta_{\eta_k}'(\varphi)+\sum_{\xi_i}[f']_{\xi_i}\delta_{\xi_i}(\varphi)+[f''](\varphi), \tag{2.23}$$

あるいは

$$f''=[f'']+\sum_{\xi_i}[f']_{\xi_i}\delta_{\xi_i}+\sum_{\eta_k}f_{\eta_k}\delta_{\eta_k}' \tag{2.23 a}$$

によって導超函数 $f''$ と $f''(x)$ に対応する超函数 $[f'']$ との関係が与えられる.

例題〕 一般公式 (2.21 a), (2.23 a) において特に $f(x)\to Y(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & 0<x\end{cases}$ とおいて

$Y'(\varphi)=\delta(\varphi)$, $[Y'(\varphi)]=0$, $Y''(\varphi)=\delta'(\varphi)$, $[Y''(\varphi)]=0$ を確かめよ.

$$[Y'(x)]=\begin{cases}0 & x<0\\ 0 & 0<x\end{cases}\qquad [Y''(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0, & 0<x,\end{cases}$$

$$\therefore\ [Y'](\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}[Y'(x)]\varphi(x)\,dx=0,\ [Y''](\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}[Y''(x)]\varphi(x)\,dx=0.$$

すなわち $Y$ の導函数に対応する超函数は $[Y'](\varphi), [Y''](\varphi)$ はともに 0 だが, 導超函数 $Y'(\varphi)$, $Y''(\varphi)$ の方は, $Y_0=Y(x)\Big|_{-0}^{+0}=1$,

$[Y']_0=Y'(x)\Big|_{-0}^{+0}=0$, $[Y''(x)]=0$ を入れて $Y'(\varphi)=\delta(\varphi)$, $Y''(\varphi)=\delta'(\varphi)$.

## §3 Green 函数と常微分方程式の境界値問題

**1) Green 函数の定義** 独立変数がただ一個の場合すなわち常微分方程式の境界値問題の代表的例として, 一次元の Poisson の方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\rho(x),\qquad \rho(x)\ は連続 \tag{3.1}$$

において境界条件として両端 $x=0$ と $x=1$ とで第一種の同次境界条件

$$u(0)=0,\quad u(1)=0 \tag{3.2}$$

が指定されている場合を考えよう. I, 第14章に従って Green 函数を次の関係から定める.

$x$ を変数, $\xi$ をパラメタとして定義された Green 函数 $G(x,\xi)$ は

1° $x\neq\xi$ に対して (3.1) に対する同次方程式

$$\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2}=0 \tag{3.3}$$

を満足する.

2° $\xi$ をきめたとき $x$ につき連続で，（$u$ に対すると同じ）境界条件

$$G(0,\xi)=0,\qquad G(1,\xi)=0 \tag{3.4}$$

を満足する.

3° $\dfrac{dG}{dx}$, $\dfrac{d^2G}{dx^2}$ も $x=\xi$ を除いては連続であるが，$x=\xi$ では $\dfrac{dG}{dx}$ が不連続で

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx}\Bigg|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}\equiv\frac{dG(\xi+0,\xi)}{dx}-\frac{dG(\xi-0,\xi)}{dx}=-1 \tag{3.5}$$

だけの値の飛躍がある.

の三条件を満足するものとして定義される.

以上の条件によって定義された Green 函数 $G(x,\xi)$ は一意的に定まり，2) で示すように

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(1-\xi)x, & 0\leqq x\leqq\xi,\\ \xi(1-x), & \xi\leqq x\leqq 1\end{cases} \tag{3.6}$$

により与えられる.

上述の Green 函数を定義する 1°, 3° は一まとめにして一階の同次でない微分方程式

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx}\Bigg|_{x_0}^{x}=-Y(x,\xi)=\begin{cases}0, & x_0<x<\xi\\ -1, & \xi<x\end{cases} \tag{3.7}$$

の解として定義してもよい. ただし $x_0$ は $x,\xi$ のいずれよりも小なるある値: $x_0<\min(x,\xi)$ であり，右辺の函数 $Y(x,\xi)$ は §1 で述べた Heaviside の階段函数 (*1.2*) である. 実際 (*3.7*) の定義から

$x<\xi$ および $\xi<x$ の各部分区域では，$G(x,\xi)$ は

$$\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2}=0$$

を満たし，$\dfrac{dG(x,\xi)}{dx}$, $\dfrac{d^2G(x,\xi)}{dx^2}$ とも $x\neq\xi$ では連続で，不連続点 $x=\xi$ では (*3.7*) から

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx}\Bigg|_{\xi-0}^{\xi+0}=-1$$

を満たす. だから Green 函数を求めるには同次でない一階方程式 (*3.7*) を指定された境界条件を満足するように解けばよい.

2) **同次でない一階微分方程式** (*3.7*) **の解** (*3.7*) は

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx}=c_0-Y(x,\xi), \tag{3.8}$$

$$\text{ただし}\quad c_0=\frac{dG(x_0,\xi)}{dx},\quad x_0<\min(x,\xi)$$

と書けるから，積分して

$$G(x,\xi)=c_0x+c_1-\int_{x_0}^{x}Y(x,\xi)\,dx=c_0x+c_1+\begin{cases}0, & x\leqq\xi,\\ -(x-\xi), & \xi\leqq x\end{cases} \tag{3.9}$$

の形の一般解をもつことがわかる．特に $c_0=c_1=0$ とした

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases}0, & x\leqq\xi,\\ -(x-\xi), & \xi\leqq x\end{cases} \tag{3.9a}$$

は方程式

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx}=-Y(x,\xi) \tag{3.8a}$$

の簡単な一特解である．

両端 $x=x_0$, $x=x_1$ で第一種の同次境界条件

$$G(x_0,\xi)=0,\quad G(x_1,\xi)=0 \tag{3.10}$$

を満たす解は (3.9) から

$$G(x_0,\xi)=c_0x_0+c_1=0,\quad G(x_1,\xi)=c_0x_1+c_1-(x_1-\xi)=0$$

を解いて
$$c_0=\frac{x_1-\xi}{x_1-x_0},\quad c_1=-\frac{x_1-\xi}{x_1-x_0}x_0,$$

これを (3.9) に代入して

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x_1-\xi}{x_1-x_0}(x-x_0), & x_0\leqq x\leqq\xi,\\[2mm] \dfrac{\xi-x_0}{x_1-x_0}(x_1-x), & \xi\leqq x\leqq x_1.\end{cases} \tag{3.11}$$

これが両端 $x_0, x_1$ で第一種の同次境界条件を満足する Poisson の方程式 (3.1) に対する Green 函数である．

特に $x_0=0$, $x_1=1$ としたものは

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(1-\xi)x, & 0\leqq x\leqq\xi,\\ \xi(1-x), & \xi\leqq x\leqq 1\end{cases} \tag{3.12}$$

となる．これは結果だけを既に述べた (3.6) である．

同じ (3.8) の解で境界条件 (3.10) の代りに $x=-\infty$ で

$$G_-(-\infty,\xi)=0,\quad \frac{dG_-(-\infty,\xi)}{dx}=0 \tag{3.13}$$

という初期条件を満足するものを求めてみよう．

(3.8) で $x_0\to-\infty$ の極限を考え $c_0=0$，故に (3.9) から

$$G_-(x,\xi)=c_1+\begin{cases}0, & x\leqq\xi,\\ -(x-\xi), & \xi\leqq x.\end{cases}$$

(3.13) の第一条件から $c_1=0$,

$$\therefore \quad G_-(x,\xi) = \begin{cases} 0, & x \leqq \xi, \\ -(x-\xi), & \xi \leqq x. \end{cases} \tag{3.14}$$

(*3.14*) は (*3.8*a) の最も簡単な特解であって (*3.9*a) の $G_0(x,\xi)$ にほかならない. 反対に境界 $x=+\infty$ で

$$G_+(+\infty,\xi)=0, \quad \frac{dG_+(+\infty,\xi)}{dx}=0 \tag{3.15}$$

の終期条件を満足する同じ方程式の解は, (*3.8*) で $x\to+\infty$ として

$$0 = c_0 - 1,$$

従って (*3.9*) から

$$G_+(x,\xi) = \begin{cases} x+c_1, & x \leqq \xi, \\ \xi+c_1, & \xi \leqq x, \end{cases}$$

$G_+(+\infty,\xi)=0$ なるためには $c_1=-\xi$

$$\therefore \quad G_+(x,\xi) = \begin{cases} x-\xi, & x \leqq \xi, \\ 0, & \xi \leqq x. \end{cases} \tag{3.16}$$

3) **Poisson の方程式の境界値問題の解**　われわれの本来の問題に戻って, 境界条件 (*3.2*) を満足する Poisson の方程式 (*3.1*) の解は, 同じ境界条件を満足する Green 函数 (*3.6*) を使うと

$$u(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi \tag{3.17}$$

によって与えられることがわかる(1).

実際 Green の公式

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{v(x)\frac{d^2u}{dx^2}-u(x)\frac{d^2v}{dx^2}\right\}dx = \left(v(x)\frac{du}{dx}-u(x)\frac{dv}{dx}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} \tag{3.18}$$

において $v$ の代りに $G(x,\xi)$ を入れ $(0,\xi-0)$ および $(\xi+0,1)$ の区間に適用すれば

$$\int_0^{\xi-0}\{G(x,\xi)u''(x)-u(x)G''(x,\xi)\}dx = G(x,\xi)u'(x)-u(x)G'(x,\xi)\Big|_0^{\xi-0},$$

$$\int_{\xi+0}^1\{\qquad〃\qquad\}dx = \qquad〃\qquad\Big|_{\xi+0}^1. \tag{3.19}$$

(*3.1*) により $u''(x)=-\rho(x)$ であり, 各分区間 $(0,\xi-0)$ および $(\xi+0,1)$ では (*2.3*), (*3.3*) により $G''(x,\xi)=0$ が成り立つから, 左辺の和を作ると

---

(1) §2.3 には, 直交函数の理論を使って, 微分方程式 (*2.3.1*) が (*2.3.21*) で定義された $G(x,\xi;\lambda)$ を使って (*2.3.22*) の形の解を有することを知ったが, (*3.17*) は当然 (*2.3.22*) の特殊の場合である. また $G$ は本節で詳論した Green 函数である.

$$-\int_0^{\xi-0} G(x,\xi)\rho(x)dx - \int_{\xi+0}^1 G(x,\xi)\rho(x)\,dx = -\int_0^1 G(x,\xi)\rho(x)\,dx, \quad (3.20)$$

一方右辺で $x=0$ および $x=1$ とした値は境界条件 (*3.2*) および (*3.4*) によって消え，また $G(x,\xi)$, $u(x)$ はともに $x=\xi$ でも連続であるから，右辺の和は

$$G(\xi-0,\xi)u'(\xi)-u(\xi)G'(\xi-0,\xi)-G(\xi+0,\xi)u'(\xi)+u(\xi)G'(\xi+0,\xi)$$
$$=\{G'(\xi+0,\xi)-G'(\xi-0,\xi)\}u(\xi) = -u(\xi) \quad (3.21)$$

となる．故に

$$u(\xi) = \int_0^1 G(x,\xi)\,\rho(x)\,dx. \quad (3.22)$$

$x$ と $\xi$ とを入れ換えて一般に成立する Green 函数の相反関係 [I §14.2 または後述 (*8.8*) 参照]:

$$G(x,\xi) = G(\xi,x) \quad (3.23)$$

を考慮すれば，(*3.17*) が得られる[1].

Green 函数をきめる基礎になった微分方程式 (*3.7*) は，さらに $\delta$ 函数を使えば二階微分方程式

$$\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2} = -\delta(x-\xi) \quad (3.24)$$

によって置換される．この方程式とそれを形式的に積分した形の一階方程式

$$\left.\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right|_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x}\delta(x-\xi)\,dx = \begin{cases} 0, & x<\xi, \\ -1, & \xi<x. \end{cases} \quad (3.25)$$

ただし　　　　$x_0<\min(x,\xi)$

との関連については (*1.12*) と (*1.13*) の場合と全く同じである．この意味で Green 函数を形式的に (*3.24*) の指定された境界条件を満足する解として定義する新しい考え方が得られる．方程式 (*3.24*) は Poisson の方程式 (*2.11*) の右辺の函数 $\varphi(x)$ の代りに $\delta(x-\xi)$ が現われているもので，(*3.24*)の解すなわち Green 函数 $G(x,\xi)$ は物理的に $x=\xi$ におかれた全電荷1の点電荷（全質量1の質点）により生ずる $x=x$ でのポテンシアルを表わしている．全電荷が

---

(1)　われわれの場合には $G(x,\xi)$ の形が具体的に (*2.13'*) として求められている．この式で $x$ と $\xi$ とを入れかえると

$$G(\xi,x) = \begin{cases} (1-x)\xi, & \xi\leqq x, \\ x(1-\xi), & x\leqq\xi \end{cases}$$

となるが，これは (*2.13'*) の $G(x,\xi)$ と全然同じものである．

1 の代りに $\rho(\xi)$ になればこれによる同じ点のポテンシアルの値は $G(x,\xi)\rho(\xi)$ になるであろう．そうすれば点 $\xi$ での密度分布が $\rho(\xi)$ の連続分布では $G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi$ となり，結局全体 $(x_0, x_1)$ にわたる密度分布によるものは積分して

$$u(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi$$

で与えられることは物理的に考えれば当然と思われる．上に得られた (*3. 1*) の解 (*3. 17*) はこのような直観が正当であることを示している．

さて Green 函数をこのように特異性の微分方程式 (*3. 24*) の解として定義する方法によれば，Poisson の方程式の解 (*3. 17*) を形式的に非常に早く導くことができる．すなわち Green の公式 (*3. 18*) において，$v(x)$ の代りに Green 函数 $G(x,\xi)$ を入れ，$u(x)$ には Poisson の方程式 (*3. 1*) の境界条件 (*3. 2*) を満足する解を入れ，$x_0=0$, $x_1=1$ とした関係

$$\int_0^1 \{G(x,\xi)u''(x)-u(x)G''(x,\xi)\}dx=\{G(x,\xi)u'(x)-u(x)G'(x,\xi)\}\Big|_0^1 \tag{3. 26}$$

に着目すると，右辺は $u(x)$ または $G(x,\xi)$ が境界条件 (*3. 2*) または (*3. 4*) を満足することから 0 となり，左辺は $u(x)$ および $G(x,\xi)$ がそれぞれ (*3. 1*) もしくは (*3. 4*) を満たすことから

$$\int_0^1 u(x)\,\delta(x-\xi)\,dx-\int_0^1 G(x,\xi)\rho(x)\,dx=u(\xi)-\int_0^1 G(x,\xi)\rho(x)\,dx=0 \tag{3. 27}$$

の関係が得られる．(*3. 27*) は (*3. 22*) で得た関係にほかならない．(*3. 22*) を導くには，$x=\xi$ での不連続性を考慮して全区間 $(0,1)$ を $(0,\xi-0)$ $(\xi+0,1)$ の両部分区間に分割し合法的に Green の公式を利用したのであるが，Green の公式を形式的に全区間に適用し $d^2G(x,\xi)/dx^2$ を $-\delta(x-\xi)$ でおきかえて計算すること上のようにすれば，正統な手段で求めたものと同じ結果が導かれるのである．

この正当性の裏付けは §4.2 で述べるように超函数の方法にまたなければならないが，形式的には簡略に最後の結果が得られるので，近時の文献には非常によく用いられる．

Poisson の方程式 (*3. 1*) に限らなくとも，もっと一般に $L$ を自己随伴の微

分演算子

$$L_x[u] \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u \tag{3.28}$$

とするとき，区間 $[a, b]$ で

$$L_x[u] = -\rho(x) \tag{3.29}$$

を満足し，両端 $a, b$ で境界条件

$$B_a[u] \equiv p(a)u'(a)\sin\alpha - u(a)\cos\alpha = 0 \tag{3.30a}$$

$$B_b[u] \equiv p(b)u'(b)\sin\beta - u(b)\cos\beta = 0 \tag{3.30b}$$

の形の同次境界条件を満足するような解は，特異性微分方程式

$$L_x[G(x, \xi)] = -\delta(x-\xi) \tag{3.31}$$

を満足し (3.30 a, b) と同じ境界条件を満足する Green 函数 $G(x, \xi)$ が求められれば，これを仲介として

$$u(x) = \int^b G(x, \xi)\,\rho(\xi)\,d\xi \tag{3.32}$$

の形で与えられることが上と同様の手続きによって導かれる．第2章に得られた結果：(2.3.21)～(2.3.22) は直交函数の理論によって同様の結論が得られることを示している．本節の方法で定義した Green 函数が (2.3.21) に一致することを示すことは演習問題として読者の手に委ねる．

## §4　Green 函数の求め方と基礎付け

**1)　微分方程式の主要解と Green 函数**　上述のように Green 函数は特異性方程式 (3.24) の指定された境界条件を満足するものである．一般に境界条件を度外視して単に与えられた方程式を満足する解を求めることはより簡単である．方程式 (3.31) の場合にも境界条件を度外視して (3.31) を満足する一解 $G_0(x, \xi)$ が求まった場合には，境界条件を満足させるためには (3.31) に属する同次方程式

$$L_x[U(x)] = 0 \tag{4.1}$$

の基本解 $U_1, U_2$ の線型結合 $U = c_1U_1 + c_2U_2$ の形の $U$ を上の $G_0(x, \xi)$ に加えてもやはり (3.31) の解であって，$c_1, c_2$ を境界条件を満たすように適当にきめることによって求める $G(x, \xi)$ が

$$G(x, \xi) = G_0(x, \xi) + c_1U_1(x) + c_2U_2(x) \tag{4.2}$$

の形で得られる．それで Green 函数を定める問題は境界条件を無視して単に

$$L_x[G_0(x,\xi)] = -\delta(x-\xi) \tag{4.3}$$

の一解を求める問題を解けばよいことになる．そのような解 $G_0(x,\xi)$ のことを微分演算子 $L_x$ に属する $\xi$ 点に関する主要解と呼ぶことにする(1)．主要解を求める一般性のある方法として Fourier 積分を利用する系統的方法がある．この方法を既に論じた Poisson の方程式の場合すなわち

$$\frac{d^2G_0(x,\xi)}{dx^2} = -\delta(x-\xi) \tag{4.4}$$

の解法に適用してみよう．

$\delta$ 函数の Fourier 式表示式 (*2.5.4*) によれば

$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}dk, \qquad -\infty < x, \xi < \infty \tag{4.5}$$

と書けるから，(*4.4*) を解くために主要解 $G_0(x,\xi)$ に対して

$$G_0(x,\xi) \equiv G_0(x-\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ik(x-\xi)}dk \tag{4.6}$$

の形を仮定して (*4.4*) に代入すれば $\int_{-\infty}^{\infty}\{k^2g(k)-1\}e^{ik(x-\xi)}dk = 0$ が成り立たねばならぬ．これから $g(k) = 1/k^2$ と定めて (*4.6*) に代入すれば次の関係が得られる．

$$G_0(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk. \tag{4.7}$$

ところが $k=0$ は積分函数の不正則点であってこのままでは (*4.7*) は発散するので $k$ に関する積分路を $k=0$ で実軸の下に半径 $\varepsilon$ の小半円で避けて第 4.1 図のようにとった積分

$$G_\varepsilon(x,\xi) = \lim_{K\to\infty} G_K(x-\xi), \quad G_K(x-\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk \tag{4.7'}$$

でおきかえて考える．これに応じて (*17.1*) の $\delta(x-\xi)$ の方もその代りに

$$\delta_\varepsilon(x-\xi) = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K} e^{ik(x-\xi)}dk \tag{4.5'}$$

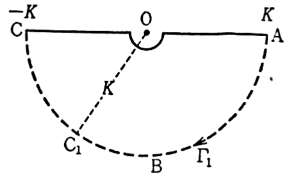
としてやれば (*4.4*) の代りに微分方程式

$$\frac{d^2G_\varepsilon}{dx^2} = -\delta_\varepsilon(x-\xi) \tag{4.8}$$

が満足される．ここで $\varepsilon\to 0$ の極限を考え $\delta_\varepsilon(x-\xi)$ が $\delta(x-\xi)$ に収束するに応じて

(1) L. Schwartz の定義する solution élémentaire ([15] p. 133 参照)．普通は素解とか基本解とか訳されている．素解はその性質の感じがでない．基本解は Fundamental Lösung の訳であろう．線型常微分方程式で用いられる基本解と区別するために主要解と呼ぶことにする．

$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(x,\xi)$ が求める主要解 $G_0(x,\xi)$ を与える．さて $G_K(x-\xi)$ は次のようにして計算される．まず $x<\xi$ の場合から考えよう．$k$ 複素平面上で実軸の下半面で半径 $K$ の半円を考え，これを $G_K$ に補って閉曲線 $C_1$: OABCO について複素積分

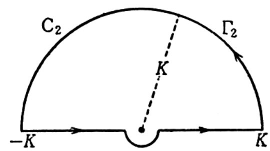



第 4.1 図

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{C_1}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk$$
$$=\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\!\!\int_{-K}^{K}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk$$

をとり $K\to\infty$ の極限を考える．すると $\Gamma_1$ 上で $\Im(k)<0$ だから $e^{ik(x-\xi)}=e^{-\Im(k)(x-\xi)+i\Re(k)(x-\xi)}$, $x<\xi$ の仮定により $|k|\to\infty$ と共に被積分函数は指数函数的に 0 に収束し，$\Gamma_1$ の積分の寄与は 0 になる．被積分函数は $C_1$ の内部で到る所で正則だから Cauchy の定理により $\oint_{C_1}=0$ である．これから

$$G_\varepsilon(x-\xi)=\lim_{K\to\infty}G_K(x-\xi)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk=0,\quad x<\xi.\qquad(4.9)$$




第 4.2 図

次に $\xi<x$ の場合を考える．$\xi<x$ のために $\Gamma_1$ の積分は発散になるから第 4.2 図の上半面にある半径 $K$ の半円 $\Gamma_2$ を $G_K$ に補って閉曲線 $C_2$ に沿う同様の積分

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk=\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\!\!\int_{-K}^{K}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk$$

を考えると $e^{ik(x-\xi)}=e^{-\Im(k)(x-\xi)+i\Re(k)(x-\xi)}$, $\xi<x$, $\Im(k)>0$ だから $\Gamma_2$ 上の積分は 0 に収束し，

$C_2$ の内部の不正則点は二位の極 $k=0$ だけだから，$k=0$ での被積分函数の留数を $(\mathrm{Res})_{k=0}$ とすれば

$$G_\varepsilon(x-\xi)=\lim_{K\to\infty}G_K(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}dk=i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}\right)_{k=0},$$
$$\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}=\frac{1}{k^2}(1+ik(x-\xi)+\cdots)\quad から\quad \mathrm{Res}\left(\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}\right)_{k=0}=i(x-\xi),$$

ゆえに
$$G_\varepsilon(x-\xi)=-(x-\xi),\qquad \xi<x\qquad(4.10)$$

(4.9) (4.10) の結果は $\varepsilon$ に依存しない．したがって主要解として

$$G_0(x-\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}G_\varepsilon(x-\xi)=\begin{cases}0, & x\leqq\xi, \quad(4.11\,\mathrm{a})\\ -(x-\xi), & \xi\leqq x \quad(4.11\,\mathrm{b})\end{cases}$$

を得る．これから境界条件を満足するように Green 函数を定めることとは上述の通りである．

(4.11) はその形 (3.14) に与えた $G_-(x-\xi)$ に全く一致している．Poisson の方程式の場合には $G_-(x,\xi)$ が $G_0(x,\xi)$ と一致することとは，すでに (3.9a) と (3.15) を比較してみたところである．(4.7) の計算で発散を避けるために $k=0$ を実軸の下に避けて極限をとった結果 (4.11) が得られたが，もし上に避ける場合は周辺路に囲まれる極の

存在が第4.1図,第4.2図の場合と逆になり，極 $k=0$ 度が閉曲線 $C_1$ の中に含まれ，$C_2$ の場合は外にあるから，$x\leqq\xi$ の場合には積分が消えず反対に $\xi\leqq x$ の場合に消えて

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases}(x-\xi), & x\leqq\xi,\\ 0, & \xi\leqq x\end{cases} \tag{4.12}$$

という結果になる．今度は (*3.16*) に与えた $G_+(x,\xi)$ と同じ式が出てきた．すなわち (*4.4*) の解として積分 (*4.7*) が形式的に得られるが，この積分に意味をもたすために特異点 $k=0$ を下に避けるか上に避けるかで $G_-(x,\xi)$ か $G_+(x,\xi)$ が現われる．(*4.4*) の解はこれに対する同次微分方程式

$$\frac{d^2U}{dx^2}=0 \tag{4.13}$$

の解だけ不定性があるわけであって，今の場合その一つの解

$$U(x,\xi)=x-\xi \tag{4.14}$$

によって

$$G_+(x,\xi)=G_-(x,\xi)+U(x,\xi) \tag{4.15}$$

の関係で両者が関係しているのである(1)．

$\delta$ 函数の積分表示式 (*4.5*) は本来は $-\infty<x<+\infty$ という境界のない区域での函数を表わすのに便利な形で，有限の境界の場合にはむしろ有限区間 $[a,b]$ で定義された完全直交函数系 $\varphi_n(x), n=1,2,3,\cdots$ に関する Fourier 式展開を使うのが自然であろう．求める Green 函数は境界条件 (*3.4*) を満足するものであるから，そのような固有函数の結合である (*2.4·17′*) で $l=1$ とした関係：

$$\delta(x-\xi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x\sin n\pi\xi,\qquad 0<x,\xi<1 \tag{4.16}$$

を

$$\frac{d^2G_1(x,\xi)}{dx^2}=-\delta(x-\xi),\qquad 0<x,\xi<1 \tag{4.17}$$

の右辺に代入して，主要解の別な Fourier 式表示を求めることができる．すなわち (*4.17*) を $x$ に関して二度積分して，一つの特解

$$G_1(x,\xi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi\xi}{(n\pi)^2} \tag{4.18}$$

を得る．(*4.18*) は境界条件 (*3.2*) を満足する固有函数から合成されたものであるから，このままで境界条件 (*3.4*) すなわち

$$G_1(0,\xi)=G_1(1,\xi)=0 \tag{4.19}$$

を満足する第一種の Green 函数になっている．ゆえに上に作った (*3.6*) と一致すべきであるが，実際そうなっている：

---

(1)　われわれは以下の解説で主要解の求め方を常に複素積分における留数の定理を利用する系統的方法を採用した．実積分の範囲だけで(*4.7′*)に現われるような発散積分に意味を持たすためにはこれに（無限大の）定数 $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k^2}$ を加えて (*4.7′*) のかわりに $\tilde{G}(x,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)dk$ をとってやればよい．実際この $\tilde{G}(x,\xi)$ を計算すると本文で示した結果の式 (*4.11*) そのものではなく，$-|x-\xi|/2$ となり，その差は $(x-\xi)/2$ であるが，これは同次方程式 (*4.13*) の解である．

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi\xi}{(n\pi)^2}=\begin{cases}(1-\xi)x, & x\leqq\xi^{(1)}, & (4.20\text{a})\\ \xi(1-x), & \xi\leqq x. & (4.20\text{b})\end{cases}$$

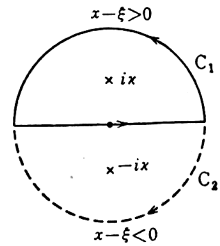
問題 1〕 Fourier 積分を利用し $\dfrac{d^2G_0}{dx^2}-\kappa^2G_0=-\delta(x-\xi)$ の主要解を求めよ.

（解） $G_0(x,\xi)=e^{-\kappa|x-\xi|}/2\kappa$.

（ヒント） (4.6) の形を仮定すれば

$$g(k)=1/(k^2+\kappa^2),$$

$$G_0(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2+\kappa^2}dk.$$



第 4.3 図

この積分を本論にならって $(x-\xi)\gtrless 0$ に応じて第 4.3 図の閉曲線 $C_1, C_2$ についてとった複素積分を行えばよい. $C_1$ の場合

$$(\text{Res})_{k=i\kappa}=\lim_{k\to i\kappa}(k-i\kappa)\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2+\kappa^2}=\frac{e^{-\kappa(x-\xi)}}{2i\kappa},$$

ゆえに $$G_0(x,\xi)=e^{-\kappa(x-\xi)}/2\kappa,\qquad x-\xi>0.$$

$C_2$ の場合

$$(\text{Res})_{k=-i\kappa}=\lim_{k\to -i\kappa}(k+i\kappa)\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2+\kappa^2}=\frac{e^{\kappa(x-\xi)}}{-2i\kappa},$$

ゆえに $$G_0(x,\xi)=e^{\kappa(x-\xi)}/2\kappa,\qquad x-\xi<0.$$

問題 2〕 Fourier 積分を利用し微分方程式

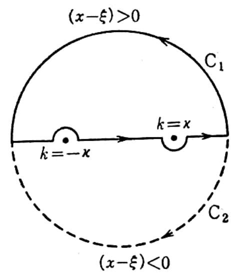
$$\frac{d^2G_0}{dx^2}+\kappa^2G_0=-\delta(x-\xi)$$

の主要解を求めよ.

（解） $G_0(x,\xi)=ie^{i\kappa|x-\xi|}/2\kappa$.

（ヒント） (4.6) の形を仮定すれば $g(k)=1/(k^2-\kappa^2)$

$$G_0(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2-\kappa^2}dk.$$



第 4.4 図

この積分を本論にならって $(x-\xi)\gtrless 0$ に応じて第 4.4 図の閉曲線 $C_1, C_2$ についてとった複素積分の計算を行えばよい.

$C_1$ の場合

$$(\text{Res})_{k=\kappa}=\lim_{k\to\kappa}(k-\kappa)\frac{e^{ik(x-\xi)}}{k^2-\kappa^2}=\frac{e^{i\kappa(x-\xi)}}{2\kappa}$$

から $$G_0(x,\xi)=ie^{i\kappa(x-\xi)}/2\kappa,\qquad (x-\xi)>0,$$

同様に $$G_0(x,\xi)=ie^{-i\kappa(x-\xi)}/2\kappa,\qquad (x-\xi)<0.$$

**2）Green 函数の方法の基礎付け**　特異性微分方程式

$$\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2}=-\delta(x-\xi)\tag{4.21}$$

(1) 実際右辺で与えられた函数を $(0,1)$ での完全直交函数系 $\sin n\pi x$, $n=1,2,3,\cdots$ [(2.4.1″) で $l=1$ とせよ] を用いて Fourier 展開することによりそれが確かめられる.

は超函数の微分方程式

$$G_\xi'' = -\delta_\xi \tag{4.22}$$

の形式的表現と解釈すべきものである．ここに右辺 $G_\xi''$ は (*2.5*) によって

$$G_\xi''(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi)\varphi''(x)\,dx. \tag{4.23}$$

(*2.23*) から導超函数 $G_\xi''(\varphi)$ は

$$G_\xi''(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2}\right]\varphi(x)\,dx + \sum_i \left[\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right]_{\xi_i}\varphi(\xi_i) + \sum_k [G(x,\xi)]_{\eta_k}\varphi'(\eta_k)$$

一方，左辺 $\delta_\xi$ は (*2.15*) によって $\delta_\xi(\varphi) = \varphi(\xi)$ と書けるのであるから，両辺を比較して

$$\left[\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2}\right] = 0, \tag{4.24a}$$

$$\sum_i \left[\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right]_{\xi_i}\varphi(\xi_i) = -\varphi(\xi), \tag{4.24b}$$

$$\sum_k [G(x,\xi)]_{\eta_k}\varphi'(\eta_k) = 0^{(1)}. \tag{4.24c}$$

まず最初の (*4.24* a) は $G(x, \xi)$ が通常の函数として

$$\left[\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2}\right] = 0$$

を満足すべきであることを示し，(*4.24* c) から $G(x, \xi)$ は不連続な点は有しないこと，(*4.24* b) から通常の函数として導函数 $\dfrac{dG(x,\xi)}{dx}$ はただ一点 $x=\xi$ だけで

$$\left[\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right]_\xi = \frac{dG(x,\xi)}{dx}\Bigg|_{\xi-0}^{\xi+0} = -1.$$

これはちょうど Green 函数の満足すべき条件として §3, (1) の最初に述べた 1°, 3° の性質にほかならない．これに境界条件 2° を課することによってちょうど Green 函数が決定されること上述の通りである．

一般の特異性微分方程式 (*3.31*) の場合も同様である．

以上のように，$G(x, \xi)$ を Green 函数としたとき

---

(1)　もっと端的にいえば (*4.22*) と (*2.23*a) から
$G_\xi'' = \lfloor G_\xi'' \rfloor + \sum_i [G_\xi']_{\xi_i}\delta_{\xi_i} + \sum_k [G_\xi]_{\eta_k}\delta_{\eta_k}' = -\delta_\xi$. これからすぐ (*4.24*) の諸式が出る．

$$\int_{-\infty}^{\infty} G''(x,\xi)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)\varphi(x)\,dx = -\varphi(\xi)$$

と簡略計算を行なってさしつかえないことは，特異性方程式(4.23)の対応する正当化された超函数の関係(4.22)，換言すれば $\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi)\varphi''(x)\,dx = -\varphi(\xi)$ が成り立つことに基づいて基礎付けられるのである．これからさらに進んで

$$u(\varphi) = \int_0^1 G_\xi(\varphi)\rho(\xi)\,d\xi,\quad G_\xi(\varphi) \equiv G(\varphi,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi)\varphi(x)\,dx \tag{4.25}$$

が Poisson の方程式 (3.1) に対応する超函数の微分方程式

$$u''(\varphi) = -\rho(\varphi),\qquad \varphi(x)\equiv 0\qquad (x<0,\ 1<x) \tag{4.26}$$

を満足することが示される．すなわち

$$u''(\varphi) = \int_0^1 G_\xi''(\varphi)\rho(\xi)\,d\xi$$

で $G_\xi''$ は (4.22) により $G_\xi''(\varphi) = -\delta_\xi(\varphi) = -\varphi(\xi)$ を満たすから

$$u''(\varphi) = -\int_0^1 \rho(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = -\rho(\varphi). \tag{4.27}$$

すなわち (4.25) で与えられる超函数 $u(\varphi)$ は超函数としての微分方程式 (4.26) の解である．(4.25) は §3.1 で論じた通常の意味の Poisson 方程式 (3.1) の解 (3.17)，すなわち

$$u(x) = \int^1 G(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi$$

と全然同型であって Green 函数の法による解 (3.17) が超函数の立場から再確認された．

Poisson の方程式に限らずもっと一般の微分方程式 (3.29) の場合も同様であって，Green 函数は特異性微分方程式 (3.31) の対応する超函数に関する微分方程式

$$L[G_\xi] = -\delta_\xi \tag{4.28}$$

に対して上と同様に取扱うことによって簡略法の正当性が確かめられる．そしてこの場合の Green 函数を使って表わされた

$$u(\varphi) = \int_a^b G(\varphi,\xi)\rho(\xi)\,d\xi \tag{4.29}$$

が超函数微分方程式

$$L[u](\varphi) = -\rho(\varphi) \tag{4.30}$$

の境界値問題の解になる．

**3) 次元の拡張，偏微分方程式における Green 函数の方法**　(2) に述べた考え方は独立変数が多数個の場合に拡張できて，これが偏微分方程式の境界値問題を解く鍵になる．しかし，これを系統的に論ずることは限られた紙面でとうてい不可能のことであるから，類推によって了解することで満足しよう．

§1 の例題 3, 4 などでみたように，多変数の場合にでも偏微分方程式

$$L_{\mathrm{P}}[G(\mathrm{P},\mathrm{Q})]=-\delta(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \tag{4.31}$$

の主要解は比較的簡単に求められていた．また §7 に述べるように 1) の方法を拡張した Fourier 積分その他の方法で (*4.31*) 形の主要解が求められる場合が少くない．主要解が一個求められると，1) で説明した常微分方程式の場合と同様の考え方で，(*4.31*) に対する同次方程式の解を重ね合せて境界条件を満足させることができる．これが偏微分方程式の場合の Green 函数である．これを手懸りとして (*4.29*) を多次元に拡張した形式によって偏微分方程式の境界値問題の解が求められる(1)．これが偏微分方程式に対する Green 函数の方法の概略の姿である．このとき，(*4.31*) の型の特異性微分方程式を利用する簡略取扱いは，やはり超函数の概念に基づいて正当化される．われわれは以下の取扱いでは全くその裏付けについては述べない．ただ応用上で最も基礎になるポテンシアルの問題について次の例題 1, 2 について基礎付けをするに止めておく．

例題 1〕 $\nabla_{\mathrm{P}}{}^2\left\{\dfrac{-1}{2\pi}\log\left(\dfrac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}\right)\right\}=\delta(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ の超函数的基礎付け．

§1 の例題 4 に (*1.26*) として形式的に導いたこの関係の超函数により基礎付けを略述すれば次の通りである．二次元の超函数は (*2.1* a) に倣って $\varphi(x,y)$ を $|x|,|y|$ が十分大きな区域では $\varphi(x,y)\equiv 0$ の無限回連続微分可能な函数として

$$f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy \tag{4.32}$$

で定義され，その超導函数は (*2.3*) を拡張して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)=-\int\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy, \tag{4.33 a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi)=\int\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)\,dx\,dy, \tag{4.33 b}$$

$$\nabla^2 f(\varphi)\equiv\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(\varphi)=\int\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dx\,dy \tag{4.34}$$

などで定義される．また (*2.12*) を拡張して

$$\delta(\varphi)=\varphi(0,0)\equiv\varphi(0) \tag{4.35}$$

---

(1) 例えば第 4 章，§5 に論ずる円に関する Dirichlet の問題の取扱い方がその具体的例である．

と書く．(*1.26*) あるいは原点を Q に移した形で書けば

$$\nabla^2\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\right)=-\delta(x,y),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\tag{4.36}$$

となる．上述の類同からこれは超函数の微分方程式

$$\nabla^2\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\right)(\varphi)=-\delta(\varphi)\tag{4.37}$$

の形式的表現と解すべきであるから，われわれの証明すべき関係式は (*4.37*) である．

これを示す前に一言注意しておくことは，(*4.37*) の左辺 $\nabla^2 f,\ f=\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\right)$ は (*4.34'*) の定義による超函数としての Laplacian だから $-\delta\varphi$ となるのであって，函数としての Laplacian $[\nabla^2 f]\equiv\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$ はもちろん $f=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ を代入したとき $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は 0 となるから，$[\nabla^2 f]$ に対応する超函数も

$$[\nabla^2 f](\varphi)=\int\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\right\}\varphi(x,y)\,dx\,dy=0\tag{4.38}$$

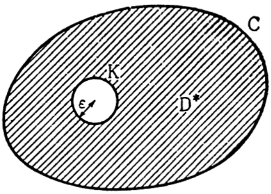
から明かなように 0 であることである．

さて本論にもどって超函数として $\nabla^2 f,\ f=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ を (*4.34*) の定義により計算する．いま $x,y$ 平面上で原点を中心とする半径 $\varepsilon$ の円 K および第 4.5 図の C で囲まれた二次元区域を D* とする．D* に対して Green の公式を適用すれば

$$\int\int_{D^*}f(x,y)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dx\,dy-\int\int_{D^*}\varphi(x,y)\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\right)dx\,dy$$
$$=\oint_C\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial f}{\partial n}\right)ds_C+\oint_K\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial f}{\partial n}\right)ds_K\tag{4.39}$$

そこで C を無限遠に追いやると，$\varphi$ に関する仮定から右辺の第一項は 0 に収束する．一方 K 上では $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial r}$，$f=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ を入れて $ds_K=\varepsilon\,d\varphi$ とおいて $\varepsilon\to 0$ の極限を考えると

$$\oint_K f\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds_K=\frac{+1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\pi}\log\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\varepsilon\,d\varphi$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(0)\cdot\varepsilon\log\varepsilon=0,$$



第 4.5 図

また

$$\oint_K\varphi(x,y)\frac{\partial f}{\partial n}ds_K=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\varphi(x,y)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\log\varepsilon)\,\varepsilon\,d\varphi$$
$$=\frac{\varphi(0)}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi=\varphi(0),$$

一方左辺の第一項は $\nabla^2 f(\varphi)\equiv\frac{1}{2\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\right)(\varphi)$ に収束し，左辺の第二項は (*4.38*) により 0 である．

$$\therefore\quad\nabla^2\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\right)(\varphi)=-\varphi(0)\tag{4.40}$$

右辺を (*4.35*) を考慮して $\varphi(0)=\delta(\varphi)$ と書いたものが (*4.37*) にほかならない．

例題 2〕
$$\nabla^2\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)=-(n-2)\,\Omega_n\delta,\qquad n\geqq 3,\tag{4.41}$$

ただし，$\nabla^2$ は $n$ 次元の Laplacian: $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_n{}^2}$,

$$r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2}$$

は $n$ 次元空間の二点 $x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\xi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ の距離を表わし $\Omega_n$ は $n$ 次元空間の単位球 $r=1$ の全表面積 $\Omega_n=2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(n/2)$, $\delta$ は $n$ 次元の $\delta$ 函数 $\delta=\delta(x_1-\xi_1)\,\delta(x_2-\xi_2)\cdots\delta(x_n-\xi_n)$ を表わす．

例題 1 の最初の説明に倣って

$$f(\varphi)=\int\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,d\tau_n, \quad d\tau_n=dx_1dx_2\cdots dx_n$$

を超函数の定義とし，$\varphi(x)$ が $|x|$ の十分大きな区域で $\varphi(x)\equiv 0$ となるなども同様．例題 1 の $D^*$ を原点を囲む半径 $\varepsilon$ の小球をくり抜いた $n$ 次元体積に代えて同様の計算を行えば

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)(\varphi)=\int\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\frac{1}{r^{n-2}}\nabla^2\varphi\,d\tau_n=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\int\cdots\int_{r>\varepsilon}\frac{1}{r^{n-2}}\nabla^2\varphi\,d\tau_n$$

前題同様の考察を $n$ 次元の Green の公式を利用して無限遠の表面積分が 0 となることを考慮することにより

$$\int\int\cdots\int_{r>\varepsilon}\frac{1}{r^{n-2}}\nabla^2\varphi\,d\tau_n=\int\int\cdots\int_{r>\varepsilon}\nabla^2\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\cdot\varphi\,d\tau_n$$
$$+\int\cdots\int_{r=\varepsilon}\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma_n-\int\cdots\int_{r=\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\varphi\,d\sigma_n. \quad (4.42)$$

$\nabla^2\left(\dfrac{1}{r^{n-2}}\right)=0$, $r>0$ であることから体積積分は 0 となり，表面積分には $d\sigma_n=r^{n-1}d\Omega_n$ を入れると，第二項は $\displaystyle\int\cdots\int_{r=\varepsilon}r\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Omega_n$ となり $\varepsilon\to 0$ とともに消える．また

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}(r^{2-n})=(n-2)\,r^{1-n}$$

から第三項は

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(n-2)\int\cdots\int_{r=\varepsilon}\varphi\,d\Omega_n=(n-2)\,\varphi(0)\int\cdots\int_{\Omega_n}d\Omega_n=(n-2)\,\Omega_n\varphi(0),$$

$$\therefore\quad \nabla^2\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)(\varphi)=-(n-2)\,\Omega_n\,\delta(\varphi), \quad (4.43)$$

すなわち (4.41) が超函数の関係として確立された．

## §5 随伴偏微分表式，広義の Green の公式（線型二階の偏微分表式）

$$L[u]\equiv A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u \quad (5.1)$$

に対し

$$M[v]\equiv\frac{\partial^2(Av)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2(Bv)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2}-\frac{\partial(Dv)}{\partial x}-\frac{\partial(Ev)}{\partial y}+Fv \quad (5.2)$$

を考え $M$ を $L$ の**随伴微分表式**であるという．逆に $M$ の随伴微分表式を考えると $L$ にもどることが知られている．

(5.1) に $v$ をかけ (5.2) に $u$ をかけたものを引いて

$$vL[u]-uM[v]\equiv v\{Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu\}$$
$$-u\{(Av)_{xx}+2(Bv)_{xy}+(Cv)_{yy}-(Dv)_x-(Ev)_y+Fv\} \qquad (5.3)$$

を計算すると

$$Avu_{xx}-u(Av)_{xx}=(Avu_x-u(Av)_x)_x,$$
$$Cvu_{yy}-u(Cv)_{yy}=(Cvu_y-u(Cv)_y)_y,$$
$$2\{Bvu_{xy}-u(Bv)_{xy}\}=(Bvu_y-u(Bv)_y)_x+(Bvu_x-u(Bv)_x)_y,$$
$$Dvu_x-u(-Dv)_x=(Duv)_x,$$
$$Evu_y-u(-Ev)_y=(Euv)_y$$

などの関係を利用することにより (5.3) は二個の表式

$$P=v\{Au_x+Bu_y\}-u\{(Av)_x+(Bv)_y\}+Duv$$
$$=A(vu_x-uv_x)+B(vu_y-uv_y)+(D-A_x-B_y)uv, \qquad (5.4)$$

および

$$Q=v\{Bu_x+Cu_y\}-u\{(Bv)_x+(Cv)_y\}+Euv$$
$$=B(vu_x-uv_x)+C(vu_y-uv_y)+(E-B_x-C_y)uv \qquad (5.5)$$

を $x$ ならびに $y$ に関して微分した偏導函数の和

$$vL[u]-uM[v]=P_x+Q_y \qquad (5.6)$$

の形に書き表わすことができる．

ところが $x,y$ 平面上の区域 D に関して P ならびに Q の $x,y$ に関する偏導函数 $P_x, Q_y$ を積分したものに関しては Gauss の公式から

$$\iint_D(P_x+Q_y)dx\,dy=\oint_C(Pdy-Qdx)=\oint_C(Px_n+Qy_n)ds \qquad (5.7)$$

の右辺で表わされる曲線積分に移されることが知られている．

ただし $(x_n, y_n)$ はC上の一点における外向き法線の方向余弦 $x_n=\cos(n,x)$, $y_n=\cos(n,y)$ を表わす．

したがって (5.6) を D の区域に積分した二重積分を曲線積分で与える一般公式

$$\iint_D(v\mathrm{L}[u]-uM[v])dx\,dy=\oint_C(Pdy-Qdx)=\oint_C(Px_n+Qy_n)ds \quad (5.8)$$

が得られる．(5.8) を**広義の Green の公式**という．周知の Green の公式

$$\iint_D (v\nabla_{(2)}^2 u - u\nabla_{(2)}^2 v)\,dx\,dy = \oint_C \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds \tag{5.9}$$

を一般化した公式であって $A=C=1,\ B=D=E=F=0$ のとき (5.8) は (5.9) になる．

$L[u]$ がそれの随伴表式 $M[u]$ に等しいような場合に $L[u]$ を**自己随伴表式**という．$L[u]$ と $M[u]$ との差を作り $u, u_x, u_y$ についてまとめるとその係数はそれぞれ

$$A_{xx}+2B_{xy}+C_{yy}-D_x-E_y,\ 2\{A_x+B_y-D\},\ 2\{B_x+C_y-E\} \tag{5.10}$$

となるから自己随伴のためには (5.10) の後の二式が 0 に等しいことが必要．

$$D = A_x+B_y, \quad E = B_x+C_y. \tag{5.11}$$

だがこの条件が満たされていれば (5.10) の第一式も自然に 0 になり (5.11) が (5.1) の $L[u]$ が自己随伴であるための必要で十分な条件になる．

したがって (5.1) に (5.11) を入れて最も一般な自己随伴表式は

$$\begin{aligned} L^*[u] &\equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+Fu \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}\right)+Fu \end{aligned} \tag{5.12}$$

で与えられることがわかる．この場合 (5.4), (5.5) の $P, Q$ は

$$\left.\begin{aligned} P &= v(Au_x+Bu_y)-u(Av_x+Bv_y), \\ Q &= v(Bu_x+Cu_y)-u(Bv_x+Cv_y) \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

で与えられるから広義の Green の公式は (5.12), (5.13) を (5.8) に代入することにより

$$\begin{aligned} &\iint_D (vL^*[u]-uL^*[v])\,dx\,dy \\ &= \oint_C [\{v(Au_x+Bu_y)-u(Av_x+Bv_y)\}dy \\ &\quad -\{v(Bu_x+Cu_y)-u(Bv_x+Cv_y)\}dx] \end{aligned} \tag{5.14}$$

の形をとることがわかる．

特に楕円型の場合に限れば標準化された後であれば (1.3.12) により

$$A = C = 1, \quad B = 0 \tag{5.15}$$

と選んで一般性が失われない．この場合には

$$L[u] \equiv u_{xx} + u_{yy} + Fu \tag{5.16}$$

となって広義の Green の公式 (5.14) は

$$\iint_D (vL[u] - uL[v])\,dx\,dy$$
$$= \oint_C \{(vu_x - uv_x)dy - (vu_y - uv_y)dx\} = \oint (vu_n - uv_n)\,ds \tag{5.17}$$

で与えられる.

広義の Green の公式 (5.17) を利用すると §6 で示すように自己随伴楕円型の方程式の解の二次元区域 D の内点においてとる値は D の周囲 C 上の値によって定まるということが一般に結論される.

## §6　偏微分方程式における Green 函数

自己随伴の偏微分演算子 $L$ を用いて

$$L[u] = -f(x, y) \tag{6.1}$$

の形で与えられた偏微分方程式に着目しよう. (6.1) に対し偏微分方程式

$$L[G(x, y; \xi, \eta)] = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \tag{6.2}$$

の解すなわち主要解 $G$ を考える. 見通しをよくするため $(x, y)$ を P, $(\xi, \eta)$ を Q で表わすと (6.1), (6.2) は

$$L[u(\mathrm{P})] = -f(\mathrm{P}), \tag{6.1 a}$$
$$L[G(\mathrm{P}, \mathrm{Q})] = -\delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \tag{6.2 a}$$

と書ける.

広義の Green の公式 (5.17) において $u$ には (6.1 a) の解 $u(\mathrm{P})$ を, $v$ には (6.2 a) の解 $G(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ を代入すれば, R を D の周囲 C 上の点として (R ∈ C)

$$-\iint_D G(\mathrm{P}, \mathrm{Q})f(\mathrm{P})\,d\sigma_\mathrm{P} + \iint_D u(\mathrm{P})\delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\,d\sigma_\mathrm{P}$$
$$= \oint_C \left\{G(\mathrm{R}, \mathrm{Q})\frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_\mathrm{R}} - u(\mathrm{R})\frac{\partial G(\mathrm{R}, \mathrm{Q})}{\partial n_\mathrm{R}}\right\} ds_\mathrm{R} \tag{6.3}$$

という関係が得られる. ただし $d\sigma_\mathrm{P} = dx\,dy$ を意味する.

$\delta$ 函数の性質

$$\iint_D f(\mathrm{P})\delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\,d\sigma_\mathrm{P} = \begin{cases} 0, & \mathrm{Q} \notin \mathrm{D}, \\ f(\mathrm{Q}), & \mathrm{Q} \in \mathrm{D} \end{cases} \tag{6.4}$$

によって (6.3) は次のように変形される:

$$\left.\begin{array}{ll} Q \notin D: & 0 \\ Q \in D: & u(Q) \end{array}\right\} = \iint_D G(P, Q) f(P) d\sigma_P$$
$$+ \oint_C \left\{ G(R, Q) \frac{\partial u(R)}{\partial n_R} - \frac{\partial G(R, Q)}{\partial n_R} u(R) \right\} ds_R. \qquad (6.5)$$

P, Q の役割を入れ換えれば

$$\left.\begin{array}{ll} P \notin D: & 0 \\ P \in D: & u(P) \end{array}\right\}$$
$$= \iint_D G(Q, P) f(Q) d\sigma_Q + \oint_C \left\{ G(R, P) \frac{\partial u(R)}{\partial n_R} - \frac{\partial G(R, P)}{\partial n_R} u(R) \right\} ds_R.$$

あるいは §8 に証明する Green 函数の相反性

$$G(P, Q) = G(Q, P) \qquad (6.6)$$

を用いて書き換えれば

$$\left.\begin{array}{ll} P \notin D: & 0 \\ P \in D: & u(P) \end{array}\right\} = \iint_D G(P, Q) f(Q) d\sigma_Q$$
$$+ \oint_C \left\{ G(P, R) \frac{\partial u(R)}{\partial n_R} - \frac{\partial G(P, R)}{\partial n_R} u(R) \right\} ds_R. \qquad (6.7)$$

特に (*6.1*) の右辺が恒等的に 0 に等しい場合すなわち $u$ が同次偏微分方程式

$$L[u] = 0 \qquad (6.8)$$

の解である場合には (*6.7*) は

$$\left.\begin{array}{ll} P \notin D: & 0 \\ P \in D: & u(P) \end{array}\right\} = \oint_C \left\{ G(P, R) \frac{\partial u(R)}{\partial n_R} - \frac{\partial G(P, R)}{\partial n_R} u(R) \right\} ds_R \qquad (6.9)$$

の形をとる. (*6.9*) によれば "D の内点 P での $u$ の値 $u(P)$ は D の周囲 C 上での値 $u(R), \partial u(R)/\partial n_R$ とこの公式によって密接に関係づけられている" ことがわかる.

主要解は非同次方程式 (*6.2*a) の解として定義されているから線型方程式の一般的結論からこれに属する同次方程式すなわち (*6.8*) の解だけ不定性がある. それでこの不定性を利用して境界C上で一個の境界条件を満足するように選ぶことができる. そこで第一種の境界条件

$$G_1(R, Q) = 0, \qquad R \in C \qquad (6.10)$$

を満足するものを**第一種の Green 函数**または単に **Green 函数**と呼び, 第二種

の境界条件

$$\frac{\partial G_2}{\partial n_{\rm R}}({\rm R},{\rm Q})=0, \qquad {\rm R}\in{\rm C} \tag{6.11}$$

を満足するものを**第二種の Green 函数**または **Neumann 函数**と呼び，同様に**第三種の Green 函数**（**Robin 函数**）が

$$\alpha({\rm R})\frac{\partial G_3}{\partial n_{\rm R}}({\rm R},{\rm Q})+\beta({\rm R})G_3({\rm R},{\rm Q})=0, \quad {\rm R}\in{\rm C} \tag{6.12}$$

を満たすものとして定義される．

このように $G$ を選べば偏微分方程式 (6.1) に対する種々の境界値問題の解を与える公式が簡単に求められる．特に同次方程式 (6.8) の場合だと (6.9) において第一種の Green 函数が満足する境界条件 (6.10) を入れれば

$$u({\rm P})=-\oint_{\rm C}\frac{\partial G_1({\rm R},{\rm P})}{\partial n_{\rm R}}u({\rm R})ds_{\rm R}=-\oint_{\rm C}\frac{\partial G_1({\rm P},{\rm R})}{\partial n_{\rm R}}u({\rm R})ds_{\rm R}, \tag{6.13}$$

また第二種を使ったものは

$$u({\rm P})=\oint_{\rm C}G_2({\rm R},{\rm P})\frac{\partial u({\rm R})}{\partial n_{\rm R}}ds_{\rm R}=\oint_{\rm C}G_2({\rm P},{\rm R})\frac{\partial u({\rm R})}{\partial n_{\rm R}}ds_{\rm R} \tag{6.14}$$

である．

これらの式の形からみて (6.13) は (6.8) の解である函数の D の内点での値が第一種の Green 函数 $G_1$ を仲介にして境界値 $v({\rm R})$ によって定められることを示唆し，(6.14) は同様に境界上での法線導函数の境界値 $\partial u({\rm R})/\partial n_{\rm R}$ から内点の函数の値がきめられることを示唆している．実際 (6.13), (6.14) が楕円型方程式または放物型方程式の第一種もしくは第二種の境界値問題を解く鍵となるのである．Green 函数を定める問題はそれ自身一つの境界値問題であるが，その境界値が (6.10)～(6.12) のように同次であるからより簡単である．Green 函数が求まったとすれば (6.13) から考えて

$$u({\rm P})=-\oint_{\rm C}\frac{\partial G_1({\rm P},{\rm R})}{\partial n_{\rm R}}g({\rm R})ds_{\rm R} \tag{6.15}$$

で与えられる表式は

$$\lim_{{\rm P}\to{\rm R}}u({\rm P})=g({\rm R}), \quad {\rm R}\in{\rm C} \tag{6.16}$$

という第一種の境界条件を満たす偏微分方程式 (6.8) の解，すなわち (6.8) に対する Dirichlet の問題の解であることを確かめることができる．このうち P

がDの内点である限り (*6.8*) を満足することについては, $G_1(\mathrm{P},\mathrm{R})$ が (*6.2*a) の方程式を満足することからDの内点のPに関して $L[G]=0$ となることに着目すれば $L$ を (*6.15*) に作用させて, 知れることである. 実際境界C上のR点において (*6.15*) がちょうど境界値 $g(\mathrm{R})$ をとることは (厳格な証明はめんどうであるが) $G$ が (*6.2*a) の解である場合に一般に成立する. 関係 (*6.9*) において $G=G_1$ とおけば境界条件 (*6.10*) によって (*6.13*) が得られるのであるから $\mathrm{P}\to\mathrm{R}'$, $\mathrm{R}'\in\mathrm{D}$ の場合に成立する

$$u(\mathrm{R}')=-\oint_{\mathrm{C}}u(\mathrm{R})\frac{\partial G_1(\mathrm{R}',\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}}ds_{\mathrm{R}}$$

の関係はC上で $-\partial G_1(\mathrm{R}',\mathrm{R})/\partial n_{\mathrm{R}}$ が $\delta$ 函数の性質を有することを示している. したがって (*6. 15*) で $\mathrm{P}\to\mathrm{R}',\mathrm{R}'\in\mathrm{C}$ を考えれば

$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{R}'}u(\mathrm{P})=\oint_{\mathrm{C}}\delta(\mathrm{R}'-\mathrm{R})g(\mathrm{R})ds_{\mathrm{R}}=g(\mathrm{R}') \tag{6.17}$$

となって (*6.13*) が指定の境界値をとることを暗示している.

全く同様にして

$$u(\mathrm{P})=\oint_{\mathrm{C}}G_2(\mathrm{P},\mathrm{R})N(\mathrm{R})ds_{\mathrm{R}} \tag{6.18}$$

は

$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{R}}\frac{\partial u(\mathrm{P})}{\partial n}=N(\mathrm{R}),\qquad \mathrm{R}\in\mathrm{C} \tag{6.19}$$

という第二種の境界条件を満足する偏微分方程式 (*6.8*) の解, すなわち Neumann の問題の解であることを確めることができる.

同次方程式 (*6.8*) の代りに同次でない方程式 (*6.1*) を満足する場合に境界条件としては同次の

$$u(\mathrm{R})=0,\qquad \mathrm{R}\in\mathrm{C} \tag{6.20}$$

もしくは

$$\frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}}=0,\qquad \mathrm{R}\in\mathrm{C}. \tag{6.20'}$$

あるいはさらに一般に第三種の同次の条件

$$\alpha(\mathrm{R})\frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}}+\beta(\mathrm{R})u(\mathrm{R})=0,\qquad \mathrm{R}\in\mathrm{C} \tag{6.20''}$$

の場合にでも (*6. 20*)～(*6. 20''*) の各条件に応じて (*6. 10*)～(*6. 12*) の各種の

Green 函数を使えばその解は

$$u(\mathrm{P}) = \iint_{\mathrm{D}} G(\mathrm{P},\mathrm{Q}) f(\mathrm{Q}) d\sigma_{\mathrm{Q}} \tag{6.21}$$

の形で与えられることがわかる．それは各〻の場合に (*6.7*) を利用すれば，どの場合でも境界条件から (*6.7*) の右辺の第二積分（曲線積分）は消えて結局 (*6.21*) の関係が得られるからである．逆に (*6.21*) が与えられた偏微分方程式ならびに境界条件を満足することを直接証明することができる．

この場合 $\mathrm{P} \notin \mathrm{C}$ である限り (*6.2*a) により

$$L[u(\mathrm{P})] = \iint_{\mathrm{D}} L_{\mathrm{P}}\{G(\mathrm{P},\mathrm{Q})] f(\mathrm{Q}) d\sigma_{\mathrm{Q}} = -\iint_{\mathrm{D}} \delta(\mathrm{P},\mathrm{Q}) f(\mathrm{Q}) d\sigma_{\mathrm{Q}} = -f(\mathrm{P})$$

であって (*6.1*) を満たすことがわかりまた境界条件は各〻の Green 函数が満足する (*6.10*)～(*6.12*) を通じて同じ性質が (*6.21*) で定義された $u(\mathrm{P})$ に伝わっている．

問題 1〕 同次方程式 (*6.8*) の第三種の境界条件

$$\alpha(\mathrm{R}) \frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}} + \beta(\mathrm{R}) u(\mathrm{R}) = F(\mathrm{R}), \qquad \mathrm{R} \in \mathrm{C} \tag{a}$$

を満足する解は第三種の Green 函数 (Robin 函数) (*6.20''*) を用いて

$$u(\mathrm{P}) = \oint_{\mathrm{C}} G(\mathrm{P},\mathrm{R}) \frac{F(\mathrm{R})}{\alpha(\mathrm{R})} ds_{\mathrm{R}} = -\oint_{\mathrm{C}} \frac{\partial G(\mathrm{P},\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}} \frac{F(\mathrm{R})}{\beta(\mathrm{R})} ds_{\mathrm{R}} \tag{b}$$

によって与えられる．第一式は $\beta(\mathrm{R}) = 0$ のとき (*6.18*) に一致し，第二式は $\alpha(\mathrm{R}) = 0$ のとき (*6.15*) を与える．

（ヒント） (*6.8*) の解 (*6.9*) において (*6.12*) を用いて $\partial G_3/\partial n$ を消去すれば $u(\mathrm{P}) = \oint_{\mathrm{C}} G(\mathrm{P},\mathrm{R}) \left\{ \frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}} + \frac{\beta(\mathrm{R})}{\alpha(\mathrm{R})} u(\mathrm{R}) \right\} ds_{\mathrm{R}}$ が得られ，また $G_3$ を消去すれば $u(\mathrm{P}) = -\oint_{\mathrm{C}} \frac{\partial G(\mathrm{P},\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}} \left\{ \frac{\alpha(\mathrm{R})}{\beta(\mathrm{R})} \frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}} + u(\mathrm{R}) \right\} ds_{\mathrm{R}}$.

問題 2〕 Dirichlet の問題の解に対する公式 (*6.15*) から示唆されて，

$$u(\mathrm{P}) = \oint_{\mathrm{C}} \Gamma_1(\mathrm{P},\mathrm{R}) g(\mathrm{R}) ds_{\mathrm{R}} \qquad (\mathrm{R} \in \mathrm{C}) \tag{c}$$

の形で内点の値と周上の値とが $\Gamma_1$ によって対応づけられるものと考える．この場合に (c) が Dirichlet の問題：

$$L[u] = 0, \qquad u(\mathrm{R}) = g(\mathrm{R}), \qquad \mathrm{R} \in \mathrm{C} \tag{d}$$

の解であるための条件は

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ \quad L_{\mathrm{P}}[\Gamma_1(\mathrm{P},\mathrm{R})] = 0, \\ &2^\circ \quad \Gamma_1(\mathrm{R},\mathrm{R}') = \delta(\mathrm{R},\mathrm{R}'), \qquad \mathrm{R},\mathrm{R}' \in \mathrm{C} \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

である．

（ヒント） (c) が $L[u] = 0$ を満たすために $1^\circ$ が出てくる．$\mathrm{P} \to \mathrm{R}', \mathrm{R}' \in \mathrm{C}$ のとき $u(\mathrm{R})$

$\to g(\mathrm{R}')$ であるために $g(\mathrm{R}')=\oint_{\mathrm{C}}\Gamma_1(\mathrm{R}',\mathrm{R})g(\mathrm{R})ds_{\mathrm{R}}$ から 2° が出る.

問題 3〕 Neumann の問題に対する Neumann 函数 $G_2$ を使って表わされた公式 (6. 18) を

$$u(\mathrm{P})=\oint_{\mathrm{C}}\Gamma_2(\mathrm{P},\mathrm{R})N(\mathrm{R})ds_{\mathrm{R}} \tag{f}$$

の形で表わしたとき, (f) が Neumann の問題:

$$L[u]=0,\quad \frac{\partial u}{\partial n_{\mathrm{R}}}(\mathrm{R})=N(\mathrm{R}),\qquad \mathrm{R}\in\mathrm{C} \tag{g}$$

の解であるための条件は

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & L_{\mathrm{P}}[\Gamma_2(\mathrm{P},\mathrm{R})]=0, \\ 2^\circ & \dfrac{\partial\Gamma_2(\mathrm{R},\mathrm{R}')}{\partial n_{\mathrm{R}}}=\delta(\mathrm{R},\mathrm{R}'),\qquad \mathrm{R},\mathrm{R}'\in\mathrm{C} \end{array}\right\} \tag{h}$$

である.

（ヒント） $\mathrm{P}\to\mathrm{R}',\mathrm{R}'\in\mathrm{C}$ のとき $\dfrac{\partial u}{\partial n}(\mathrm{R}')\to N(\mathrm{R}')$ であるためには $g(\mathrm{R}')=\oint_{\mathrm{C}}\dfrac{\partial\Gamma_2(\mathrm{R}',\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}'}}g(\mathrm{R})ds_{\mathrm{R}}$, これから 2° が出てくる.

## §7 Laplace の方程式の主要解

§6 でみたように偏微分方程式の境界値問題は Green 函数を見出す問題に帰着され, Green 函数を求める糸口は主要解を一個発見することにより見出される. 主要解を求める手段として Fourier 積分を使う方法は §4 においてすでに注意したように偏微分方程式の場合にも同様に通用する. この方法で Laplace の方程式の主要解を求めてみよう.

### 1) 三次元の Laplace 方程式の主要解

$$\nabla^2G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta) \tag{7.1}$$

の主要解を求めるために (2.5.4) を反覆することにより得られる.

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta)\}}dk_xdk_ydk_z \tag{7.2}$$

の積分表示式を用い, これに応じて

$$G_0(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}g(k_x,k_y,k_z)e^{i\{k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta)\}}dk_xdk_ydk_z \tag{7.3}$$

と仮定して (7.1) に代入し相当項を比較すれば

$$g(k_x,k_y,k_z)=1/(k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2) \tag{7.4}$$

が得られ, これを (7.3) に代入して

$$G_0(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\{k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta)\}}}{k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2}dk_xdk_ydk_z, \tag{7.5}$$

(7.5) の積分を計算するために $k$ 空間で球座標

$$k_x=k\sin\alpha\cos\beta,\quad k_y=\sin\alpha\sin\beta,\quad k_z=k\cos\alpha \tag{7.6}$$

を導入する．すると

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2,\quad dk_xdk_ydk_z=k^2dk\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta, \tag{7.7}$$

一方極座標空間でも

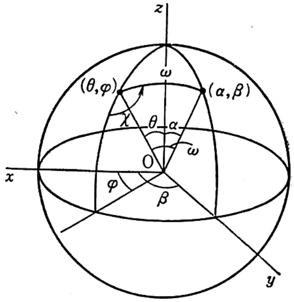
$$x-\xi=-R\sin\theta\cos\varphi,\quad y-\eta=-R\sin\theta\sin\varphi,\quad z-\zeta=-R\cos\theta \tag{7.8}$$

なる球座標を導入すると

$$k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta)$$
$$=-kR\{\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)\}$$

$(\theta,\varphi)$ 方向と $(\alpha,\beta)$ 方向とのなす角を $\omega$ とすれば

$$=-kR\cos\omega. \tag{7.9}$$




第 7.1 図

$k$ 空間における角変数 $(\alpha,\beta)$ の代りに，$(\theta,\varphi)$ 方向を新しい極の方向に選んで $\omega,\chi$ を新天頂角および方位角に選べば，立体角 $\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta$ は新変数では $\sin\omega\,d\omega\,d\chi$ に等しいから

$$I=\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\{k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)+k_z(z-\zeta)\}}}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}dk_xdk_ydk_z$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikR\{\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi-\beta)\}}dk\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikR\cos\omega}\,dk\sin\omega\,d\omega\,d\chi=2\pi\int_0^{\infty}dk\int_0^{\pi}e^{-ikR\cos\omega}\sin\omega\,d\omega, \tag{7.10}$$

しかるに

$$\int_0^{\pi}e^{-ikR\cos\omega}\sin\omega\,d\omega=\int_{-1}^{1}e^{ikRx}\,dx=\frac{e^{ikR}-e^{-ikR}}{ikR}=2\frac{\sin kR}{kR},$$
$$\therefore\quad I=\frac{4\pi}{R}\int_0^{\infty}\frac{\sin(kR)}{k}dk=\frac{4\pi}{R}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{2\pi^2}{R}.$$

ゆえに

$$G_0(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R},\quad R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \tag{7.11}$$

が求める主要解．これは §1 の例題 3 の結果と符合する．

2) **二次元の Laplace 方程式の主要解**

$$\nabla_{(2)}^2G(x,y;\xi,\eta)=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \tag{7.12}$$

$$\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)\}}dk_xdk_y, \tag{7.13}$$

$$G_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}g(k_x,k_y)e^{i\{k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)\}}dk_xdk_y \tag{7.14}$$

と仮定して (7.12) に入れ，1) と同様にして (7.5) の代りに

$$G_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\{k_x(x-\xi)+k_y(y-\eta)\}}}{k_x^2+k_y^2}dk_xdk_y. \tag{7.15}$$

極座標 $\quad k_x=k\cos\alpha,\quad k_y=k\sin\alpha,$

$$x-\xi=-R\cos\varphi,\quad y-\eta=R\sin\varphi$$

を導入して変形すれば (7.10) に対応して

$$G_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikR\cos(\varphi-\alpha)}}{k}dk\,d\varphi. \tag{7.16}$$

Bessel 函数の積分表示式 (I §11.1 参照)

$$J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos x}\,dx \tag{7.17}$$

によって

$$G_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{J_0(kR)}{k}dk. \tag{7.18}$$

(7.18) は $k\sim 0$ の近傍の不正則性から発散するが，これから（無限大の）定数 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{J_0(k)}{k}dk$ を差し引いた

$$G_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{J_0(kR)-J_0(k)}{k}dk \tag{7.19}$$

は有限に止まるから (7.19) をわれわれの主要解として選ぶ：

$$G_0(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{J_0(kR)-J_0(k)}{k}dk=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\int_1^{R}\frac{dJ_0(kR)}{dR}dR, \tag{7.20}$$

$$\frac{dG_0(R)}{dR}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\partial J_0(kR)}{\partial R}\frac{dk}{k}=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{\infty}\frac{dJ_0(\rho)}{d\rho}d\rho=-\frac{1}{2\pi R}. \tag{7.21}$$

$R$ に関して積分して

$$G_0(R)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{R}+\text{定数}.$$

(7.20) により $G_0(1)=0$ であるから，この定数は 0 に等しい．ゆえに

$$G_0(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{R}\right),\quad R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \tag{7.22}$$

これは §1 の例題 4, §2 の結果と一致している．

問題 1〕 $u$ が二次元の Poisson の方程式 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=-f(x,y)$ の解ならば [(I §14.36) 参照]

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{P}\notin\mathrm{D}: & 0\\ \mathrm{P}\in\mathrm{D}: & u(\mathrm{P})\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\mathrm{D}}f(\mathrm{Q})\log\left(\frac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}\right)d\sigma_{\mathrm{Q}}+\frac{1}{2\pi}\oint_{\mathrm{C}}\left\{\log\left(\frac{1}{r_{\mathrm{PR}}}\right)\frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}}-\frac{\partial\left(\log\dfrac{1}{r_{\mathrm{PR}}}\right)}{\partial n_{\mathrm{R}}}u(\mathrm{R})\right\}ds_{\mathrm{R}}, \tag{7.23}$$

Laplace の方程式の場合は $f(x,y)\equiv 0$ で

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{P}\notin\mathrm{D}: & 0\\ \mathrm{P}\in\mathrm{D}: & u(\mathrm{P})\end{array}\right\}=\frac{1}{2\pi}\oint_{\mathrm{C}}\left\{\log\left(\frac{1}{r_{\mathrm{PR}}}\right)\frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}}-\frac{\partial\left(\log\dfrac{1}{r_{\mathrm{PR}}}\right)}{\partial n_{\mathrm{R}}}u(\mathrm{R})\right\}ds_{\mathrm{R}}$$

が成り立つ．

（ヒント） (6.7) の $G$ に $G_0(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\dfrac{1}{2\pi}\log\left(\dfrac{1}{r_{\mathrm{PQ}}}\right)$ を入れる．

問題 2〕 問題 1 の三次元の類型は，$\mathrm{R}\in\mathrm{S}$ として

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{P}\notin\mathrm{V}: & 0 \\ \mathrm{P}\in\mathrm{V}: & u(\mathrm{P}) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\mathrm{V}} \frac{f(\mathrm{Q})}{r_{\mathrm{PQ}}} d\tau_{\mathrm{Q}} + \frac{1}{4\pi}\iint_{\mathrm{S}} \left\{ \frac{1}{r_{\mathrm{PR}}} \frac{\partial u(\mathrm{R})}{\partial n_{\mathrm{R}}} - \frac{\partial}{\partial n_{\mathrm{R}}}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{PR}}}\right) u(\mathrm{R}) \right\} d\sigma_{\mathrm{R}} \tag{7.24}$$

であることを証明せよ [(I 3.59) 参照].

(7.24) において $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r}$ は単位電荷によるポテンシアル，$\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{r}\right)$ は法線方向に向いた単位双極子によるポテンシアルを表わすから，右辺の第一項は体積 V 中にある体積密度 $f(\mathrm{Q})$ の分布を有する空間電荷によるポテンシアルを表わし，右辺の第二項は面 S 上に面密度 $\partial u/\partial n$ で分布している電荷一重層によるポテンシアルを，第三項は同じく面 S の法線方向に向いた双極モーメント $u(\mathrm{S})$ 面密度で分布している電荷二重層によるポテンシアルを表わしている．このように表面 S で囲まれた内点 P のポテンシアルは上に説明した三種のポテンシアルの和として与えられることがわかる．

二次元問題ならば (7.23) において右辺の第一項は面密度 $f(\mathrm{Q})$ で D 中に分布する面電荷によるポテンシアル，第二項は周囲 C 上に線密度 $\partial u/\partial n$ で分布している電荷一重層，第三項は C の法線方向に向いた双極モーメント $-u(\mathrm{C})$ の線密度分布をしている電荷二重層によるポテンシアルを表わしている．

$f(x,y,z)$ を閉曲面 S で囲まれた三次元区域 V において通常の函数として無限回微分可能で S の外では 0 となるような函数とする．このような不連続函数を超函数として考えると，その導超函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi)$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi) = -f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= -\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \\ &= -\iiint_{\mathrm{V}} f\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned} \tag{7.25}$$

Green の定理により

$$= -\iint_{\mathrm{S}} f\varphi\cos(n,x)\,d\sigma + \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial f}{\partial x}\varphi\,dx\,dy\,dz. \tag{7.26}$$

最後の項は通常の導函数としての $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]$ (に対応する超函数) に外ならない．その前の項は S 上の面密度が $-f\cos(n,x)$ で与えられた ($n$ は S における外向き法線) 電荷 $d\mu = -f\cos(n,x)\,d\sigma$ による特異性測度 (75 頁参照) である．

$$\mu(\varphi) = \iint_{\mathrm{S}} \varphi\,d\mu, \qquad d\mu = -f\cos(n,x)\,d\sigma, \tag{7.27}$$

従って導超函数 $\partial f/\partial x$ は Green の定理によって定まる公式 (7.26) に従って

通常の導函数 $[\partial f/\partial x]$ と S 上の測度 (7.27) の和として与えられる．同様にして上述の $f$ の超函数としての Laplacian は §3.4 例題 2 に従って

$$\nabla^2 f(\varphi)=\iint\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,\nabla^2\varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\int_V f\nabla^2\varphi\,d\tau, \quad (7.28)$$

Green の定理により

$$=\iint\int_V \varphi[\nabla^2 f]\,d\tau+\iint\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]\right)d\sigma \qquad (7.29)$$

が得られる．右辺の第一項の体積積分は通常の函数としての Laplacian (に対応する超函数) であり，これに続く曲面積分の第一項は S 上に分布された双極モーメントの面密度が $f$ に等しいような超函数二重層と，同じく面密度が $-\varphi$ で与えられた測度一重層を表わすから，超函数としての Laplacian はこのような Green の定理から定まる公式 (7.29) によって与えられる函数 Laplacian と S 上に分布する超函数二重層と測度一重層の和として表わされることを示している．

## §8 随伴 Green 函数，相反性

自己随伴型の偏微分方程式の境界値問題に対する Green 函数 $G$ の重要な役割については §6 に述べた通りである．この §8 では自己随伴と限らない場合にその役割を代行する随伴 Green 函数につき述べる．

$L[u]$ が (5.1) で与えられる一般の線型二階の偏微分表式であるとき (5.1) に対する随伴偏微分表式 (5.2) を用いて

$$M[H(x,y;\xi,\eta)]=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \qquad (8.1)$$

を満足し，その上 $H$ の境界値が適当に取られていて広義の Green の公式 (5.8) で

$$u=G(x,y;\xi,\eta),\quad v=H(x,y;\xi,\eta)$$

と選んだとき右辺の曲線積分 0 がになるような場合に，$H$ を $G$ に対する**随伴 Green 函数**という．

たとえば熱伝導の方程式の例でみると，(5.1) で

$$A=1,\quad B=C=D=0,\quad E=-1,\quad F=0 \qquad (8.2)$$

の場合として

$$L[u]\equiv\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (8.3)$$

に対して $L$ の随伴表式 $M$ は

$$M[v] \equiv \kappa^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{8.4}$$

で与えられる．

(5.4), (5.5) で (8.2) とおけば

$$P = \kappa^2 \left( v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad Q = -uv \tag{8.5}$$

であるから広義の Green の公式は今の場合

$$\int\int_D \{vL[u] - uM[v]\}\, dx\, dt = \oint_C \left\{ \kappa^2 \left( v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right) dt + uv\, dx \right\} \tag{8.6}$$

で与えられることがわかる．したがって

$$M[H(x,t;\xi,\tau)] \equiv \kappa^2 \frac{\partial^2 H(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial H(x,t;\xi,\tau)}{\partial t} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{8.7}$$

の解でC上で $H=0$ となるような $H$ は同じC上で $G=0$ となるような第一種の Green 函数に対する随伴 Green 函数になる．

たがいに随伴関係にある $G, H$ 両 Green 函数に関して，一般にその主変数 $x, y$ と副変数 $\xi, \eta$ とをとりかえると

$$G(x,y;\xi,\eta) = H(\xi,\eta;x,y) \tag{8.8}$$

なる関係が成り立つ．これを随伴 Green 函数の**相反関係**という．広義の Green の公式 (5.8) において $u = G(x,y;\xi_1,\eta_1)$, $v = H(x,y;\xi_2,\eta_2)$ とおき曲線積分が 0 となるという性質を考慮すれば

$$\int\int_D \{H(x,y;\xi_2,\eta_2)L[G(x,y;\xi_1,\eta_1)] - G(x,y;\xi_1,\eta_1)M[H(x,y;\xi_2,\eta_2)]\}dx\,dy = 0. \tag{8.9}$$

定義によって $G$ は

$$L[G(x,y;\xi,\eta)] = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \tag{8.10}$$

の解であり，$H$ は (8.1) を満足することから (8.9) は

$$\int\int_D H(x,y;\xi_2,\eta_2)\delta(x,y;\xi_1,\eta_1)\,dx\,dy = \int\int_D G(x,y;\xi_1,\eta_1)\delta(x,y;\xi_2,\eta_2)dx\,dy$$

となる．$\delta$ 函数の基本的性質 (6.4) から $(\xi_1,\eta_1)$, $(\xi_2,\eta_2)$ が D の任意の内点であるとき

$$H(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) = G(\xi_2,\eta_2;\xi_1,\eta_1)$$

の関係が成立する．これは (8.8) の相反関係に外ならない．あるいは簡単に

$$G(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = H(\mathrm{Q},\mathrm{P}) \tag{8.11}$$

と書ける．相反性は“主変数 P と副変数 Q の交換によって Green 函数はその

随伴 Green 函数に変る”ことをいい表わしている．

特に自己随伴の場合には，$G=H$ であるから

$$G(\mathrm{P},\mathrm{Q})=G(\mathrm{Q},\mathrm{P}). \tag{8.12}$$

“これが自己随伴の場合の Green 函数の相反関係である”．

## §9　一次元の波動の方程式の主要解

波動方程式の主要解，即ち偏微分方程式

$$L[G]\equiv\frac{\partial^2G}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2G}{\partial t^2}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{9.1}$$

の解 $G(x,t;\xi,\tau)$ を求める問題を考える．端のない場合を考えて

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk \tag{9.2}$$

を用い，さらに時間項も

$$\delta(t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(t-\tau)}d\omega \tag{9.3}$$

を使うことにし，これに応じて

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}g_0(k,\omega)e^{i\{k(x-\xi)-\omega(t-\tau)\}}dk\,d\omega \tag{9.4}$$

と仮定して (9.1) に代入すれば，被積分函数を比較することより

$$g_0(k,\omega)=-\frac{1}{(\omega/c)^2-k^2} \tag{9.5}$$

が得られる．したがって

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=-\frac{c^2}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}dk\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-{\omega_0}^2}d\omega.\quad \omega_0=kc. \tag{9.6}$$

そこで，まず積分

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-{\omega_0}^2}d\omega=\frac{1}{4\pi\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega-\omega_0}-\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega+\omega_0}\right)d\omega \tag{9.7}$$

につき考える．この積分は積分路上に極があるからそのままでは意味が不明であるが，極の所を適当に $\omega$ の複素平面上に避けた複素積分の極限を考えれば意味をもった積分値を得ることができる．ただし避ける例が四通り考えられるが，いまは第 9.1 図のようなものを選んでみる．その結果

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-{\omega_0}^2}d\omega=\begin{cases}0, & t<\tau, \quad (9.8)\\ \dfrac{-\sin\{\omega_0(t-\tau)\}}{\omega_0}, & \tau<t \quad (9.8')\end{cases}$$

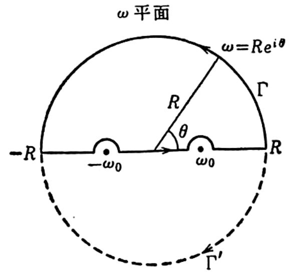
となって (9.6) の解は“時刻 $\tau$ より過去 $t<\tau$ まで静寂を続けてきた後 $\tau$ の瞬間から波動が現われるという物理的意味をもったものである”ことがわかる．(9.8) の計算は複

素積分における留数の定理を使えば容易である．すなわち $\omega$ の複素平面上で $-R$ から $R$ まで第 9.1 図のような路と半径 $R$ の上半面上の半円周 $\Gamma$ とを合わせた閉曲線 C に留数の定理を適用すれば，C の内部では函数は到る所正則で

$$\int_C \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}\,d\omega=0.$$

しかるに $\omega$ の上半面 $\Im(\omega)>0$ では $\omega=Re^{i\theta}$ と書いたとき $0<\theta<\pi$ であるから

$$e^{-i\omega(t-\tau)}=e^{R(t-\tau)\sin\theta}\cdot e^{-iR(t-\tau)\cos\theta}.$$



第 9.1 図

$t<\tau$ ならば $\Gamma$ 上で $R\to\infty$ と共に積分の値は 0 に収束する．$R\to\infty$ で $(-R,R)$ の部分は $(9.8)$ の $I$ になり，これが 0 に等しいから $(9.8)$ が成り立つことが知れた．

$\tau<t$ の場合には $\Gamma$ 上の積分は発散するから逆に下半面の半径 $R$ の半円 $\Gamma'$ を $(-R,R)$ の積分路に補った閉曲線を C′ に選んで留数の定理を適用すれば

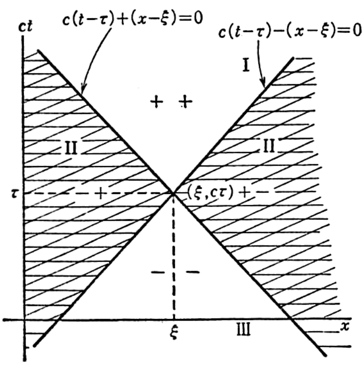
$$\int_{C'} \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}\,d\omega=-2\pi i\{\mathrm{Res}\,(\omega_0)+\mathrm{Res}\,(-\omega_0)\}^{(1)},$$

ただし $\mathrm{Res}\,(\omega_0)$, $\mathrm{Res}\,(-\omega_0)$ は被積分函数の極 $\omega=\pm\omega_0$ における留数を表わし，この場合いずれも 1 位の極だから [(I *5. 18*) 参照].

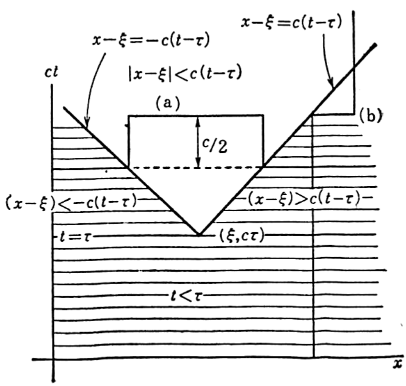
$$\mathrm{Res}\,(\omega_0)=\lim_{\omega\to\omega_0}(\omega-\omega_0)\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^2}=e^{-i\omega_0(t-\tau)}/(2\omega_0),\quad \mathrm{Res}\,(-\omega_0)=e^{i\omega_0(t-\tau)}/(-2\omega_0).$$

一方 $\Gamma'$ 上では $e^{-i\omega(t-\tau)}$ の絶対値が上同様にして $e^{R(t-\tau)\sin\theta}$ であるから $\sin\theta<0$ の結果 $\tau<t$ に対して $\Gamma'$ 上の積分は 0 に収束する．したがって $R\to\infty$ の極限で

$$I=\frac{1}{2\omega_0}i\{e^{i\omega_0(t-\tau)}-e^{-i\omega_0(t-\tau)}\}=-\frac{\sin\omega_0(t-\tau)}{\omega_0},$$



第 9.2 図



第 9.3 図

(1) C′ は負の向きの積分路だから，$2\pi i$ の前に − がつく．

ゆえに $(9.8')$ の結果が得られた.

$(9.8)$ を $(9.6)$ に入れて $\omega_0=kc$ であることを考慮して計算すれば

$$G(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau, \quad (9.9)\\ \dfrac{c}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}\frac{\sin kc(t-\tau)}{k}dk, & \tau<t. \quad (9.9')\end{cases}$$

しかるに

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)}\frac{\sin kc(t-\tau)}{k}dk$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\sin k\{c(t-\tau)+(x-\xi)\}}{k}dk+\int_0^{\infty}\frac{\sin k\{c(t-\tau)-(x-\xi)\}}{k}dk \qquad (9.10)$$

と変形して, Dirichlet の積分公式

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda k}{k}dk=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \lambda<0\end{cases} \qquad (9.11)$$

を考慮すれば, $(9.10)$ の第一項の積分は第 9.2 図に示した両軸と 45° の角をなして交わる直線 $c(t-\tau)+(x-\xi)=0$ を境界とする上下の半平面上で $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ また第二の積分は同様に $c(t-\tau)-(x-\xi)=0$ を境として上下の半平面上で $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ の値をとるから, 結局図の斜線区域 II では 0, I では $\pi$, III では $-\pi$ となる. いまは $(9.9')$ の $\tau<t$ の場合であったから全体としては,

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & \begin{cases}t<\tau,\\ \tau<t, & |x-\xi|>c|t-\tau|,\end{cases} \quad (9.12)\\ \dfrac{c}{2}, & \tau<t, \quad |x-\xi|<c|t-\tau|. \quad (9.12')\end{cases}$$

これが求める波動方程式の一個の主要解で, 第 9.3 図に示したように “過去 $t<\tau$ に対しては全空間に波は全くない静寂の世界に時刻 $t=\tau$ に突然 $x=\xi$ で点衝撃が加えられ, これから $x$ の正負両方向に波動の伝播が起るという物理的意味をもっている”. $t$ を定めて積分曲面の $t=t$ での切口を考えてみると第 9.3 図の (a) のように $|x-\xi|=ct$ の範囲にだけ $c/2$ の一定の隆起が起っていることが知れ, また場所を定めて $x=x$ での切口を考えると $t=\tau+|x-\xi|/c$ の時刻までは 0 であったものでこの瞬間に突然 $c/2$ の隆起が現われて, その後そのままの高さを続けることが知れる [第 9.3 図の (b)].

主要解は同次でない方程式 $(9.1)$ の解という意味でこれに対する同次方程式すなわち波動の方程式の任意の解を重ね合わせたものもまた解となる. 特に境界条件が課せられた有限区域に対する Green 函数はこの不定性を利用して境

界条件を満足するように定めてやればよい．なお他の形の主要解や物理的意味については §4.3 で再び触れる機会がある．

## §10　熱伝導の方程式の主要解

波動の方程式の場合の §9 の取扱いと大体同様（より簡単）であるから簡単に大要を説明する．

$$L[G_0(x,t;\xi,\tau)] \equiv \kappa^2\frac{\partial^2 G_0(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^2}-\frac{\partial G_0(x,t;\xi,\tau)}{\partial t}$$
$$= -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{10.1}$$

において

$$\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\{k(x-\xi)-\omega(t-\tau)\}}\,dk\,d\omega,$$

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} g_0(k,\omega)e^{i\{k(x-\xi)-\omega(t-\tau)\}}\,dk\,d\omega \tag{10.2}$$

を代入すれば

$$g_0(k,\omega)=\frac{-1}{i\omega-(\kappa k)^2} \tag{10.3}$$

が得られ，主要解が

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)}\,dk\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{i\omega-(\kappa k)^2}d\omega \tag{10.4}$$

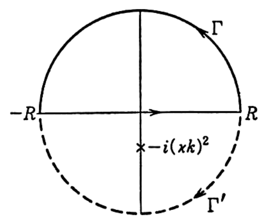
の形に定まる．

積分

$$I(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{i\omega-(\kappa k)^2}d\omega \tag{10.5}$$

を留数の方法で計算すると半円 $\Gamma, \Gamma'$ に沿う部分の積分の取扱いは §9 同様で，$t<\tau$ のときは $\omega$ 平面の上半面の $\Gamma$ に沿うものは 0 に収束し，$t>\tau$ のときは下半面の $\Gamma'$ に沿うものが 0 になる．$(-R,R)$ の積分は §9 の場合と異なって実軸にそのまま沿っていればよい．極は $\omega=-i(\kappa k)^2$ のみでその点の留数は

$$(\mathrm{Res})_{\omega=-i(\kappa k)^2}=\lim_{\omega\to -i(\kappa k)^2}\{\omega+i(\kappa k)^2\}\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{i\omega-(\kappa k)^2}$$
$$=\frac{e^{-(t-\tau)(\kappa k)^2}}{i},$$



第 10.1 図

したがって (10.5) は

$$I=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ -2\pi e^{-(t-\tau)(\kappa k)^2}, & \tau<t.\end{cases} \tag{10.6}$$

したがって (10.4)～(10.6) から

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\kappa^2(t-\tau)k^2+i(x-\xi)k}\,dk, & \tau<t.\end{cases}\tag{10.7}$$

積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2+bk}\,dk=\frac{e^{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}}{a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{e^{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}}{a}\sqrt{\pi}$$

を用いれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\kappa^2(t-\tau)k^2+i(x-\xi)k}\,dk=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

ゆえに

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau, \quad (10.8)\\ \dfrac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}, & \tau<t \quad (10.8')\end{cases}$$

が求める熱伝導の方程式の主要解である．

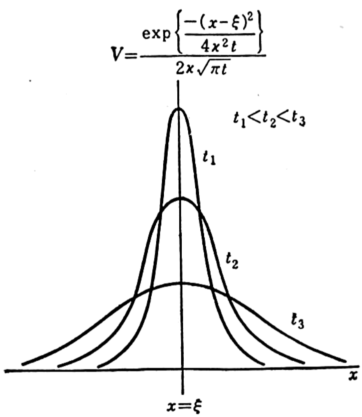
(10.8′) $\tau<t$ に対しては (10.1) に対する同次方程式である熱伝導の方程式そのもの：

$$\kappa^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0\tag{10.9}$$

の一特解である[(1)]．この解

$$V(x,t;\xi,\tau)=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\tag{10.10}$$

は物理的に時刻 $t=\tau$ に場所 $x=\xi$ におかれた強度1の点熱源を表わしている．実際 (10.10) のグラフを種々な $t-\tau$ の値に対して $x$ の函数として描いてみると第 10.2 図のように $x=\xi$ に関して左右対称の曲線であるが，時間が経っても対称点は動かず，分布は $t-\tau$ が大きくなると共に次第になだらかに裾を引いた形になっていく．逆に $t-\tau\to 0$ と共に山は




第 10.2 図

(1)　本節の最後の例題参照．

$x=\xi$ の付近で無限に高くなり $x\neq\xi$ では到る所で0に近づく．しかし $V$ を $\xi$ について $(-\infty,\infty)$ にわたって積分したものは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi t}}d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=1 \qquad (10.11)$$

の関係から明らかなように任意の時刻に $\xi$ 軸と $V$ 曲線とは等しい面積 $=1$ を囲んでいる．熱伝導の方程式の解で $t=\tau$ において $\delta(x-\xi)$ 的な振舞いをする意味で点熱源という．強度が1というのは (*10.11*) によって拡散していく熱（または拡散物質）の量が1であると考えられるからである．

(*10.8*)～(*10.8′*) の $G_0(x,t;\xi,\tau)$ は過去 $t<\tau$ には全空間で 0 で続いてきて，$t=\tau$ で突然 $x=\xi$ に強度1の点熱源が現われ，時間と共に消散していく熱伝導（物質拡散）現象を物理的に表わしている．

例題〕 一次元熱伝導の方程式

$$\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad \text{(a)}$$

を変数分離の方法 $u(x,t)=X(x)T(t)$ で求め

$$u(x,t)=e^{-\kappa^2k^2t}\cos k(x-\xi) \qquad \text{(b)}$$

の形の解を求めよ．(b) をパラメタ $k$ に関して積分し

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\kappa^2k^2t}\cos k(x-\xi)\,dk=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2t}}}{2\kappa\sqrt{\pi t}} \qquad \text{(c)}$$

の形の解があることを確かめよ．(b) に現われているパラメタ $k,\xi$ 両方について重ね合わせて

$$u(x,t)=\int e^{-\kappa^2k^2t}\,dk\int f(\xi)\cos k(x-\xi)\,d\xi \qquad \text{(d)}$$

の二重積分の形のものも解になる．たとえば

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\kappa^2k^2t}\,dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos k(x-\xi)\,d\xi \qquad \text{(e)}$$

は (a) の解であって

$$u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos k(x-\xi)\,d\xi=f(x),$$

すなわち初期値が $f(x)$ に等しい．

## §11　長方形区域における Green 函数と境界値問題

**1)　二辺の長さが $a, b$ の長方形に対する第一種の Green 函数**

**a)　二重 Fourier 級数による表現**

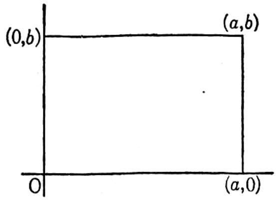
$$\left.\begin{aligned}\nabla_{(2)}^2G_1(x,y;\xi,\eta)&=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta),\\ 0\leqq x\leqq a,\ 0&\leqq y\leqq b.\end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

(*2.4.17′*) を利用して $x=0,\ x=a$ で 0 となるような Fourier 級数の形で $\delta(x-\xi)$ を作れば

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}, \qquad (11.2)$$

同様に

$$\delta(y-\eta)=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b}. \qquad (11.2')$$




第 11.1 図

これに応じて $x=0, a$ および $y=0, b$ で 0 となる境界条件を満たす $\nabla^2_{(2)}u(x,y)=0$ の固有函数 : $\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$ の二重級数の形で $G_1$ を展開し

$$G_1(x,y;\xi,\eta)=\sum_{m,n=1}^{\infty}g_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \qquad (11.3)$$

(*11.2*)~(*11.2′*) および (*11.3*) を (*11.1*) に代入して

$$\pi^2\sum_{m,n}\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}g_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$
$$=\frac{4}{ab}\sum_{m,n}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

より

$$g_{mn}=\frac{4}{\pi^2 ab}\frac{\sin\dfrac{m\pi\xi}{a}\sin\dfrac{n\pi\eta}{b}}{(m/a)^2+(n/b)^2}, \qquad (11.4)$$

ゆえに

$$G_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{4}{\pi^2 ab}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\sin\dfrac{m\pi\xi}{a}\sin\dfrac{n\pi\eta}{b}}{(m/a)^2+(n/b)^2} \qquad (11.5)$$

が求める長方形区域に対する第一種の Green 函数である.

b) **単一 Fourier 級数による表現** (*11.1*) において $x$ に関する第一種の境界条件

$$G_1(0,y)=G_1(a,y)=0$$

だけに着目して $\delta(x-\xi)$ には (*11.2*) を入れ, これに対応して

$$G_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}g_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a} \qquad (11.6)$$

と仮定して (*11.2*), (*11.6*) を (*11.1*) に入れ相当項を比較すれば (*3.31*) の形の常微分方程式

$$\frac{d^2g_n}{dy^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2g_n=-\delta(y-\eta) \qquad (11.7)$$

を得る. (*3.5*) と同様この解 (主要解) の一階微分係数は不連続点 $y=\eta$ で

$$\frac{dg_n}{dy}(\eta+0,\eta)-\frac{dg_n}{dy}(\eta-0,\eta)=-1 \qquad (11.8)$$

の不連続性がある. 両端での同次境界条件

$$g_n(0,\eta)=0,\quad g_n(b,\eta)=0 \tag{11.9}$$

から

$$g_n(y,\eta)=\begin{cases}\gamma_n \sinh(n\pi y/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta), & 0<y<\eta,\\ \gamma_n \sinh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-y), & \eta<y<b\end{cases} \tag{11.10}$$

と仮定し，(*11.8*) の不連続性を示すように $\gamma_n$ を定めることを試みよう．すると

$$\frac{dg_n(\eta-0,\eta)}{dy}-\frac{dg_n(\eta+0,\eta)}{dy}=\frac{n\pi}{a}\gamma_n\{\cosh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta)$$

$$+\sinh(n\pi\,\eta/a)\cosh(n\pi/a)(b-\eta)\}=\frac{n\pi}{a}\gamma_n\sinh(n\pi b/a)=1,$$

ゆえに

$$\gamma_n=\frac{a}{n\pi\sinh(n\pi\,b/a)}. \tag{11.11}$$

(*11.11*) を (*11.10*) に入れて

$$g_n(y,\eta)=\frac{a}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}\begin{cases}\sinh(n\pi y/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta), & y<\eta,\\ \sinh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-y). & \eta<y.\end{cases} \tag{11.12}$$

ゆえに $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ の四直線を四辺とする長方形に関する Laplace の方程式の第一種の Green 函数として

$$G_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi\xi}{a}}{n\sinh(n\pi b/a)}\begin{cases}\sinh(n\pi y/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta), & y<\eta,\\ \sinh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-y), & \eta<y\end{cases} \tag{11.13}$$

を得る．

二次元の長方形区域に関して Poisson の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,y),\qquad 0<x<a,\,0<y<b \tag{11.14}$$

の第一種の境界条件

$$u(0,y)=u(a,y)=0,\quad u(x,0)=u(x,b)=0 \tag{11.15}$$

を満たす解は公式 (*6.21*) に (*11.5*) もしくは (*11.13*) を入れた

$$u(x,y)=\frac{4}{\pi^2 ab}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{(m/a)^2+(n/b)^2}\int_0^a\int_0^b f(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi d\eta \tag{11.16}$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x}{a}}{n\sin(n\pi\,b/a)}\int_0^a\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi\left\{\int_0^y\sinh(n\pi\eta/a)\sinh(n\pi/a)(b-y)\,f(\xi,\eta)d\eta\right.$$

$$\left.+\int_y^b\sinh(n\pi y/a)\sinh(n\pi/a)(b-\eta)\;f(\xi,\eta)\,d\eta\right\} \tag{11.17}$$

によって与えられる

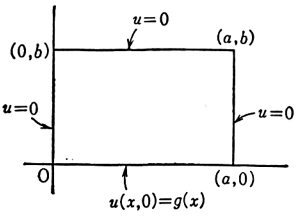
2) **長方形に関する Laplace の方程式の Dirichlet の問題** 上に求めた第一種の Green 函数の結果を用いて $x=0$, $x=a$, $y=b$ 三辺上で0となり $y=0$ 上では与えられた $x$ の函数 $g(x)$ に等しいような境界条件：

$$u(0,y)=u(a,y)=u(x,b)=0, \tag{11.18}$$

$$u(x,0)=g(x) \tag{11.19}$$

の下に長方形区域 $0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b$ に対する Laplace の方程式の解を求めてみよう．公式 (*6.13*) を利用し，$x=0, a,\ y=b$ の三辺上では境界値を 0 ととってあることを考慮すると一辺 $y=0$ だけで

$$\Gamma_1(x,y;\xi,\eta)=-\frac{\partial G_1(x,y;\xi,\eta)}{\partial n_C}$$
$$=\frac{\partial G_1(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta} \tag{11.20}$$



第 11.2 図

の値を求めればよい．ゆえに (*11.13*) の下式を $\eta$ に関して微分してから $\eta=0$ ととれば

$$\Gamma_1(x,y;\xi,0)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi\xi}{a}}{\sinh(n\pi b/a)}\sinh\left\{\frac{n\pi}{a}(b-y)\right\}, \tag{11.21}$$

ゆえに (*6.13*) によって求める Dirichlet の問題の解

$$u(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\{(n\pi/a)(b-y)\}}{\sinh(n\pi b/a)}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a g(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi \tag{11.22}$$

を得る．これを変形してまとまった式に表わすことについては I§14.18 例 3 をみよ．

同じ問題の解を §6 の問題 2 での (e) 式で与えられた $\Gamma_1(\mathrm{P},\mathrm{R})$ を利用して解いてみよう．

$\Gamma_1$ は主変数 $\mathrm{P}(x,y)$ に関して (e) の 1°, 2° を満たすべきだから，1° すなわち Laplace の方程式の解で $x=0,a$ で 0 となるものとして

$$\Gamma_1(\mathrm{P},\mathrm{R})=\Gamma_1(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\frac{\sinh\dfrac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{11.23}$$

をとり，2° を満足させるため，R を $y=0$ 上の点 $(0,\xi)$ に選んだとき R′ を R 上に収束させて $\Gamma_1(\mathrm{R}',\mathrm{R})=\delta(\mathrm{R}',\mathrm{R})$ を成立させてやればよい．

$$\delta(\mathrm{R}',\mathrm{R})=\delta(x-\xi)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a} \tag{11.24}$$

の表式を選んで $\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{R}'}\Gamma_1(\mathrm{P},\mathrm{R})_{y=0}$ が (*11.24*) に一致するためには

$$\gamma_n=\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a} \tag{11.25}$$

が成り立たねばならない．ゆえに

$$\Gamma_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\dfrac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}, \tag{11.26}$$

したがって §6 問題 2, (c) の公式により

$$u(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a g(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi, \tag{11.27}$$

これは当然 (*11.22*) と一致している.

問題 1〕 方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ を変数分離の方法で直接解き Fourier 展開を利用して (*11.22*) の解を求めよ [I §8.14 例 2].

**3) 長方形に関する Helmholtz の方程式の Neumann 函数と Neumann の問題**

Neumann 函数すなわち第二種の Green 函数は

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}+k^2G_2=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta),\qquad 0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b \tag{11.28}$$

の境界条件

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(0,y;\xi,\eta)=\frac{\partial G_2}{\partial x}(a,y;\xi,\eta)=0, \tag{11.29}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial y}(x,0;\xi,\eta)=\frac{\partial G_2}{\partial y}(x,b;\xi,\eta)=0 \tag{11.29'}$$

を満たすものとして定義されている.

境界条件 (*11.29*) と Green 函数の相反性から

$$G_2(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n g_n(y)\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a},\ \varepsilon_0=2,\ \varepsilon_n=1,\ n=1,2,\cdots \tag{11.30}$$

と仮定し，また表式

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a} \tag{11.31}$$

を用い (*11.30*), (*11.31*) を (*11.28*) に代入し相当項を比較すれば，$g_n(y)$ は常微分方程式

$$\frac{d^2g_n}{dy^2}+\left\{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right\}g_n=-\delta(y-\eta) \tag{11.32}$$

の境界条件

$$\frac{dg_n(0,\eta)}{dy}=\frac{dg_n(b,\eta)}{dy}=0 \tag{11.33}$$

を満足するものでなければならない. (*11.32*), (*11.33*) の形から

$$g_n(y,\eta)=\begin{cases}\gamma_n\cos\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,y\right)\cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}(b-\eta)\right\}, & 0\leqq y\leqq\eta\\ \gamma_n\cos\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}(b-y)\right)\cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,\eta\right\}, & \eta\leqq y\leqq b\end{cases} \tag{11.34}$$

と仮定して $g_n$ の導函数の不連続性を定める条件式 (*3.35*) に入れれば

$$\frac{dg_n(\eta+0,\eta)}{dy}-\frac{dg_n(\eta-0,\eta)}{dy}=\gamma_n\kappa[\sin\kappa(b-y)\cos\kappa\eta+\sin\kappa y\cos\kappa(b-\eta)]_{y=\eta}$$

$$=\gamma_n\kappa\sin\kappa b=-1,\qquad ただし\ \ \kappa=\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \tag{11.35}$$

(*11.35*) より $\gamma_n = -1/\kappa \sin \kappa b,$

(*11.34*) に代入して

$$g_n(y,\eta) = -\frac{1}{\kappa \sin \kappa b}\begin{cases}\cos(\kappa y)\cos\{\kappa(b-\eta)\}\\ \cos\{\kappa(b-y)\}\cos(\kappa\eta)\end{cases}, \qquad \kappa = \sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \qquad (11.36)$$

ゆえに $G_2(x,y;\xi,\eta)$ は次のように定まる.

$$G_2(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{cosec}\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,b\right)}{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}\varepsilon_n \cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{a}$$

$$\begin{cases}\cos\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,y\right)\cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}(b-\eta)\right\}, & 0\leqq y\leqq \eta, \qquad (11.37)\\ \cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}(b-y)\right\}\cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,\eta\right\}, & \eta\leqq y\leqq b. \qquad (11.37')\end{cases}$$

以上の結果を利用して Helmholtz の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2 u = 0, \qquad 0\leqq x\leqq a, 0\leqq y\leqq b \qquad (11.38)$$

に対する Neumann の問題

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(b,x) = 0,\\ &\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = g(x)\end{aligned}\right\} \qquad (11.39)$$

の解を公式 (*6.14*) を利用して求めることができる. (*6.14*) の右辺の曲線積分の中で $x=0,\ x=a,\ y=b$ 上でのものは (*11.39*) により消えるから結局

$$u(\xi,\eta) = \int_0^a G_2(x,0;\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)dx. \qquad (11.40)$$

(*11.37*) で $y=0$ とおいて

$$G_2(x,0;\xi,\eta)$$

$$= -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{cosec}\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,b\right)}{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi\xi}{b}\cos\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}(b-\eta)$$

を (*11.40*) に代入する.

$(x,y)$ と $(\xi,\eta)$ の役割を入れかえて書けば求める解は

$$u(x,y) = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{cosec}\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\,b\right)\cos\left\{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}(b-y)\right\}}{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\varepsilon_n\cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a g(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{a}d\xi \qquad (11.41)$$

で与えられる.

## §12 円筒に関する Green 函数

**1) 無限円筒に関する Laplace 方程式の Neumann 函数** 簡単のため軸対称の場合の

みを取り扱う.(一般の場合にこれに角部分を補うことは簡単であるから読者がこの場合の拡張を自ら試みていただきたい.)

$$\nabla^2 G \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -\frac{\delta(r)\delta(z)^{(1)}}{2\pi r} \quad (-\infty<z<\infty, 0\leqq r\leqq a) \qquad (12.1)$$

の主要解を求めるため $\delta(z)$ に関しては (2.5.4) から

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{izk}\,dk, \qquad -\infty<z<\infty \qquad (12.2)$$

とおき, また (2.4.19′) から得られる関係

$$\delta(r-\rho) = \sqrt{\frac{r}{\rho}}\delta(r-\rho) = \frac{2}{a^2}r\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right)J_0\left(\kappa_l\frac{\rho}{a}\right)}{\{J_0(\kappa_l)\}^2}, \qquad \text{ただし}\quad J_0'(\kappa_l)=0 \quad (12.3)$$

において $\rho\to 0$ の極限を考えて

$$\frac{\delta(r)}{r} = \frac{2}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right)}{\{J_0(\kappa_l)\}^2}, \qquad (12.4)$$

ゆえに

$$-\frac{\delta(r)\delta(z)}{2\pi r} = \frac{-1}{2\pi^2 a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right)}{\{J_0(\kappa_l)\}^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izk}\,dk. \qquad (12.5)$$

これに応じて $G$ も

$$G_2(r,z) = \sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_l(k) J_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right)e^{izk}\,dk \qquad (12.6)$$

の形に仮定して

$$\nabla^2 G_2(r,z) = -\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{k^2+(\kappa_l/a)^2\}g_l(k)J_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right)e^{izk}\,dk \qquad (12.7)$$

を得る[(2)]. (12.5), (12.7) を (12.1) に代入して

$$g_l(k) = \frac{1}{2\pi^2 a^2\{J_0(\kappa_l)\}^2\{k^2+(\kappa_l/a)^2\}},$$

ゆえに

$$G_2(r,z) = \frac{1}{2\pi^2 a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right)}{\{J_0(\kappa_l)\}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izk}}{k^2+(\kappa_l/a)^2}\,dk. \qquad (12.8)$$

§4 問題 1 (88 頁) に現われたと同じ方法で

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{izk}}{k^2+(\kappa_l/a)^2}\,dk = \frac{e^{-(\kappa_l/a)|z|}}{2(\kappa_l/a)}$$

であることがわかるから

---

(1) $\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$ に対応する極座標の表式は $\{\delta(r-\rho)/r\}\delta(\varphi-\psi)$ である. $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$ をかけて全平面に積分したとき $\iint \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\,dx\,dy = \int_0^\infty \delta(r-\rho)dr\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\psi)\,d\varphi = 1$ だからである. われわれの場合のように軸対称の解を問題にするときは $\delta(r)/2\pi r$ がこれに代る: $\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\{\delta(r)/2\pi r\}\,r dr\,d\varphi = 1$.

(2) $$\frac{d^2 J_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dJ_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right)}{dr} = -\left(\frac{\kappa_l}{a}\right)^2 J_0\left(\kappa_l\frac{r}{a}\right).$$

$$G_2(r,z)=\frac{1}{2\pi a}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_0\left\{\kappa_l\dfrac{r}{a}\right\}e^{-(\kappa_l/a)|z|}}{\kappa_l\{J_0(\kappa_l)\}^2} \tag{12.9}$$

が求める Neumann 函数である．(*12.9*) は (*12.1*) の解，すなわち Laplace 方程式の主要解で $J_0'(\kappa_l)=0$ からその動径方向の導函数は円筒面 $r=a$ 上で0となるからである．

2)　**円に関する波動の方程式の Green 函数**

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{12.10}$$

なるとき，これに対する主要解，すなわち

$$L[G_1]=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(t) \tag{12.11}$$

の解 $G_1(r-\rho,\varphi-\psi,t)$ の解で円筒面 $r=a$ 上で

$$G_1(a-\rho,\varphi-\psi,t)=0 \tag{12.12}$$

となる境界条件を満たす第一種の Green 函数を求める．

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\,d\omega$$

を考慮し $G_1$ を波数 $\omega$ に関して分解した形

$$G_1(r-\rho,\varphi-\psi,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g_1(r-\rho,\varphi-\psi,\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \tag{12.13}$$

とおけば，波数 $\omega$ の単色波の強度 $g_1$ をきめる式は

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g_1}{\partial\varphi^2}+k^2 g_1=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta),\qquad k=(\omega/c) \tag{12.14}$$

で与えられる．

118頁脚注に述べたように $\delta(x-\xi)\delta(y-n)$ を極座標で表わせば，$\delta(r-\rho)\delta(\varphi-\psi)/r$ と書けるから (*2.4.19*) および (*2.4.17*) から容易に出せる

$$\frac{\delta(r-\rho)}{r}=\sqrt{\frac{r}{\rho}}\frac{\delta(r-\rho)}{r}\frac{2}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\lambda_{n,l}\dfrac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\dfrac{\rho}{a}\right)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2},$$

$$\text{ただし}\quad J_n(\lambda_{n,l})=0, \tag{12.15}$$

$$\delta(\varphi-\psi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in(\varphi-\psi)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi),$$

$$\text{ただし}\quad \varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1,2,3,\cdots \tag{12.16}$$

の関係を (*12.14*) の右辺に入れる．

これに対応して (*12.14*) の解 $g_1$ を

$$g_1(r-\rho,\varphi-\psi,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}c_{n,l}\varepsilon_n J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)\cos n(\varphi-\psi),$$

$$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1,2,\cdots \tag{12.17}$$

と仮定すれば

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g_1}{\partial\varphi^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}c_{n,l}\,\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)\left\{\frac{\partial^2 J_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial J_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}J_n\right\}$$

$$= -(\lambda_{n,l}/a)^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi-\psi) c_{n,l} J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right) \tag{12.18}$$

と書けるから (12.15), (12.16), (12.18) を (12.14) に代入して

$$c_{n,l} = \frac{1}{\pi a^2} \frac{J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{(\lambda_{n,l}/a)^2 - k^2}. \tag{12.19}$$

(12.19) を (12.17) に代入して

$$g_1(r-\rho, \varphi-\psi, \omega) = \frac{c^2}{\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \cos n(\varphi-\psi)}{(\omega_{n,l}^2-\omega^2)\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2} J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right) J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right),$$

$$\text{ただし}\quad \omega_{n,l} = (c\lambda_{n,l}/a). \tag{12.20}$$

したがって (12.13) に入れて

$$G_1(r-\rho, \varphi-\psi, t)$$
$$= \frac{c^2}{\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \cos n(\varphi-\psi)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2} J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right) J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right) \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{n,l}^2-\omega^2} d\omega. \tag{12.21}$$

前出の積分公式 (12.8) により

$$G_1(r-\rho, \varphi-\psi, t) = \frac{c}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \cos n(\varphi-\psi) J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right) J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{\lambda_{n,l}\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}$$
$$\begin{cases} 0, & 0<t, \\ \sin(c\lambda_{n,l}t/a), & t<0 \end{cases} \tag{12.22}$$

が求める第一種の Green 函数である。

# 第 4 章　初期値，境界値問題における種々の解法

## §1　端のない空間-1　波動方程式の純初期値問題―普通の重ね合わせ

端のない空間に関する問題は有限の所での境界条件が課せられないから純初期値問題の形をとる．例として，三次元空間の波動の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u,\qquad -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,\ -\infty<z<+\infty \tag{1.1}$$

の初期条件

$$u(x,y,z,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=\psi(x,y,z) \tag{1.2}$$

を満たす $0<t$ に対する解を求めよう．

(1.1) は変数分離の方法で解くことができる．特に

$$u(x,y,z,t)=ce^{i\{k_x x+k_y y+k_z z-\omega t\}} \tag{1.3}$$

の形の進行性平面波を表わす解がある．(1.3) の形を仮定して (1.1) に代入すれば

$$\omega=\pm c\sqrt{k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2} \tag{1.4}$$

の条件が得られる．(1.4) を (1.3) に入れ，さらにそれを逆方向に進む波，すなわち (1.3) の共役複素解との結合である $e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}\sin(ct\sqrt{k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2})$ の形のものを重ね合わせた

$$u(x,y,z,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}A(k_x,k_y,k_z)e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}\frac{\sin(ct\sqrt{k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2})}{c\sqrt{k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2}}dk_x dk_y dk_z \tag{1.5}$$

の形の解が考えられる．

(1.2) の第一条件は $\sin(ct\sqrt{k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2})$ の項によって自然に満たされている．第二条件を満足させるために

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=\iiint_{-\infty}^{\infty}A(k_x,k_y,k_z)e^{i\{k_x x+k_y y+k_z z\}}dk_x dk_y dk_z \tag{1.6}$$

を，$\psi(x,y,z)$ を三重の Fourier 積分に展開した次の形

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_x x+k_y y+k_z z\}}dk_x dk_y dk_z\cdot$$

$$\cdot\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\eta,\zeta)e^{-i\{k_x\xi+k_y\eta+k_z\zeta\}}d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{1.7}$$

と比較すれば

$$A(k_x,k_y,k_z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\eta,\zeta)e^{-i\{k_x\xi+k_y\eta+k_z\zeta\}}d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

の関係が得られて

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_xx+k_yy+k_zz\}}\frac{\sin ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}{c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}dk_xdk_ydk_z\cdot$$
$$\cdot\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\eta,\zeta)e^{-i\{k_x\xi+k_y\eta+k_z\zeta\}}d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (1.8)$$

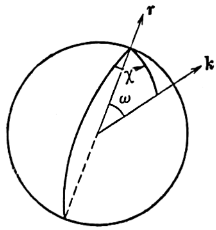
という形式的な解が定められる．積分の順序の変更が許される場合を考え

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{c(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}I(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)\psi(\xi,\eta,\zeta)d\xi\,d\eta\,d\zeta. \qquad (1.9)$$

ここに

$$I(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)$$
$$=\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2})}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}e^{i\{(x-\xi)k_x+(y-\eta)k_y+(z-\zeta)k_z\}}dk_xdk_ydk_z \qquad (1.10)$$

と書いてみる．(1.10) の計算には (3.7.5) の計算と大体同様に $k$ 空間での球座標を選べば簡単になる．すなわち $\boldsymbol{k}(k_x,k_y,k_z)$ と，$\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 両ベクトルのなす角を $\omega$ として $k_xx+k_yy+k_zz=kr\cos\omega$ と書き，$k$ 空間での球座標の軸をベクトル $\boldsymbol{r}$ に一致させてとり普通の角変数 $\theta,\varphi$ の代りに $\boldsymbol{r}$ から測った角 $\omega$ および $\boldsymbol{r}$ 軸の周りの方位角 $\chi$ を新変数に選べば $k$ 空間での体積片 $d\tau_k$ は $dk_xdk_ydk_z=k^2dk\sin\omega\,d\omega\,d\chi$ と書けるから



第 1.1 図

$$I=\int_0^{2\pi}d\chi\int_0^{\infty}\sin(ctk)k\,dk\int^{\pi}e^{ikr\cos\omega}\sin\omega\,d\omega=\frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}\sin kct\sin kr\,dk,$$
$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

と計算される [(3.7.10) 参照]．(2.5.6′) によれば，これは

$$I(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)=2\pi^2\frac{\delta(ct-r)}{r}. \qquad (1.11)$$

(1.11) を (1.9) に代入して

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4c\pi}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\eta,\zeta)\frac{\delta(ct-r)}{r}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$
$$\xi-x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad \eta-y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad \zeta-z=r\cos\theta$$

により球座標に移して計算すれば

$$=\frac{1}{4c\pi}\int_0^{\infty}r\,dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\cdot$$
$$\cdot\int_0^{2\pi}\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)\delta(ct-r)d\varphi,$$

角部分に関する平均を

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)d\varphi\Big/\int^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$
$$=\overline{\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)}$$

と書けば

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{c}\int_0^{\infty}\overline{\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)}\delta(ct-r)r\,dr$$

$$= t\,\overline{\psi(x+ct\sin\theta\cos\varphi,\, y+ct\sin\theta\sin\varphi,\, z+ct\cos\theta)}. \tag{1.12}$$

“この計算から明らかなように時刻 $t$ における場所 $x, y, z$ での波動は，この点からの距離が $ct$ に等しいような各点からの素波の全部が重ね合わされたものとして与えられていることがわかる”(Huygens の原理). (*1.12*) を $t$ に関して微分して $t=0$ とおくことによって (*1.2*) の第二条件が満たされていることを簡単に確かめることができる.

$u(x, y, z, t)$ が (*1.1*) の解ならば，$v=\partial u/\partial t$ もまた同じ方程式の解である. ゆえに (*1.12*) を微分して $\psi$ の代りに $\varphi$ と書きかえた

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t}\{t\,\overline{\varphi(x+ct\sin\theta\cos\varphi,\, y+ct\sin\theta\sin\varphi,\, z+ct\cos\theta)}\} \tag{1.13}$$

が一つの波動方程式の解である. (*1.13*) およびそれを微分した式で $t=0$ と代入すれば (*1.13*) は

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = 0 \tag{1.14}$$

という初期条件を満足することが確かめられる[1].

したがって重ね合わせの原理から (*1.12*), (*1.13*) を加えた

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t}\{t\,\overline{\varphi(x+ct\sin\theta\sin\varphi,\, y+ct\sin\theta\sin\varphi,\, z+ct\cos\theta)}\}$$
$$+t\,\overline{\psi(x+ct\sin\theta\sin\varphi,\, y+ct\sin\theta\sin\varphi,\, z+ct\cos\theta)} \tag{1.15}$$

は一般の初期条件

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z) \tag{1.16}$$

の解であることがわかる. このようにして三次元の波動の方程式に対する一般の初期値問題が解けたのである.

## §2 端のない空間-2 熱伝導方程式の純初期値問題—広義の Green の公式の応用

一次元の熱伝導の方程式

$$L[u] \equiv \kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.1}$$

---

(1) (*1.14*) の第一式は (*1.13*) の右辺で $t=0$ とおいてすぐ出る. 第二式は $t\bar{\varphi}$ が波動の方程式の解であること：$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\bar{\varphi}) = c^2\nabla^2(t\bar{\varphi}) = c^2t\nabla^2\bar{\varphi}$ から $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\bar{\varphi}) = c^2t\nabla^2\bar{\varphi}$ で $t=0$ とおいて得られる.

の純初期値問題：

$$u(x,0)=f(x) \tag{2.2}$$

を広義の Green の公式を応用して解いてみよう．

§3.8 でみたように，$L$ に関する随伴表式は

$$M[v]\equiv \kappa^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.3}$$

で与えられ，広義の Green の公式は (3.8.6) すなわち次の形をとる．

$$\iint_D \{vL[u]-uM[v]\}\,dx\,dt=\oint_C\left\{\kappa^2\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dt+uv\,dx\right\}. \tag{2.4}$$

(2.3) の $M$ に属する偏微分方程式

$$M[H_0(x,t;\xi,\tau)]=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{2.5}$$

の解 $H_0$ を $v$ の代りに (2.4) に入れ，$u$ は (2.1) の解であるものとすると，$(\xi,\tau)$ が D の内部にあれば左辺の第二項から $u(\xi,\tau)$ が得られるから

$$u(\xi,\tau)=\oint_C\left[\left\{\kappa^2H_0(x,t;\xi,\tau)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)-u(x,t)\frac{\partial H_0(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\right\}dt\right.$$
$$\left.+u(x,t)H_0(x,t;\xi,\tau)dx\right]. \tag{2.6}$$

さて (2.5) の一つの解としては

$$H_0(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(\tau-t)}}\Big/2\kappa\sqrt{\pi(\tau-t)}, & t<\pi, \quad (2.7)\\ 0, & \tau<t \quad (2.7')\end{cases}$$

がある．これは §3.10 に

$$L[G_0(x,t;\xi,\tau)]=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{2.8}$$

の解を求めたのと全く並行した計算を行なって求めることができる．もっと手早くは互いに随伴関係にある主要解 $H, G$ の間に成り立つ恒等関係

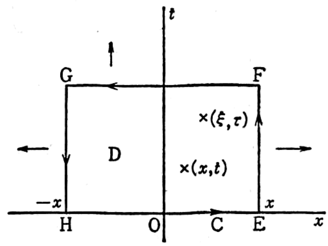
$$H_0(x,t;\xi,\tau)=G_0(x,-t;\xi,-\tau) \tag{2.9}$$

を利用すればよい[(1)]．

広義の Green の公式を適用する区域 D を第2.1図に示した $x$ 軸および他の $x, t$ 両軸に平行な四辺を有する十分大きな長方形に選べば，$(\xi,\tau)$ は D の内

(1)　これは $G_0$ を規定する方程式 (2.8) において時間の向きを逆にする変換：$t\to -t,\ \tau\to -\tau$ を行えば $L[G_0(x,-t;\xi,-\tau)]=\kappa^2\frac{\partial^2 G_0(x,-t;\xi,-\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial G_0(x,-t;\xi,-\tau)}{\partial t}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$ が得られて (2.9) の関係が成り立つことがわかる．

点になっているから長方形の周囲をCとして(2.6)が成り立つ．Cのうち $t$ 軸に平行な二辺 EF, GH は $x\to\infty$ とともに $\tau<t$ の部分については，(2.7′) によって0であり，$t<\tau$ の部分についても (2.7) により $x\to\infty$ の極限で被積分函数が指数函数的に0に収束する．また FG に対する $t$ 座標が $\tau<t$ なる限りこの部分の被積分函数も0となり，結局 $x$ 軸に沿う積分だけが残ってこの部分で $t=0,\ dt=0$ だから



第 2.1 図

$$u(\xi,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2\tau}}}{2\kappa\sqrt{\pi\tau}}dx, \tag{2.10}$$

初期条件 (2.2) により

$$u(\xi,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2\tau}}}{2\kappa\sqrt{\pi\tau}}f(x)dx.$$

$x$ と $\xi$, $t$ と $\tau$ の役割を入れかえて

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2 t}}}{2\kappa\sqrt{\pi t}}f(\xi)d\xi \tag{2.11}$$

が求める初期値問題の解である．

## §3　端のない空間-3　電信方程式（Klein-Gordon の方程式）の主要解（波動方程式への極限移行）

古典電磁力学で減衰を考慮に入れた波動の方程式，また量子力学における Klein-Gordon の方程式は

$$L[u]\equiv\nabla^2u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\kappa^2u=0 \tag{3.1}$$

の形で与えられる．$\kappa=0$ の場合は普通の三次元の波動の方程式である．(3.1) に対する主要解，すなわち

$$L[G(x,y,z,t)]=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)^{(1)} \tag{3.2}$$

の解を求めることは，§3.9 の方法に倣って計算を進めればよい．空間的に次元が高くなっているために §3.9 よりも少し複雑になるが考え方は全く同じだから要旨を述べ，詳しい計算は読者が演習問題として当ってみていただきたい．境のない空間の場合を考えて Fourier 積分を利用し

(1)　一般には $L[G(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,\tau)]=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)\delta(t-\tau)$ を論ずべきだが，式が長くなるので $\xi=\eta=\zeta=\tau=0$ の場合だけを書く．

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_xx+k_yy+k_zz\}}dk_xdk_ydk_z\frac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}d\omega \quad (3.3)$$

と表わし，これに応じて

$$G_0(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\iint\int_{-\infty}^{\infty}dk_xdk_ydk_z\int_{-\infty}^{\infty}g(k_x,k_y,k_z,\omega)e^{i\{k_xx+k_yy+k_zz-\omega t\}}d\omega \quad (3.4)$$

とおいて $(3.3)$, $(3.4)$ を $(3.2)$ に入れて §3.9 と同様に $g$ を定めると $g(k_x,k_y,k_z,\omega)=-1/\{(\omega/c)^2-k_x^2-k_y^2-k_z^2-\kappa^2\}$ となる．その結果 $(3.9.6)$ に対応する式として

$$G_0(x,y,z,t)=\frac{-c^2}{(2\pi)^3}\iint\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_xx+k_yy+k_zz\}}dk_xdk_ydk_z\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega \quad (3.5)$$

という結果が得られる．ここに $\omega_0$ は

$$\omega_0=c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\kappa^2} \quad (3.6)$$

で与えられる．$\omega$ に関する積分は §3.9 に詳しく計算した通りで，その結果は $(3.9.8)$ に与えられている．ゆえに $(3.5)$ は次の形に書ける．

$$G_0(x,y,z,t)$$
$$=\begin{cases}0, & t<0, \quad (3.7)\\ \dfrac{c}{(2\pi)^3}\displaystyle\iint\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_xx+k_yy+k_zz\}}\frac{\sin ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\kappa^2}}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\kappa^2}}dk_xdk_ydk_z, & 0<t. \quad (3.7')\end{cases}$$

積分

$$I(x,y,z,t)=\iint\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_xx+k_yy+k_zz\}}\frac{\sin ct\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\kappa^2}}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\kappa^2}}dk_xdk_ydk_z \quad (3.8)$$

の計算は $(1.10)$ を計算したときと同じ極座標に移ることにより

$$\begin{aligned}I(x,y,z,t)&=2\pi\int_0^{\infty}\frac{\sin(ct\sqrt{k^2+\kappa^2})}{\sqrt{k^2+\kappa^2}}k^2dk\int_0^{\pi}e^{ikr\cos\omega}\sin\omega\,d\omega\\&=\frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}\frac{\sin(ct\sqrt{k^2+\kappa^2})}{\sqrt{k^2+\kappa^2}}k\sin kr\,dk\\&=-4\frac{\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\infty}\frac{\sin(ct\sqrt{k^2+\kappa^2})}{\sqrt{k^2+\kappa^2}}\cos kr\,dk.\end{aligned} \quad (3.9)$$

ところが最後の積分は Bessel 函数 $J_0$ に関する積分公式

$$\int_0^{\infty}\cos at\frac{\sin(b\sqrt{t^2+c^2})}{\sqrt{t^2+c^2}}dt=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}J_0(c\sqrt{b^2-a^2}), & |a|<|b|,\ 0<b,\\ 0, & |b|<|a|,\\ -\dfrac{\pi}{2}J_0(c\sqrt{b^2-a^2}), & |a|<|b|,\ b<0\end{cases} \quad (3.10)^{(1)}$$

---

(1)　I §14.21 に求められている積分 $Q(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iqx}\frac{\sin(t\sqrt{q^2-1})}{\sqrt{q^2-1}}dq$ はすべての可能な場合を尽して

$$Q(x,t)=\begin{cases}\pi J_0(\sqrt{x^2-t^2}), & x^2<t^2,\ 0<t,\\ 0, & t^2<x^2,\\ -\pi J_0(\sqrt{x^2-t^2}), & x^2<t^2,\ t<0\end{cases} \quad (a)$$

と表わせる．(a) で $q\to z/c$, $x\to ac$, $t\to bc$ という置換をすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iaz}\frac{\sin(b\sqrt{z^2-c^2})}{\sqrt{z^2-c^2}}dz=\begin{cases}\pi J_0(c\sqrt{a^2-b^2}), & a^2<b^2,\ 0<b,\\ 0, & b^2<a^2,\\ -\pi J_0(c\sqrt{a^2-b^2}), & a^2<b^2,\ b<0,\end{cases} \quad (b)$$

(次頁へつづく)

を利用することによって

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ct\sqrt{k^2+\kappa^2})}{\sqrt{k^2+\kappa^2}}\cos kr\,dk = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}J_0(\kappa\sqrt{(ct)^2-r^2}), & r<ct, \quad (3.11) \\ 0, & -r<ct<r, \quad (3.11') \\ -\dfrac{\pi}{2}J_0(\kappa\sqrt{(ct)^2-r^2}), & ct<-r \quad (3.11'') \end{cases}$$

と表わされることがわかる．したがって (3.8) の積分は

$$I(r, ct, \kappa) = \mp\frac{2\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\begin{cases} J_0(\kappa\sqrt{(ct)^2-r^2}), & |ct|>r, \quad (3.12) \\ 0, & |ct|<r \quad (3.12') \end{cases}$$

と書ける．ただし右辺の $\mp$ は $0<t$ のとき $-$，$t<0$ のとき $+$ の符号をとる．Bessel 函数の公式

$$J_0'(z) = -J_1(z) \qquad ((\text{I } 11.3) \text{ をみよ})$$

を利用すれば

$$I(r, ct, \kappa) = 2\pi^2\begin{cases} \dfrac{\delta(ct-r)}{r}-\dfrac{\delta(ct+r)}{r}\mp\kappa\dfrac{J_1(\kappa\sqrt{(ct)^2-r^2})}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}, & r<|ct|, \quad (3.13) \\ 0, & |ct|<r \quad (3.13') \end{cases}$$

と書ける．ただし $\delta$ 函数を含む項が現われるのは $ct\pm r=0$ の前後で跳びが 1 の階段函数的不連続があることから現われるもので直接には (3.9) で最後から一つ前の段階で積分

$$I(r, ct, \kappa) = \int_0^\infty \frac{\sin(ct\sqrt{k^2+\kappa^2})}{\sqrt{k^2+\kappa^2}}k\sin kr\,dk \tag{3.14}$$

を考え，$\kappa=0$ のときにもこの項が残ることを調べてみると判り易い：

$$I(r, ct, 0) = \int_0^\infty \sin(ctk)\sin kr\,dk = \frac{1}{2}\int_0^\infty\{\cos k(ct-r)-\cos k(ct+r)\}dk$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{ik(ct-r)}dk - \int_{-\infty}^\infty e^{ik(ct+r)}dk\right\} = \frac{\pi}{2}\{\delta(ct-r)-\delta(ct+r)\}. \tag{3.15}$$

ゆえに (3.7), (3.7′) により

$$G_0^{(R)}(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & t<0, \quad (3.16) \\ 0, & t>0,\ ct<r, \quad (3.16') \\ \dfrac{c}{4\pi}\left[\dfrac{\delta(ct-r)}{r}-\dfrac{\kappa J_1(\kappa\sqrt{(ct)^2-r^2})}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right], & t>0,\ r<ct \quad (3.16'') \end{cases}$$

という解の存在が知れる．

$\kappa=0$ の特殊の場合として含まれる波動の方程式に対しては

$$G_0^{(R)}(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & t<0, \quad (3.17) \\ \dfrac{c}{4\pi}\dfrac{\delta(ct-r)}{r}, & t>0 \quad (3.17') \end{cases}$$

が得られる．

---

$c=ic$ とすれば

$$\int_{-\infty}^\infty e^{iaz}\frac{\sin(b\sqrt{z^2+c^2})}{\sqrt{z^2+c^2}}dz = \begin{cases} \pi J_0(c\sqrt{b^2-a^2}), & a^2<b^2,\ 0<b, \\ 0, & b^2<a^2, \\ -\pi J_0(c\sqrt{b^2-a^2}), & a^2<b^2,\ b<0. \end{cases} \tag{c}$$

(c) 式の実部をとったものが (3.10) にほかならぬ．詳しくは [9], 12.3.3 参照．

$(3.16)$, $(3.17)$ の構造から明らかなようにこれらの解は過去 $t<0$ では全空間の波動は全然0で静寂そのものであるが，$t=0$ に原点に突然単位強度の点衝撃が加えられて後 $t>0$ に起る波動の行方を表わす式である．時空変数が $ct-r$ の結合で入っていることは，波動が $r/c$ だけ前の原点における刺激の伝播によってひき起されていることを示している（遅延ポテンシアル retarded potential).

$I$ の積分が積分路の選び方に依存していて一意的でないことは §3.9 に注意した．積分路Cを極 $\omega=\pm\omega_0$ のどちら側に避けるかの仕方で物理的に意味を異にする結果が得られる．たとえば C として両方の極とも下に避けたものから $(3.17)$ に対応して

$$G_0^{(A)}(x,y,z,t)=\begin{cases}0, & t>0, \qquad (3.18)\\ \dfrac{c}{4\pi}\dfrac{\delta(ct+r)}{r}, & t<0 \qquad (3.18')\end{cases}$$

が得られ，伝播に関する時間の向きが逆になっている（先行ポテンシアル advanced potential).

これに反して上のような実軸に沿う積分路の代りに両方の極 $\omega=\pm\omega_0$ をともにその中に含むような複素積分路にとれば $(3.9)$ の代りに

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\omega^2-\omega_0^{\,2}}d\omega=-\frac{\sin\omega_0(t-r)}{\omega_0} \tag{3.19}$$

が得られ，したがって $(3.17)$～$(3.18)$ の代りに

$$u(x,y,z,t)=\frac{c^2}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\{k_xx+k_yy+k_zz\}}\frac{\sin ct\sqrt{k_x^{\,2}+k_y^{\,2}+k_z^{\,2}}}{\sqrt{k_x^{\,2}+k_y^{\,2}+k_z^{\,2}}}dk_xdk_ydk_z$$
$$=\frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}\sin(kct)\sin kr\,dk=2\pi^2\left\{\frac{\delta(ct-r)}{r}-\frac{\delta(ct+r)}{r}\right\} \tag{3.20}$$

が得られるが，これは主要解すなわち $(3.2)$ の解ではなくて，右辺に同次でない部分のついていない方程式，すなわち $(3.2)$ で $\kappa=0$ とした波動の方程式それ自身の解になっている．それというのが $\omega$ 平面でこのように積分路を選ぶと結果は $(3.3)$ の右辺の $\omega$ に関する積分は実軸に沿う代りに $\omega_0, -\omega_0$ を共に含む複素積分で置きかえられ，その値が 0 になって，$\delta$ 函数ではなくなるためである．

## §4　半無限空間における熱伝導の問題

**1)　熱伝導の方程式の半無限問題に対する鏡像の方法**　一次元の熱伝導の方程式の主要解に現われる表式

$$G_0(x,t;\xi,\tau)=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}} \tag{4.1}$$

は物理的にいって場所 $x=\xi$ に時刻 $t=\tau$ に突然おかれた強度1の点熱源を表わすこと §3.10 に説明したとおりである．そこで $x$ 軸に対して，$\xi>0$ と対称な点 $x=-\xi$ に同じ強度の符号反対の点熱源：

$$-G_0(x,t;-\xi,\tau)=-\frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}} \tag{4.2}$$

を重ね合わせて

$$G_1(x,t;\xi,\tau)\equiv G_0(x,t;\xi,\tau)-G_0(x,t;-\xi,\tau)$$
$$=\frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\nu)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}\} \tag{4.3}$$

を考えれば，対称性から直線 $x=0$ 上ではつねに第一種の境界条件

$$G_1(0,t;\xi,\tau)=0 \tag{4.4}$$

が満足されている．したがって $0<x$ に対して

$$G_1(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ t<\tau, \quad (4.5)\\ \dfrac{1}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}\}, & 0<x,\ \tau<1 \quad (4.5')\end{cases}$$

を $0<x$ に対して考えると半無限一次元区域 $0<x$ に対して境界 $x=0$ で第一種の同次境界条件 (4.4) を満足する第一種の Green 函数であることが確かめられる．

反対に同符号のままで重ね合わせた

$$G_2(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ t<\tau, \quad (4.6)\\ \dfrac{1}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}\}, & 0<x,\ \tau<t \quad (4.6')\end{cases}$$

は境界 $x=0$ に関する第二種の Green 函数であることが確かめられる：

$$\left(\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\right)_{x=0}=0. \tag{4.7}$$

広義の Green の公式を利用するときに必要な随伴 Green 函数ならば (2.9) と同様の時間の向きを逆にする置換：$t\to -t,\ \tau\to -\tau$ により

$$H_1(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ \tau<t, \quad (4.8)\\ \dfrac{1}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(\tau-t)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(\tau-t)}}\}, & 0<x,\ t<\tau \quad (4.8')\end{cases}$$

が第一種の随伴 Green 函数，

$$H_2(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}0, & 0<x,\ \tau<t, \quad (4.9)\\ \dfrac{1}{2\kappa\sqrt{\pi(\tau-t)}}\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(\tau-t)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(\tau-t)}}\}, & 0<x,\ t<\tau \quad (4.9')\end{cases}$$

が第二種の随伴 Green 函数 (Neumann 函数) であることがわかる．

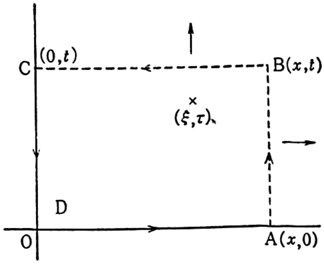
2) **一端の境界値が時間の函数として変動する熱伝導の問題**　一次元半無限：$0\leqq x$ の熱伝導の方程式を初期条件

$$u(x,0)=0, \qquad (4.10)$$

境界条件

$$u(0,t)=f(t) \qquad (4.11)$$

を満たすように定めることは，上の第一種の随伴 Green 函数を応用することにより求めることができる．すなわち熱伝導の場合に求めておいた広義の Green の公式 (2.4) を第 4.1 図のような $x=0,\ t=0$ およびこれと平行な直線で囲まれた長方形区域 OABCO に適用して，$u$ は




第 4.1 図

$$L[u]\equiv\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad 0<x \qquad (4.12)$$

の解とし $v$ に対して (4.8) の $H_1(x,t;\xi,\tau)$ を代入してみる．

すると $H_1(x,t;\xi,\tau)$ は

$$M[H_1(x,t;\xi,\tau)]=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \qquad 0<x,\ 0<\xi \qquad (4.13)$$

の解になっているから，得られる関係

$$\begin{aligned}\int\int_D\Big[H_1(x,t;\xi,\tau)&\Big(\kappa^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big)\\&-u(x,t)\Big(\kappa^2\frac{\partial^2H_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial H_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial t}\Big)\Big]dx\,dt\\=\Big(\int_A^B+\int_C^O\Big)&\kappa^2\Big[H_1(x,t;\xi,\tau)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-u(x,t)\frac{\partial H_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}\Big]dt\\&+\Big(\int_O^A+\int_B^C\Big)[H_1(x,t;\xi,\tau)u(x,t)]\,dx \qquad (4.14)\end{aligned}$$

において左辺の第一項は 0, 第二項は $\int\int_D u(x,t)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)dx\,dt=u(\xi,\tau)$ となる．直線 AB は $+\infty$ に追いやるとともに $H_1(x,t;\xi,\tau)$ の有する指数函数の項からこの積分は 0 に収束することがわかる．辺 BC 上の積分の方は $\tau<t$ に選びさえすれば，(4.8) が成り立つからこれも 0 であって，残る積分は OA および OC に沿うものだけである．AO 上では $t=0$ であるから初期条件 (4.10) によりこの積分も 0 になる．ゆえに

$$u(\xi,\tau)=\int_0^t\kappa^2\Big[\frac{\partial H_1(0,t;\xi,\tau)}{\partial x}u(0,t)-H_1(0,t;\xi,\tau)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\Big]dt.$$

定義により $H_1(0,t;\xi,\tau)=0$ であり (4.11) によって $u(0,t)=f(t)$ であるから結局

$$u(\xi,\tau)=\int_0^t\kappa^2\frac{\partial H_1(0,t;\xi,\tau)}{\partial x}f(t)dt=\int_0^\tau\kappa^2\frac{\partial H_1(0,t;\xi,\tau)}{\partial x}f(t)dt^{(1)}. \qquad (4.15)$$

---

(1) $u(\xi,\tau)=-\kappa^2\int_0^\tau\frac{\partial H_1}{\partial n}(0,t;\xi,\tau)f(t)dt=-\kappa^2\int_0^\tau\frac{\partial G_1(\xi,\tau;0,t)}{\partial n}f(t)dt,$

$u(x,t)=-\kappa^2\int_0^t\frac{\partial G_1(x,t,0,\tau)}{\partial n}f(\tau)d\tau.$

これが随伴でない Green 函数 $G_1$ そのものを使って表わした式である．

最後の段は $\tau<t$ に対しては $H_1(x,t;\xi,\tau)\equiv 0$ であるから実は積分に寄与しないからである.

ゆえに $H_1$ に (4.8) の形を入れて計算すれば

$$u(\xi,\tau)=\frac{\xi}{2\kappa\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa^2(\tau-t)}}}{(\tau-t)^{3/2}}f(t)dt. \tag{4.16}$$

$x,t$ と $\xi,\tau$ の役割を入れかえて書けば

$$u(x,t)=\frac{x}{2\kappa\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}f(\tau)d\tau. \tag{4.17}$$

3)　**境界 $x=0$ で第三種の同次条件を満たす初期値問題の解**　境界 $x=0$ において第三種の同次境界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)_{x=0}=\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)_{x=0}=0 \tag{4.18}$$

を満足する半無限の問題はやはり同じ境界条件

$$-\frac{\partial G_3}{\partial x}+hG_3=0 \tag{4.19}$$

を満足する半無限区域における第三種の Green 函数を求めることにより積分

$$u(x,t)=\int_0^\infty G_3(x,t;\xi,0)f(\xi)d\xi \tag{4.20}$$

によって解かれる(1). ただし鏡像の方法は第一種，第二種の場合の半無限区域に対する Green 函数が対称の理から予想されたものそのものであったのと異なり，今度はこの Green 函数を求める問題自身多少の計算をして定めなくてはならない.

実際 (4.1) で求めた $G_1(x,t,\xi,\tau)$, $G_2(x,t,\xi,\tau)$ はいずれも $G_0(x,t,\xi,\tau)$, $G_0(x,t,-\xi,\tau)$ の線型結合で，それぞれ境界 $x=0$ 上で

$$G_1(0,t)=0,\quad \frac{\partial G_2}{\partial n}(0,t)=0$$

を満足しているから両方の線型結合

$$\begin{aligned}G&\equiv G_0(x,t,\xi,\tau)+AG_0(x,t;-\xi,\tau)\\&=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}+A\frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\end{aligned} \tag{4.21}$$

で適当に $A$ を決めて境界条件 (4.19) が満たされれば問題がないのであるが

$$\frac{\partial G}{\partial n}\equiv-\frac{\partial G(x,t,\xi,\tau)}{\partial x}=\frac{-2}{(2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)})^{3/2}}\left\{(x-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}+A(x+\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}\right\} \tag{4.22}$$

から

(1)　この結果は第 4.1 図に示した区域に広義の Green の公式を適用し 2) と同様の取扱いをすることにより達せられる. ただし $f$ は周辺 $t=0$ 上で指定された初期条件 $u(x,0)=f(x)$ から入り，周辺 $x=0$ 上の曲線積分は $u$ および $G_3$ が境界条件 (4.18), (4.19) を満たすことから消える.

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}+hG\right)_{x=0}=\frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{\frac{\xi}{2\kappa^2(t-\tau)}(1-A)+h(1+A)\right\}=0 \tag{4.23}$$

となって，勝手な $\xi$ についてこれが成り立たねばならないから $1-A=0$ と同時に $1+A=0$ とならねばならなくなって不可能である[1].

ゆえに単なる点熱源の重ね合わせだけでは間に合わないことが知れたのであるから熱伝導の方程式の一般の形の解として §3.10 例題の (d) から

$$\int_{-\infty}^{-\xi}f(\eta)d\eta\int_0^\infty e^{-\kappa^2k^2(t-\tau)}\cos k(x-\eta)dk=\int_{-\infty}^{-\xi}\frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\eta)d\eta$$

の形の解を上記の (4.21) にさらに重ね合わせて

$$G(x,t,\xi,\tau)=G_0(x,t,\xi,\tau)+AG_0(x,t,-\xi,\tau)+\int_{-\infty}^{-\xi}\frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\eta)d\eta \tag{4.24}$$

によって条件 (4.19) が満足されるかどうかをためしてみる．すると，

$$-\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G_0(x,t,\xi,\tau)}{\partial x}+A\frac{\partial G_0(x,t,-\xi,\tau)}{\partial x}+\int_{-\infty}^{-\xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}}{2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right)f(\eta)d\eta,$$

ゆえに　$$(2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}G)_{x=0}=(1+A)e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}+\int_{-\infty}^{-\xi}e^{-\frac{\eta^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}f(\eta)d\eta,$$

$$\left(2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{\xi(1-A)}{2\kappa^2(t-\tau)}e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}-\int_{-\infty}^{-\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}\right)_{x=0}f(\eta)d\eta$$

$$=\left\{\frac{\xi(1-A)}{2\kappa^2(t-\tau)}-f(-\xi)\right\}e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}+\int_{-\infty}^{-\xi}e^{-\frac{\eta^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}f'(\eta)d\eta.$$

これらの式を (4.18) に代入すればこれが 0 となるためには

$$(1-A)=0, \tag{4.25}$$

$$h(1+A)+f(-\xi)=0, \tag{4.25'}$$

および　$$f'(\eta)-hf(\eta)=0 \tag{4.26}$$

の条件が同時に成り立つことが必要であることがわかる．

(4.25), (4.25′) から

$$A=1,\quad f(-\xi)=-2h. \tag{4.27}$$

また未知函数 $f(\eta)$ は (4.26) の解として

$$f(\eta)=Ce^{h\eta},$$

積分定数 $C$ は (4.27) から $C=-2he^{h\xi}$ となる．ゆえに

$$f(\eta)=-2he^{h(\eta+\xi)} \tag{4.28}$$

と定まる．(4.27), (4.28) を (4.24) に代入して，求める第三種の Green 函数は

$$(2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)})G_3(x,t,\xi,\tau)=e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}}-2he^{h\xi}\int_{-\infty}^{-\xi}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\kappa^2(t-\tau)}+h\eta}d\eta. \tag{4.29}$$

特に $\tau=0$ とおいて (4.20) に代入すれば $t=0$ で初期条件 $f(x)$ となるような境界 $x=0$ での第三種同次境界値問題の解が得られる．

---

(1)　$h=0$ なら $A=1$，また $h\to\infty$ の場合は $A=-1$ となるが，これはそれぞれ (4.6) および (4.3) の場合である．

## §5 円に関するポテンシアルの Dirichlet の問題

1) **主要解から Green 函数の作成** 二次元の Laplace の方程式の主要解，すなわち

$$\nabla_{\mathrm{P}}^2[G_0(\mathrm{P},\mathrm{Q})] = -\delta(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \tag{5.1}$$

の解については (3.7.22) から

$$G_0(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_{\mathrm{PQ}}} \tag{5.2}$$

として与えられていた．したがってこれに (5.1) に対する同次方程式すなわち二次元の Laplace の方程式の解を重ね合わせて半径 $a$ の与えられた円の上で第一種の条件 (3.6.10) を満たすように決定してやれば，求める Green 函数が定められる．二次元の Laplace の方程式を極座標で表わした式は

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{5.3}$$

であるから，これを変数分離の方法：$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ に従って解き，角部分 $\Phi(\varphi)$ は

$$\Phi(\varphi) = \cos n\varphi,\ \sin n\varphi \tag{5.4}$$

と定めれば，動径函数 $R(r)$ は

$$R(r) = r^n \text{ または } r^{-n} \tag{5.5}$$

が得られるから[(1)] $r=0$ の近傍で有限な (5.3) の解として

$$U(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{5.6}$$

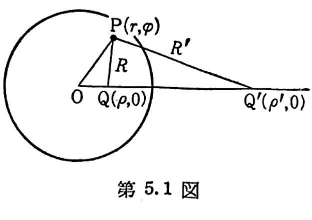
の形のものがあることがわかる．そこで主要解 (5.2) に (5.6) の形の解を重ね合わせた

$$G_1(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = G_0(\mathrm{P},\mathrm{Q}) + U(r,\varphi) \tag{5.7}$$

の形の函数が P を円周 C 上の点 R に近づけたとき

$$G_1(\mathrm{R},\mathrm{Q}) = 0, \quad \mathrm{R} \in \mathrm{C} \tag{5.8}$$

となるように係数 $a_n, b_n$ を定めることが当面の問題である．



第 5.1 図

(1) $R$ の満足する方程式は $R''+(2/r)R'-(n^2/r^2)R=0$ で，この方程式の解は $R(r)=r^\rho$ の形を仮定して代入すれば $\rho=\pm n$.

与えられた円の中心に極座標をとり P 点の座標を $(r,\varphi)$，Q 点の座標を $(\rho,0)$ とすれば，主要解 (*5.2*) に現われる距離 $r_{PQ}$ は

$$r_{PQ}=\sqrt{r^2-2\rho r\cos\varphi+\rho^2}, \tag{5.9}$$

相手の $U$ が (*5.6*) の形で書けているのに応じ $\log(1/r_{PQ})$ を $\varphi$ に関して Fourier 級数の形に展開しよう．その結果

$$-\log(1/r_{PQ})=\log(r\sqrt{1-2\zeta\cos\varphi+\zeta^2})=\log r+\frac{1}{2}\{\log(1-\zeta e^{i\varphi})(1-\zeta e^{-i\varphi})\}$$

$$=\log r-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n\cos n\varphi/n^{(1)},\quad \zeta=\rho/r<1$$

という展開が得られるから

$$-2\pi\, G_0(\mathrm{P},\mathrm{Q})\equiv-2\pi\, G_0(r,\varphi;\rho,0)=\log r-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos n\varphi \tag{5.10}$$

と書ける．ゆえに

$$2\pi\, G_1(a,\varphi;\rho,0)=\left[\pi a_0-\log r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\pi a_n r^n+\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right\}\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}2\pi b_n r^n\sin\varphi\right]_{r=0}=0 \tag{5.11}$$

の条件から

$$a_0=\frac{1}{\pi}\log a,\quad a_n=\frac{-1}{2\pi n}\left(\frac{\rho}{a^2}\right)^n;\quad b_n=0. \tag{5.12}$$

(*5.12*) を (*5.11*) に代入して

$$2\pi\, G_1(r,\varphi;\rho,0)=\log(a/r)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{\rho}{a^2}\right)^n r^n-\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right\}\cos n\varphi. \tag{5.13}$$

これが $\varphi$ に関して Fourier 級数の形に解いた半径 $a$ の原点を中心とする円に関する第一種の Green 函数の表式である．(*5.13*) の級数はまとめられてもっと物理的意味の付け易い形に書き直される．それは (*5.10*) から (*5.13*) の一部の級数は

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos n\varphi=\log r_{PQ}-\log r=\log\sqrt{1-2\left(\frac{\rho}{r}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2} \tag{5.14}$$

と逆に Fourier 級数をまとめて書くことができ，

$$\rho\rho'=a^2 \tag{5.15}$$

とおいてみれば同型の級数も

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{a^2}\right)^n r^n\cos n\varphi=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho'}\right)^n\cos n\varphi=\log\sqrt{1-2\left(\frac{r}{\rho'}\right)\cos\varphi+\left(\frac{r}{\rho'}\right)^2} \tag{5.16}$$

とまとめられるから，(*5.13*) は

$$2\pi\, G_1(r,\varphi;\rho,0)=\log(a/r)+\log\sqrt{1-2\left(\frac{r}{\rho'}\right)\cos\varphi+\left(\frac{r}{\rho'}\right)^2}$$

$$-\log\sqrt{1-2\frac{\rho}{r}\cos\varphi+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

---

(1)　$\log(1-\zeta e^{\pm i\varphi})=-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n e^{\pm in\varphi}/n.$

いま

$$R=\sqrt{r^2-2\rho r\cos\varphi+\rho^2},\quad R'=\sqrt{r^2-2\rho' r\cos\varphi+\rho'^2} \tag{5.17}$$

を使えば，結局

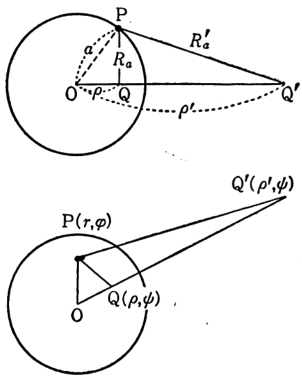
$$2\pi G_1(r,\varphi;\rho,0)=\log\frac{aR'}{\rho'}-\log R=\log\frac{\rho R'}{a}-\log R=\log\frac{\rho R'}{aR} \tag{5.18}$$

と書けることがわかる.

Q 点として $(\rho,0)$ の代りに一般の点 $(\rho,\psi)$ を選べば (5.17) の代りに

$$R=\sqrt{r^2-2\rho r\cos(\varphi-\psi)+\rho^2},\quad R'=\sqrt{r^2-2\rho' r\cos(\varphi-\psi)+\rho'^2}$$

を (5.18) に代入すればよい.




第 5.2 図

$R$ は (5.9) と同じ式で PQ 間の距離を表わすのに対し $R'$ は OQ の延長上 O から (5.15) で与えられる関係にある距離 $\rho'$ の所にある点Q′ からP点までの距離 $R'$ を意味する．Q′ 点を円 O に関する Q 点の**鏡像点**と称する．特に P 点が円周上にくると (5.15) の関係により △OQP ～△OPQ′ なることが知れて $a/\rho=\rho'/a=R_a'/R_a$ が成り立つ．ここに $R_a, R_a'$ は特に P が円周上にきたときのQ, Q′からの距離である．この結果 $aR_a=\rho R_a'$ となって (5.18) で与えられる函数 $G_1$ は実際円周上の任意の点で 0 となることが確かめられる.

2) **Dirichlet の問題の解**　第一種の Green 函数が求まったから公式(3.6.9) を用いて，円に関する Dirichlet の問題を解くことができる.

すなわち円上では $\partial/\partial n=\partial/\partial r$ だから (5.18) から

$$2\pi\frac{\partial G_1}{\partial n}=\frac{1}{R'}\frac{\partial R'}{\partial r}-\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{r-\rho'\cos(\varphi-\psi)}{R'^2}-\frac{r-\rho\cos(\varphi-\psi)}{R^2},$$

$r=a$ とおいて $\rho'=a^2/\rho$ の関係を使って簡単にすれば

$$2\pi\left(\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)_{r=a}=-\frac{a\left\{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right\}}{a^2-2\rho a\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}. \tag{5.19}$$

(5.19) を (3.6.9) に代入して

$$u(\rho,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-\rho^2)g(\varphi)}{a^2-2\rho a\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}d\varphi, \tag{5.20}$$

あるいは P$(r,\varphi)$, Q$(\rho,\psi)$ の役割を入れかえて

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-r^2)g(\psi)}{a^2-2ra\cos(\varphi-\psi)+r^2}d\psi. \tag{5.20a}$$

(5.20) を Poisson の積分と名づけ，円に関する Dirichlet の問題の解を与える式である.

複素函数論の Cauchy の積分公式 (I §5.14 参照) によれば複素平面上の任意の一点 $z=re^{i\varphi}$ における正則函数の値 $f(z)$ は $z$ を囲む任意の閉曲線 C 上での同じ正則函数の値 $f(\zeta)$ を用いて

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{5.21}$$

の形に書き表わされている．いま特に C を原点を中心とする半径 $a$ の円に選んでみると円周上では $\zeta=ae^{i\psi}$. したがって $d\zeta=iae^{i\psi}\,d\psi=i\zeta\,d\psi$ だから (5.21) は特に

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta-z}d\psi \tag{5.22}$$

の形に書ける.

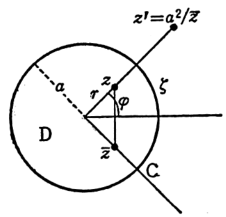
次に $z=re^{i\varphi}$ の円に関する鏡像点は $z'=a^2/z$ で与えられるので(第5.3図), $\zeta-a^2/\bar{z}$ は円 C 外の $z'$ にだけ零点をもつ正則函数だから Cauchy の定理によって

$$0=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a^2/\bar{z}}d\zeta \tag{5.23}$$

が成り立つ．(5.23) の共役複素量を考えると $d\zeta=iae^{i\psi}\,d\psi=i\zeta\,d\psi$, $\bar{\zeta}=a^2/\zeta$ なることを考慮して,

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(-z)\overline{f(\zeta)}}{z-\zeta}d\psi \tag{5.24}$$

と書ける．したがって (5.22) と (5.24) の和をとることにより



第 5.3 図

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}u(\xi,\eta)d\psi+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\xi,\eta)d\psi \tag{5.25}$$

の関係が得られる．ただし $u,v$ は $f(\zeta)$ の実部および虚部である．$\xi=a\cos\psi$, $\eta=a\sin\psi$ の関係を入れて両辺の実部を比較すると

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)u(\psi)d\psi \tag{5.26}$$

の関係が得られる．一方

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{(ae^{i\psi}+re^{i\varphi})(ae^{-i\psi}-re^{-i\varphi})}{(ae^{i\psi}-re^{i\varphi})(ae^{-i\psi}-re^{-i\varphi})}=\frac{a^2-r^2+2iar\sin(\varphi-\psi)}{a^2-2ar\cos(\varphi-\psi)+r^2}$$

であるから，この実部を (5.26) に入れることによって Poisson の公式 (5.20a) が得られる.

## §6 半無限円筒面に関する Helmholtz の方程式の Dirichlet の問題

### 1) Helmholtz の方程式

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2 u=0,$$

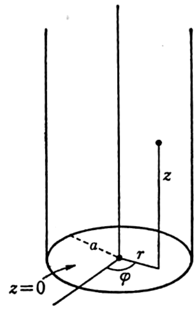
$$0\leqq r\leqq a.\ \ 0\leqq z<\infty,\ \ -\pi\leqq\varphi\leqq\pi \qquad (6.1)$$

の解 $u(r,\varphi,z)$ で

円筒面 $r=a$ 上で $u(a,\varphi,z)=0,$ (6.2)

底面 $z=0$ で $u(r,\varphi,0)=g(r,\varphi)$ (6.2′)

を満たすものを求めよう．§2.1 で知ったように (6.1) は変数分離可能で $r=0$ で有限な解で $r=a$ で 0 となる (6.2) の条件から動径函数は (2.4.3) によって




第 6.1 図

$$R(r)=J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right),\quad J_n(\lambda_{n,l})=0 \qquad (6.3)$$

を選び，これに配せられるものは

$$Z(z)=e^{\pm\sqrt{(\lambda_{n,l}/a)^2-k^2}z},\quad \Phi(\varphi)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases} \qquad (6.3')$$

$z\to\infty$ で収束するものを選び

$$\Gamma_1(r,\varphi,z;\rho,\psi,\zeta)=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\cdot$$

$$\cdot e^{-\sqrt{(\lambda_{n,l}/a)^2-k^2}(z-\zeta)},\qquad \varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1,2,3,\cdots \qquad (6.4)$$

の形の結合を考えると級数（およびその二階偏導函数まで）が収束するものとすれば重ね合わせの原理によって (6.1) の解であることは確かである．

(6.3) で $r=a$ とすれば $J_n(\lambda_{n,l})=0$ の根として $\lambda$ の固有値がきめられているから境界条件 (6.2) が成り立っている．

$z=\zeta$ とすれば (3.12.15) および (3.12.16) によって

$$\Gamma_1(r,\varphi,\zeta;\rho,\psi,\zeta)=\frac{\delta(r-\rho)}{r}\delta(\varphi-\psi). \qquad (6.5)$$

したがって $\Gamma_1(r,\varphi,z;\rho,\psi,\zeta)=\Gamma_1(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ は境界すなわち半無限円筒面を S で表わすとき

$$L_{\mathrm{P}}[\Gamma_1(\mathrm{P},\mathrm{R})]=0,\qquad \mathrm{R}\in\mathrm{S}$$

の解で

$$\Gamma_1(\mathrm{R},\mathrm{R}')=\delta(\mathrm{R},\mathrm{R}'),\qquad \mathrm{R},\mathrm{R}'\in\mathrm{S}$$

を満足する．ゆえに (6.3) の境界値の指定された (6.1) の解は §3.6 問題 2 の［三次元への拡張］によって

$$u(r,\varphi,z)=\int\int_S \Gamma_1(r,\varphi,z;\rho,\psi,\zeta)u(\rho,\psi,\zeta)\rho\,d\rho\,d\psi,\qquad(\rho,\psi,\zeta)\in S. \tag{6.6}$$

ただし S は半無限円筒を囲む側面および底面であるが，上述のように側面では

$$\Gamma_1(a,\varphi,z;\rho,\psi,\zeta)=0 \tag{6.7}$$

だから S の積分は，底面

$$B:\ \zeta=0,\ 0\leqq\rho\leqq a,\ -\pi\leqq\psi\leqq\pi$$

だけについてとればよいから

$$u(r,\varphi,z)=\int\int_B \Gamma_1(r,\varphi,z;\rho,\psi,0)g(\rho,\psi)\rho\,d\rho\,d\psi$$

$$=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\cdot$$

$$\cdot e^{-\sqrt{(\lambda_{n,l}/a)^2-k^2}z}g(\rho,\psi)\rho\,d\rho\,d\psi\quad \varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1,2,\cdots \tag{6.8}$$

と定まる．

あるいは直接 (6.2) の境界条件を満足する解を

$$u(r,\varphi,z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(\varphi-\psi)d\psi\sum_{l=1}^{\infty}a_{n,l}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)e^{-\sqrt{(\lambda_{n,l}/a)^2-k^2}z} \tag{6.9}$$

の形に仮定して，$z=0$ とすれば

$$u(r,\varphi,0)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(\varphi-\psi)d\psi\sum_{l=1}^{\infty}a_{n,l}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right). \tag{6.10}$$

これを $g(r,\varphi)$ を $\varphi$ に関しては Fourier 級数，$r$ に関しては Fourier-Bessel 展開した表式

$$g(r,\varphi)=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon_n\cos n(\varphi-\psi)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}d\psi\int_0^a J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)g(\rho,\psi)\rho\,d\rho,$$

$$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_n=2,\ n=1,2,\cdots \tag{6.11}$$

と比較して

$$a_{n,l}=\frac{2}{a^2\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\int_0^a J_n\left(J_{n,l}\frac{\rho}{a}\right)g(\rho,\psi)\rho\,d\rho \tag{6.12}$$

と定めれば，(6.12) を (6.9) に代入した結果が (6.8) である．

2) Helmholtz の方程式の軸対称な解は

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0,\qquad 0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq z<\infty \tag{6.13}$$

により与えられる．この解 $u(r,z)$ に対し

対称軸を軸とする半無限円筒 $0\leqq z<\infty$ 上で

1°　側面　　$u(a,z)=f(z),$　　(6.14)

2°　底面　　$u(r,0)=g(r)$　　(6.14′)

という境界値問題を考える．この問題は

$$L[u_1]=0,\quad u_1(a,z)=f(z),\quad u_1(r,0)=0, \tag{6.15}$$

$$L[u_2]=0,\quad u_2(a,z)=0,\quad u_2(r,0)=g(r) \tag{6.15'}$$

という問題の解 $u_1,u_2$ が求められれば

$$u(r,z)=u_1(r,z)+u_2(r,z) \tag{6.16}$$

によって与えられる.

$u_1$ の解は §2.1 例題 2 の (a), (c) の結合の形の解を用いて

$$u_1(r,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,r)}{J_0(\sqrt{k^2-\lambda^2}\,a)}\sin\lambda z\,d\lambda\int_0^\infty f(\zeta)\sin\lambda\zeta\,d\zeta \tag{6.17}$$

で与えられる. この積分［およびその二階偏導函数まで］が収束するときは, (6.17) が解であることは確かである.

$u_1(r,0)=0$ は $\sin\lambda z$ の項から自然に満たされる.

$r=a$ とすれば Fourier 積分定理 (2.5.2c) により

$$u_1(a,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\lambda z\,d\lambda\int_0^\infty f(\zeta)\sin\lambda\zeta\,d\zeta=f(z).$$

$u_2$ の解は (6.3), (6.3′) の形式で $\varphi$ に無関係であることから $n=0$ とおいた形の解を重ね合わせて

$$u_2(r,z)=\frac{2}{a^2}\sum_{l=1}^\infty\frac{J_0\left(\lambda_l\dfrac{r}{a}\right)}{\{J_1(\lambda_l)\}^2}e^{-\sqrt{(\lambda_l/a)^2-k^2}\,z}\int_0^a \rho g(\rho)J_0\left(\lambda_l\frac{\rho}{a}\right)d\rho$$

により与えられる. これも上と同様の収束性の条件の下に解になることは確かである. $r=a$ とすれば $J_0(\lambda_l)=0$ から (6.15′) の第一の境界条件は自然に満たされている. また $z=0$ とおけば

$$u_2(r,0)=\frac{2}{a^2}\sum_{l=1}^\infty\frac{J_0\left(\lambda_l\dfrac{r}{a}\right)}{\{J_1(\lambda_l)\}^2}\int_0^a \rho g(\rho)J_0\left(\lambda_l\frac{\rho}{a}\right)d\rho,$$

右辺は Fourier-Bessel 展開 (2.4.12) の $\nu=0$ の場合で $g(r)$ に等しい.

## §7 軸対称性をもつ Poisson の方程式の解

対称軸を $z$ 軸に選び円筒座標をとれば Poisson の方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,z) \tag{7.1}$$

と書かれる.

無限空間の場合であるから, $f(r,z)$ をまず Fourier 積分定理 (2.5.2) によって

$$f(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\kappa z}d\kappa\int_{-\infty}^\infty f(r,\zeta)e^{-i\kappa\zeta}d\zeta,\qquad -\infty<z<\infty \tag{7.2}$$

と表わし, さらに $f(r,\zeta)$ を Fourier-Bessel 積分定理 (2.5.7) を用いて

$$f(r,\zeta)=\int_0^\infty kJ_0(kr)dk\int_0^\infty \rho f(\rho,\zeta)J_0(k\rho)d\rho \tag{7.3}$$

と書けるから, 結局 $f(r,z)$ を $z$ については Fourier 積分, $r$ については Fourier-Bessel 積分の形に書いた次の四重積分が得られる:

$$f(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\kappa z}d\kappa\int_{-\infty}^\infty e^{-i\kappa\zeta}d\zeta\int_0^\infty kJ_0(kr)dk\int_0^\infty \rho f(\rho,\zeta)J_0(k\rho)d\rho, \tag{7.4}$$

これに対応して $u(r,z)$ の方も

$$u(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\kappa z}d\kappa\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\kappa\zeta}d\zeta\int_0^{\infty}kJ_0(kr)dk\int_0^{\infty}\rho U(\rho,\zeta)J_0(k\rho)d\rho \tag{7.5}$$

の形と仮定して $J_0(kr)$ が $\dfrac{d^2J_0(kr)}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dJ_0(kr)}{dr}-k^2J_0(kr)=0$ を満たすことを考慮すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$
$$=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\kappa z}d\kappa\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\kappa\zeta}d\zeta\int_0^{\infty}kJ_0(kr)dk\int_0^{\infty}\rho(k^2+\kappa^2)U(\rho,\zeta)J_0(k\rho)d\rho \tag{7.6}$$

の関係が得られるから，(7.4)(7.6) を (7.1) に代入して，対応項を比較することにより

$$U(\rho,\zeta)=\frac{f(\rho,\zeta)}{k^2+\kappa^2} \tag{7.7}$$

の関係が得られる．ゆえに (7.7) を (7.5) に代入して

$$u(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\kappa\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\kappa(z-\zeta)}d\zeta\int_0^{\infty}k\,dk\int_0^{\infty}\frac{\rho f(\rho,\zeta)}{k^2+\kappa^2}J_0(kr)J_0(k\rho)d\rho. \tag{7.8}$$

いま Poisson の式の右辺すなわち電荷の分布が，半径 $r=a$ の円筒面上にのみ限られていて，この上で $z$ に関して $\sigma(z)$ の面密度で分布している場合を考えると

$$f(r,z)=2\sigma(z)\frac{\delta(r-a)}{r} \tag{7.9}$$

とおくことができる．この場合 $\rho$ に関する積分は

$$\int_0^{\infty}\rho\frac{\delta(\rho-a)}{\rho}J_0(kr)J_0(k\rho)d\rho=J_0(kr)J_0(ka). \tag{7.10}$$

ゆえに (7.8) は

$$u(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\kappa\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\kappa(z-\zeta)}\sigma(\zeta)d\zeta\int_0^{\infty}\frac{J_0(kr)J_0(ka)}{k^2+\kappa^2}k\,dk, \tag{7.11}$$

ここに現われた無限積分は

$$\int_0^{\infty}\frac{J_0(kr)J_0(ka)}{k^2+\kappa^2}k\,dk=\begin{cases}K_0(|\kappa|r)I_0(|\kappa|a), & a<r,\\ K_0(|\kappa|a)I_0(|\kappa|r), & r<a\end{cases} \tag{7.12}$$

と変形された円筒函数を使って書き表わされる．この積分は $(0,\infty)$ の代りに $(-\infty,+\infty)$ の区間のものにすると

$$\int_0^{\infty}\frac{J_0(kr)J_0(ka)}{k^2+\kappa^2}k\,dk=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)}{k^2+\kappa^2}k\,dk \tag{7.13}$$

となる．ここに $H_0^{(1)}$ は第一種の Hankel 函数 (I § *11.13* 参照)

$$H_0^{(1)}(z)=J_0(z)+iN_0(z) \tag{7.14}$$

である．右辺の $(-\infty,0)$ の区間についての部分を

$$H_0^{(1)}(-z)=-H_0^{(2)}(z)=-J_0(z)+iN_0(z)=H_0^{(1)}(z)-2J_0(z) \tag{7.15}$$

を使って変形すると $H_0^{(1)}(kr)$ の現われる方は相殺して $H^{(1)}(kr)$ の代りに $J_0(kr)$ の現われる方だけが残り，(7.13) が成り立つことが知れる．$(-\infty,\infty)$ の積分は第 7.1 図の $k$ 平面での実積分 $(-R,R)$ と上半面の半円 $\Gamma$ の部分の和からなる閉曲線 C に関する複素積分

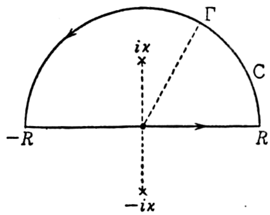
$$\int_C \frac{H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)}{k^2+\kappa^2}k\,dk \tag{7.16}$$

の $R\to\infty$ の極限から出せる．このとき Hankel および Bessel 函数の漸近展開式（(I 11.15) 参照）

$$H_0^{(1)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}, \tag{7.17}$$

$$J_0(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}}{2} \tag{7.17'}$$

から $k$ 平面の上半面：$\Im(k)>0$ では $H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)$ は $|k|\to\infty$ とともに $e^{-\Im(k)(r-a)}$ の項または $e^{-\Im(k)(r+a)}$ が現われるが，後者はもちろん $\Im(k)>0$ のとき指数函数的に 0 に近づき，問題なのは第一項であるが，もし $r>a$ ならばこれも結局指数函数的に 0 に近づき，半円 $\Gamma$ に沿う部分は 0 に収束する．したがって $R\to\infty$ の極限で (7.16) はわれわれの求める実積分を与える．



第 7.1 図

一方 (7.16) 自身は留数の定理によって

$$\int_C \frac{H_0^{(1)}(ar)J_0(ka)}{k^2+\kappa^2}k\,dk=2\pi i\,\mathrm{Res}(i|\kappa|). \tag{7.18}$$

ただし $\mathrm{Res}(i|\kappa|)$ は被積分函数の S 内にある唯一の極 $k=i|\kappa|$ での留数で

$$\lim_{k\to i|\kappa|}(k-i|\kappa|)\frac{H_0^{(1)}(kr)J_0(ka)}{k^2+\kappa^2}k=\frac{H_0^{(1)}(i|\kappa|r)J_0(i|\kappa|a)}{2}=\frac{K_0(|\kappa|r)I_0(|\kappa|a)}{\pi i}. \tag{7.19}$$

ここで円筒函数と変形された円筒函数との関係

$$I_0(z)=J_0(iz),\quad K_0(z)=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(iz) \tag{7.20}$$

を使って変形した．これから (7.12) の第一関係が得られる．以上の計算からわかるように $r<a$ のときには $r$ と $a$ との役を入れかえた $H_0^{(1)}(ka)J_0(kr)$ の形にして同種の計算を行えば $\Gamma$ に沿っての積分は消えて留数の計算によって (7.12) の下式が導かれる．もともと (7.13) の積分の左辺は $r\rightleftarrows a$ の入れかえをすれば下式が得られるのは当然である．

ゆえに

$$u(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\kappa\begin{Bmatrix}K_0(|\kappa|r)I_0(|\kappa|a)\\K_0(|\kappa|a)I_0(|\kappa|r)\end{Bmatrix}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\kappa(z-\zeta)}\sigma(\zeta)d\zeta,\qquad\begin{matrix}a<r,\\r<a.\end{matrix} \tag{7.21}$$

特に円筒面上での電荷分布が一様：$\sigma(\zeta)=\sigma_0$ のときは，$\delta$ 函数の表現式 (2.5.4) により

$$\begin{aligned}u(r,z)&=2\sigma_0\int_{-\infty}^{\infty}\begin{Bmatrix}K_0(|\kappa|r)I_0(|\kappa|a)\\K_0(|\kappa|a)I_0(|\kappa|r)\end{Bmatrix}\delta(\kappa)d\kappa,\qquad\begin{matrix}a<r,\\r<a\end{matrix}\\&=2\sigma_0\lim_{\kappa\to0}\begin{Bmatrix}K_0(|\kappa|r)\\K_0(|\kappa|a)\end{Bmatrix},\qquad\begin{matrix}a<r,\\r<a.\end{matrix}\end{aligned} \tag{7.22}$$

$K_0(z)$ は $z\approx0$ で対数的に発散であることが知れている（(I §11.18) 参照）:

$$K_0(z) \approx \log\frac{2}{z} - \gamma.$$

ゆえに $K_0(|\kappa| r) \approx \log\dfrac{2}{|\kappa|} - \gamma - \log r$，従って（この無限大の）付加定数を除けば

$$u(r) = 2\sigma_0 \begin{cases} \log\left(\dfrac{1}{r}\right), & a<r, \\ \log\left(\dfrac{1}{a}\right)r, & r<a \end{cases} \tag{7.23}$$

の形の対数ポテンシアルの項が物理的に意味をもつものである．

特に $a \to 0$ として荷電した針金の場合を考える．このときは (7.12) は

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kr)}{k^2+\kappa^2} k\,dk = K_0(|\kappa| r) \tag{7.24}$$

となり (7.21) の代りに

$$u(r,z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(|\kappa| r)d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa(z-\zeta)}\sigma(\zeta)d\zeta \tag{7.25}$$

が得られる．さらに

$$\sigma(z) = \delta(z),$$

すなわち $z=0$ における単位点電荷の場合には，

$$u(r,z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa z} K_0(|\kappa| r)d\kappa. \tag{7.26}$$

しかるに $K_0(z)$ の積分表示式

$$K_0(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(v+\frac{z^2}{v}\right)}\frac{dv}{v} \tag{7.27}$$

を (7.26) に入れて積分の順序をかえ

$$u(r,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v}\frac{dv}{v}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa z} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\kappa r)^2}{v}} d\kappa = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v}\frac{dv}{v}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\kappa - \frac{r^2}{2v}\kappa^2} d\kappa. \tag{7.28}$$

積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\kappa^2 + b\kappa} d\kappa = \frac{e^{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}}{a}\sqrt{\pi} \tag{7.29}$$

で $a \to r/\sqrt{2v}$, $b \to iz$ とおいて

$$u(r,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2+r^2}{r^2}v}\frac{dv}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2+r^2}{r^2}u^2} du \qquad (\sqrt{v}=u),$$

[(7.29) で $b=0$ の場合の公式を用い計算を進めて]

$$u(r,z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}} \tag{7.30}$$

となって Coulomb ポテンシアルに一致する結果が得られる．

## §8　有限円筒内での熱伝導の問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad 0 \leqq r \leqq a,\ -\pi \leqq \varphi \leqq \pi,\ 0 \leqq z \leqq h, \tag{8.1}$$

境界条件

$$u(a,\varphi,z,t)=0, \tag{8.2}$$

$$u(r,\varphi,0,t)=u(r,\varphi,h,t)=0, \tag{8.2'}$$

初期条件

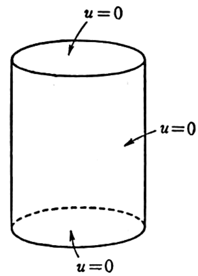
$$u(r,\varphi,z,0)=f(r,\varphi,z). \tag{8.3}$$

この問題の解を

$$u(r,\varphi,z,t)=J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)\sin\frac{m\pi z}{h}e^{in\varphi}T(t) \tag{8.4}$$

と仮定して時間項 $T$ の満たす微分方程式を求めると

$$\frac{dT}{dt}=-\kappa^2\left\{\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}T$$




第 8.1 図

が得られ，これから

$$T=e^{-\kappa^2\left\{\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}t}. \tag{8.5}$$

ゆえに

$$u(r,\varphi,z,t)=\sum_{n,l,m}A_{n,l,m}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)e^{in\varphi}\sin\frac{m\pi z}{h}e^{-\kappa^2\left\{\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}t} \tag{8.6}$$

の形に仮定すると境界条件 (8.2) から

$$J_n(\lambda_{n,l})=0,$$

すなわち $\lambda_{n,l}$ は $J_n(\lambda)$ の $l$ 番目の正の零点と選ぶべきこと例の通り．また (8.2′) は $m$ を正整数と選べば十分．

初期条件から

$$u(r,z,\varphi,0)=\sum_{n,l,m}A_{n,l,m}J_n\left(\lambda_{n,l}\frac{r}{a}\right)e^{in\varphi}\sin\frac{m\pi z}{h} \tag{8.7}$$

を $f(r,\varphi,z)$ に等しくする問題は，まず [Fourier 展開 (2.5.1) 参照] $\varphi$ に着目して

$$f(r,\varphi,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\varphi},\quad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\pi}f(r,\psi,z)e^{-in\psi}d\psi, \tag{8.8}$$

次に (2.4.1″) により

$$f(r,\psi,z)=\sum_{m=1}^{\infty}D_m\sin\frac{m\pi z}{h},\quad D_m=\frac{2}{h}\int_0^h f(r,\psi,\zeta)\sin\frac{m\pi\zeta}{h}d\zeta, \tag{8.9}$$

最後に (2.4.12) により

$$f(r,\psi,\zeta)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2}{a^2}\frac{J_n\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}r\right)}{\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\int_0^a\rho f(\rho,\psi,\zeta)J_n\left(\frac{\lambda_{n,l}}{a}\rho\right)d\rho. \tag{8.10}$$

(8.7)～(8.10) から

$$A_{n,l,m}=\frac{1}{\pi ha^2\{J_{n+1}(\lambda_{n,l})\}^2}\int_0^a\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}f(\rho,\psi,\zeta)J_n\left(\frac{\lambda_{n,l}\rho}{a}\right)e^{-in\psi}\sin\frac{m\pi\zeta}{h}\rho\,d\rho\,d\zeta\,d\psi. \tag{8.11}$$

(8.11) を (8.6) に代入したものが求むる解である．熱伝導の方程式はこの例でも明らかなように時間とともに指数函数的に減衰する時間項を有するから $T=e^{-\alpha t}$ の形を仮定して時間項を分離すれば，(8.1) を解く問題は Helmholtz の方程式の問題に帰着す

る．したがって Helmholtz の方程式の諸問題として取り扱った例は対応する熱伝導の問題を論ずる際に役立つ．

## §9　球に関する Laplace の方程式の Dirichlet の問題

一般論的形式は円に関する Dirichlet の問題と全く同じで，ただ軸対称性の代りに球対称性の球座標を使うのが自然だから球座標で分離を行うのが簡単である．

Green 函数を仲介とする §4.5 と同様の計算は問題2に譲り直接 Laplace の方程式 $\nabla^2 u=0$ を球座標で変数分離を行なって得られる素解を重ね合わせて解く方法を説明する．

角部分の特性固有値問題が球面函数で解けることは §2.7 に詳述した．動径部分は

$$R_1(r)=r^n,\quad R_2(r)=r^{-n-1} \tag{9.1}$$

の基本解が得られる(1)．特に内部問題を考えて $R_2(r)$ を除外し求める解の形として

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(r/a)^n Y_n(\theta,\varphi) \tag{9.2}$$

とおく．ここに $Y_n(\theta,\varphi)$ は球面函数すなわち偏微分方程式 (2.7.6) の分離定数 $\lambda$ の固有値 $\lambda=n(n+1)$ に対する固有函数で (2.7.37) で与えられる $2n+1$ 個の独立な固有函数が所属していること §2.7 で見た通りである．

境界条件として球面 $r=a$ 上で

$$u(a,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi),\qquad (0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi) \tag{9.3}$$

が与えられている Dirichlet の問題を解くことは (9.2), (9.3) から与えられた任意の函数 $f(\theta,\varphi)$ を完全直交函数系である球面函数 $Y_n(\theta,\varphi)$ で展開することに帰着される：

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi). \tag{9.4}$$

異なる固有値に属する固有函数が直交することは，この場合にも成り立つから (9.4) の両辺に

$$D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')=\sum_{m=-n}^{n}\Theta_n^{|m|}(\cos\theta)\Theta_n^{|m|}(\cos\theta')\bar{\Phi}_m(\varphi)\bar{\Phi}_m(\varphi') \tag{9.5}$$

をかけて単位球面上に積分すれば

$$\int\!\!\int_S f(\theta,\varphi)D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\sum_l\int\!\!\int_S Y_l(\theta,\varphi)D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$
$$=Y_n(\theta',\varphi')\qquad \text{第2章 [§2.7 問題2による]}.$$

$(\theta,\varphi)$ と $(\theta',\varphi')$ の役割を逆にして

$$Y_n(\theta,\varphi)=\int\!\!\int_S f(\theta',\varphi')D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \tag{9.6}$$

(9.6) を (9.2) に代入して

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(r/a)^n\int\!\!\int_S f(\theta',\varphi')D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$
$$=\int\!\!\int_S f(\theta',\varphi')\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \tag{9.7}$$

(1)　$R$ は $R''+(2/r)R'-\{n(n+1)/r^2\}R=0$ の解でなければならないから．

ここに $D_n(\theta,\varphi,\theta',\varphi')$ は (9.5) で与えられる.

解 (9.7) が実際，境界 $r=a$ 上で与えられた $f(\theta,\varphi)$ に等しい境界値をとることを示すには，(9.7) で $r=a$ とおいて

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n(\theta,\varphi;\theta',\varphi') = \delta(\theta,\varphi;\theta',\varphi'), \qquad (0\leqq\theta\leqq\pi,\ -\pi\leqq\varphi\leqq\pi) \tag{9.8}$$

の性質があることに着目すればよい [§2.7 問題3参照].

問題 1〕 上に得られた Dirichlet の問題の解 (9.7) を変形して (5.20) の三次元の類型である Poisson の公式

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{a}{4\pi}\int\int_S f(\theta',\varphi')\frac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\omega+r^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi' \tag{a}$$

が成り立つことを確かめよ.

（ヒント） $D_n(\theta,\varphi,\theta',\varphi') = \dfrac{2n+1}{4\pi}P_n(\cos\omega)$ [§2.8 問題2参照]

を代入すれば $(r/a)=\rho$ として

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n D_n(\theta,\varphi,\theta',\varphi') = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\rho^n P_n(\cos\omega),$$

Legendre の多項式 $P_n(z)$ に関する母函数展開公式 [I §10.1 参照]

$$1/\sqrt{1-2\rho\cos\omega+\rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\omega)\rho^n$$

を用いて

$$\left(1+2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\omega+\rho^2}} = \frac{1-\rho^2}{1(-2\rho\cos\omega+\rho^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\omega),$$

これを (9.7) に入れよ.

問題 2〕 Laplace 方程式の主要解

$$G_n(r,\theta,\varphi;\rho,\theta',\varphi') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\sqrt{r^2-2r\rho\cos\omega+\rho^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

に Laplace の方程式の正則解を重ね合わせて

$$G_1(r,\theta,\varphi;\rho,\theta',\varphi') = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^n}{r^{n+1}}-c_n r^n\right)P_n(\cos\omega)$$

が $r=a$ のとき 0 となるように定めれば Green 函数

$$G_1(r,\theta,\varphi;\rho,\theta',\varphi') = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^n}{r^{n+1}}-\frac{\rho^n r^n}{a^{2n+1}}\right)P_n(\cos\omega) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R}-\frac{a}{\rho}\frac{1}{R'}\right),$$

$$R=\sqrt{r^2-2\rho r\cos\omega+\rho^2},\quad R'=\sqrt{r^2-2\rho' r\cos\omega+\rho'^2},\quad \rho\rho'=a^2$$

が得られることを示せ. これより境界値問題の解を与える公式 §3.6 問題 1, (b) によって §4.5 (2) と同様の計算を行えば，問題 1 (a) の Poisson の公式が導かれる [I §14.16 参照].

# 第 5 章　Mathieu 函数，スフェロイド函数とその応用

## §1　$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ から Mathieu 方程式を導くこと

振動数のきまった波動の伝播などを論じるのには，Helmholtz の方程式 $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ を適当な境界条件の下に解かなければならない．そのために使われる伝統的な方法は変数分離の方法である．その際，円筒座標や球座標を使えば円筒函数が現われることは周知のとおりである．本章では Helmholtz の方程式を楕円筒座標およびスフェロイド座標（回転楕円体座標）で解くときに現われる函数について述べよう．

$x, y, z$ を直角座標とするとき

$$\left.\begin{aligned} x&=c\cosh\xi\cos\eta,\\ y&=c\sinh\xi\sin\eta,\\ z&=z \end{aligned}\right\}\qquad \xi\geqq 0,\ 0\leqq\eta<2\pi \tag{1.1}$$

によって変数 $(\xi,\eta,z)$ を導入すれば，$\xi=\text{const}$ は楕円筒面を，$\eta=\text{const}$ は双曲筒面を表わす．この $(\xi,\eta,z)$ が楕円筒座標である．

いま，$\psi$ が $z$ を $e^{ifz}$ の形で含むものとし，$\sqrt{k^2-f^2}=k_1$ とおけば，Helmholtz の方程式は

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k_1{}^2\psi=0 \tag{1.2}$$

となる．この二次元のラプラス演算子の変数を $(\xi,\eta)$ に書き直せば，上の方程式は結局

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+2h^2(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)\psi=0, \tag{1.3}$$

$$\text{ただし，}\ h=\frac{1}{2}ck_1$$

と書かれる．ここで，いま演算子 $L_z$ を

$$L_z\equiv\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2h^2\cos 2z \tag{1.4}$$

で定義すれば，(1.3) は

$$(L_{i\xi}-L_\eta)\psi=0 \tag{1.5}$$

という形をとる．

(*1.5*) において $\psi$ を $\xi$ だけの函数 $\Xi$ と $\eta$ だけの函数 $H$ との積と仮定すれば，$\Xi, H$ は明らかに

$$(L_{\xi}+\lambda)\Xi=0, \tag{1.6 a}$$

$$(L_{\eta}+\lambda)H=0 \tag{1.7 a}$$

を満足しなければならない．すなわち，

$$-\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}+(\lambda-2h^2\cosh 2\xi)\Xi=0, \tag{1.6}$$

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}+(\lambda-2h^2\cos 2\eta)H=0 \tag{1.7}$$

なる一対の常微分方程式を得る．(*1.7*) を Mathieu の微分方程式，(*1.6*) を変形された Mathieu 微分方程式と呼ぶ．

このように，Helmholtz の微分方程式 (*1.2*) を楕円座標に変換するとき，二つの変数についての同じ形の演算子 $L$ の差として表わされることは注目すべき事実である．この事実の結果として，$\xi$ と $\eta$ とについては本質的に同じ形の微分方程式がえられるばかりでなく，それらの微分方程式の解である Mathieu 函数に対する積分方程式あるいは積分表示式が導かれ，Mathieu 函数の性質を研究する上の有力な手がかりがえられる．実は後に (§15) 述べるように，スフェロイド座標の場合にも同様の事情が存在する．本章では，この事実を重要な拠点として理論を進めて行くことにする．

## §2 Mathieu 微分方程式の周期解

以下，Mathieu 微分方程式を

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=0 \tag{2.1}$$

の形にとる．これは二つのパラメタ $\lambda, h^2$ を含んでいるが，波動の問題などに応用される場合には，$h^2$ は始めから与えられることが多く，それに対して $\lambda$ は (*2.1*) がたとえば $2\pi$ の周期をもつというような境界条件を満たす解をもつために固有値として定められることが多い．本書では $h^2$ は実数 (したがって $h$ は実数または純虚数) であるとする．

まず，(*2.1*) の周期解，すなわち $w(z+2\pi)=w(z)$ を満足する解を考えよう．Mathieu の微分方程式の演算子 $\dfrac{d^2}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)$ が $z\to z+\pi$, $z\to -z$

なる変換に対して不変であることから，Mathieu 微分方程式の周期解は一般に $w(z+\pi)=\pm w(z)$ および $w(\pm z)=\pm w(z)$ を満足すべきことが示される．したがって，結局，それらはつぎの四種に分類される：

$$\left.\begin{array}{lll} A_+\text{ 型}: & w(z+\pi)=w(z), & w(-z)=w(z), \\ A_-\text{ 型}: & w(z+\pi)=-w(z), & w(-z)=w(z), \\ B_+\text{ 型}: & w(z+\pi)=w(z), & w(-z)=-w(z), \\ B_-\text{ 型}: & w(z+\pi)=-w(z), & w(-z)=-w(z) \end{array}\right\} \qquad (2.2)$$

$h=0$ の場合には，これら $A_+, A_-, B_+, B_-$ 型の解としてそれぞれ $\cos 2mz$, $\cos(2m+1)z$, $\sin 2mz$, $\sin(2m+1)z$ がある ($m=0,1,2,\cdots$)．$h\to 0$ の極限でこれらに帰着する周期解を Whittaker に従ってそれぞれ $\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)$, $\mathrm{ce}_{2m+1}(z;h^2)$, $\mathrm{se}_{2m}(z;h^2)$, $\mathrm{se}_{2m+1}(z;h^2)$ と書くことにする．すなわち，一般に，

$$\left.\begin{array}{ll} \lim_{h\to 0}\mathrm{ce}_n(z;h^2)=\cos nz, & n=0,1,2,\cdots, \\ \lim_{h\to 0}\mathrm{se}_n(z;h^2)=\sin nz, & n=1,2,\cdots. \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

$\mathrm{ce}_n(z;h^2)$, $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ は周期性をもつ解析函数として Fourier 級数に展開することができるが，$A_+, A_-, B_+, B_-$ で表わされる対称性を満たすためには，展開はつぎの形でなければならないことがわかる：

$$A_+\text{ 型}:\quad \mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)=\sum_{s\geqq 0}^{\infty}A_{2s}^{2m}(h^2)\cos 2sz, \qquad (2.4\,\mathrm{a})$$

$$A_-\text{ 型}:\quad \mathrm{ce}_{2m+1}(z;h^2)=\sum_{s\geqq 0}^{\infty}A_{2s+1}^{2m+1}(h^2)\cos(2s+1)z, \qquad (2.4\,\mathrm{b})$$

$$B_+\text{ 型}:\quad \mathrm{se}_{2m}(z;h^2)=\sum_{s\geqq 1}^{\infty}B_{2s}^{2m}(h^2)\sin 2sz, \qquad (2.4\,\mathrm{c})$$

$$B_-\text{ 型}:\quad \mathrm{se}_{2m+1}(z;h^2)=\sum_{s\geqq 0}^{\infty}B_{2s+1}^{2m+1}(h^2)\sin(2s+1)z. \qquad (2.4\,\mathrm{d})$$

これらを通じて，$h\to 0$ の極限では，(2.3) に一致して，

$$\lim_{h\to 0}A_r{}^n(h^2)=\lim_{h\to 0}B_r{}^n(h^2)=\delta_{nr} \qquad (2.5)$$

が成り立つ．

(2.1) がこのような周期解をもつためには，パラメタ $\lambda$ は $h^2$ によって定まる固有値をとらなければならない．この固有値を，$\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ に対するものを $\lambda_n{}^c(h^2)$, $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ に対するものを $\lambda_n{}^s(h^2)$ と書く．$h\to 0$ の極限では

$$\lim_{h\to 0}\lambda_n{}^c(h^2)=\lim_{h\to 0}\lambda_n{}^s(h^2)=n^2, \qquad n=0,1,2,\cdots \qquad (2.6)$$

で，$\lambda=n^2$ に対して二つの独立な周期解 $\cos nz$, $\sin nz$ が存在するが，§4 に証明するように，$h\neq 0$ のときは $\lambda$ のある固有値に対して独立な周期解はただ一つしか存在しない．すなわち，$n$ の種々整数値に対する $\lambda_n{}^c(h^2)$, $\lambda_n{}^s(h^2)$ を $h^2$ の函数として表わす曲線は $h\neq 0$ の領域では交わったり接したりすることはない．

われわれは $h^2$ を実数と仮定しているが，その場合固有値 $\lambda_n{}^c(h^2)$, $\lambda_n{}^s(h^2)$ は実数である．いま $\lambda$ を固有値，$w(z)$ を周期解として

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=0$$

およびそれの共役複素式

$$\frac{d^2\overline{w}}{dz^2}+(\overline{\lambda}-2h^2\cos 2z)\overline{w}=0$$

を書き，これらにそれぞれ $-\overline{w}, w$ をかけて加え，$z$ について $(0,2\pi)$ の区間積分すれば

$$\left(w\frac{d\overline{w}}{dz}-\overline{w}\frac{dw}{dz}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^{2\pi}\overline{w}w\,dz$$

がえられる．$w(z)$ は $2\pi$ の周期をもつ函数であるから上式の左辺は 0 である．一方で $\int_0^{2\pi}\overline{w}w\,dz\neq 0$. したがって $\lambda=\overline{\lambda}$, すなわち $\lambda$ は実数である．

$\lambda$ が実数であるので Mathieu 微分方程式は実係数の微分方程式である．そうすれば，複素数の解があっても，その実数部分だけまたは虚数部分だけとってやはり解になる．よって，基本解を実函数に限っても一般性を失うことはない．以下，Mathieu 函数は実函数であるとする(1)．

型の異なる Mathieu 函数が $(0,2\pi)$ の区間で直交することは函数の対称性から明らかである．しかし，同じ型の Mathieu 函数でも次数の異なるものは直交する．例えば $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$, $\mathrm{ce}_m(z;h^2)$ に対応する固有値をそれぞれ $\lambda_n{}^c(h^2)$, $\lambda_m{}^c(h^2)$ とするとき

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-2h^2\cos 2z\right)\mathrm{ce}_n(z;h^2)=-\lambda_n{}^c(h^2)\,\mathrm{ce}_n(z;h^2),$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-2h^2\cos 2z\right)\mathrm{ce}_m(z;h^2)=-\lambda_m{}^c(h^2)\,\mathrm{ce}_m(z;h^2)$$

---

(1) Mathieu 函数としての実函数に複素数の係数をかけたような解をとらないということを意味する．

であるが，これらにそれぞれ $-\mathrm{ce}_m(z;h^2)$, $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ をかけて加え，0 から $2\pi$ まで積分すれば

$$\{\mathrm{ce}_n{}'(z;h^2)\,\mathrm{ce}_m(z;h^2)-\mathrm{ce}_m{}'(z;h^2)\,\mathrm{ce}_n(z;h^2)\}\Big|_0^{2\pi}$$
$$=\{\lambda_n{}^c(h^2)-\lambda_m{}^c(h^2)\}\int_0^{2\pi}\mathrm{ce}_n(z;h^2)\,\mathrm{ce}_m(z;h^2)dz$$

となる．この左辺は Mathieu 函数の周期性により消える．また，次節に証明するように，$h\neq 0$ ならば $n\neq m$ のとき $\lambda_n{}^c(h)\neq\lambda_m{}^c(h^2)$．したがって直交関係

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{ce}_n(z;h^2)\,\mathrm{ce}_m(z;h^2)dz=0,\qquad n\neq m$$

がえられる．同様にして

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{se}_n(z;h^2)\,\mathrm{se}_m(z;h^2)dz=0,\qquad n\neq m.$$

$h^2$ の符号の反対である函数の間の関係を求めるために，まず Mathieu 方程式が

$$z\to\frac{\pi}{2}-z,\qquad h^2\to -h^2 \tag{2.7}$$

なる変換に対して不変であるという事実に注意する．したがって，たとえば $\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}-z,h^2\right)$ は $h^2$ の代りに $-h^2$ と置いた Mathieu 方程式の周期解である．よって $\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}-z,h^2\right)$ は $\mathrm{ce}_{2m}(z,-h^2)$ の定数倍である．この定数は $\mathrm{ce}_{2m}(z,-h^2)$ の位相をどう定義するかに依存するが，(2.3) を考慮に入れて $h=0$ における連続性が保たれるように，一般に

$$\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}-z,h^2\right)=(-1)^m\,\mathrm{ce}_{2m}(z,-h^2) \tag{2.8}$$

が成り立つことを要求しよう．同様の推論を他の型の函数について行うことができるが，その際 $z\to\frac{\pi}{2}-z$ なる変換に対して $A_+, B_+$ 型の解では型は変わらないが，$A_-, B_-$ 型の解では $A_-\rightleftarrows B_-$ のように入れかわることに注意する必要がある．結果は

$$\mathrm{ce}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,h^2\right)=(-1)^m\,\mathrm{se}_{2m+1}(z,-h^2), \tag{2.9}$$

$$\mathrm{se}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}-z,h^2\right)=-(-1)^m\,\mathrm{se}_{2m}(z,-h^2), \tag{2.10}$$

$$\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}-z, h^2\right) = -(-1)^m \mathrm{ce}_{2m+1}(z, -h^2). \tag{2.11}$$

これによれば，$\lambda, h^2$ 平面において曲線 $\lambda=\lambda^c_{2m}(h^2)$，$\lambda=\lambda^s_{2m}(h^2)$ は $\lambda$ 軸に対して対称であるが，$\lambda=\lambda^c_{2m+1}(h^2)$ と $\lambda=\lambda^s_{2m+1}(h^2)$ とは $\lambda$ 軸上で交叉し，$\lambda$ 軸に対して反映すれば交互に入れ替ることがわかる：

$$\lambda^c_{2m}(-h^2)=\lambda^c_{2m}(h^2),\quad \lambda^s_{2m}(-h^2)=\lambda^s_{2m}(h^2),\quad \lambda^c_{2m+1}(-h^2)=\lambda^s_{2m+1}(h). \tag{2.12}$$

## §3 固有値 λ(h²)

四種の型の代表として $A_+$ 型の Mathieu 函数を考え，その Fourier 展開式

$$\mathrm{ce}(z; h^2)=\sum_{r\geqq 0}^{\infty} A_{2r}\cos 2rz \tag{3.1}$$

の係数 $A_{2r}$ および固有値 $\lambda$ について論じよう．

(3.1) を Mathieu 微分方程式 (2.1) に代入し，cos の積を変数の差および和に対する cos に書きかえた上で，$\cos 2rz$ の係数を 0 とおけば

$$\left.\begin{aligned}&\lambda A_0-h^2A_2=0,\\&(\lambda-4)A_2-h^2(A_4+2A_0)=0,\\&(\lambda-4s^2)A_{2s}-h^2(A_{2s+2}+A_{2s-2})=0,\qquad s=2,3,4,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

をうる．これは無限個の係数 $A_0, A_2, A_4, \cdots$ に対する無限元連立一次方程式である．

これを解くために

$$\frac{A_{2(s+1)}}{A_{2s}}=c_s \tag{3.3}$$

とおけば

$$\left.\begin{aligned}&c_0=\frac{\lambda}{h^2},\\&\frac{2}{c_0}+\frac{4-\lambda}{h^2}+c_1=0,\\&\frac{1}{c_{s-1}}+\frac{4s^2-\lambda}{h^2}+c_s=0,\qquad s=2,3,4,\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

この方程式の二つの独立な解としては $s\to\infty$ のとき $c_s\to-\dfrac{4s^2-\lambda}{h^2}$ になるものと，$c_s\to-\dfrac{h^2}{4s^2}$ になるものとがある．前者の解に対しては Fourier 級数 (3.1) が発散するので，われわれは後者の解をとるべきである．

(3.4) から $-c_0=\dfrac{2h^2}{4-\lambda+h^2c_1}$, $-c_1=\dfrac{h^2}{16-\lambda+h^2c_2}$, … がえられ，これと $c_0=\dfrac{\lambda}{h^2}$ とから，つぎの連分数式がえられる：

$$(A_+) \qquad \lambda=-\frac{2h^4|}{4-\lambda}-\frac{h^4|}{|16-\lambda}-\frac{h^4|}{|36-\lambda}-\cdots. \tag{3.5}$$

これが $A_+$ 型の固有値 $\lambda_{2m}^c(h^2)$ を定める条件式である．同様にして，他の型に対しては

$$(A_-) \quad \lambda_{2m+1}^c(h^2): \quad \lambda=1+h^2+\frac{h^4|}{9-\lambda}-\frac{h^4|}{|25-\lambda}-\cdots, \tag{3.6}$$

$$(B_+) \quad \lambda_{2m}^s(h^2): \quad \lambda=4-\frac{h^4|}{16-\lambda}-\frac{h^4|}{|36-\lambda}-\cdots, \tag{3.7}$$

$$(B_-) \quad \lambda_{2m+1}^s(h^2): \quad \lambda=1-h^2-\frac{h^4|}{9-\lambda}-\frac{h^4|}{|25-\lambda}-\cdots \tag{3.8}$$

がえられる．

$|h^2|$ の小さい範囲では $\lambda(h^2)$ を $h^2$ の整級数として展開するのが便利である．(2.12) によれば $\lambda_{2m}(h^2)$ は $h^4$ の整級数として表わされ，$\lambda_{2m+1}(h^2)$ は $h^2$ の整級数で $h^2$ の奇数乗の項の係数は $\lambda_{2m+1}^c(h^2)$ と $\lambda_{2m+1}^s(h^2)$ とで符号だけが逆であることがわかる．この展開式の初めの部分は上記の連分数式からもえられるが，ここには量子力学で慣用される摂動法を適用して解と固有値とを同時に求める例を記そう．

Mathieu 方程式において

$$\lambda=\sum_{s\geqq 0}^{\infty}a_sh^{2s}, \qquad a_0=n^2, \tag{3.9}$$

$$w=\sum_{s\geqq 0}^{\infty}w_sh^{2s} \tag{3.10}$$

とおけば，

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=\sum_s\left(\frac{d^2w_s}{dz^2}+a_0w_s\right)h^{2s}+\sum_s\sum_r a_rw_{s-r}h^{2s}$$
$$-2\cos 2z\sum_s w_sh^{2s+2}.$$

これが恒等的に 0 になるために，$h^{2s}$ の係数を 0 とおけば，

$$\frac{d^2w_s}{dz^2}+n^2w_s=2\cos 2zw_{s-1}-\sum_{r\geqq 1}^{s}a_rw_{s-r}, \qquad s=1,2,\cdots. \tag{3.11}$$

なお，固有函数を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}w^2dz=\pi$ に従って規格化することとすれば，

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_0{}^2 dz = \pi, \tag{3.12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=0}^{s} w_r w_{s-r} dz = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, \tag{3.13}$$

いま，$\lambda = \lambda_n{}^c(h^2)$, $w = \mathrm{ce}_n(z; h^2)$ を考えることとし，$w_0 = \cos nz$ とおく．$(3.11)$ に $w_0$ をかけて $(-\pi, \pi)$ にわたって積分すれば左辺は

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_0\left(\frac{d^2 w_s}{dz^2} + n^2 w_s\right) dz = \left(w_0 \frac{dw_s}{dz} - w_s \frac{dw_0}{dz}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} w_s\left(\frac{d^2 w_0}{dz^2} + n^2 w_0\right) dz$$
$$= 0$$

となり，右辺から

$$\pi a_s = 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2z \cos nz \cdot w_{s-1} dz - \sum_{r \geqq 1}^{s-1} a_r \int_{-\pi}^{\pi} w_{s-r} \cos nz\, dz \tag{3.14}$$

がえられる．$w_0, w_1, \cdots, w_{s-1}; a_0, a_1, \cdots, a_{s-1}$ が知れていればこれから $a_s$ が定まり，さらに $(3.11)$ から $w_s$ が定まる．その際 $w_s$ の微分方程式からは $A\cos nz + B\sin nz$ だけ不定になるが，$w$ が偶函数であることから $B=0$ となり，$A$ は $(3.13)$ から定まる．このようにして逐次 $a_s, w_s, a_{s+1}, w_{s+1}, \cdots$ を求めていくことができる．結果は次の通りである：

$$\lambda_n{}^c(h^2) = n^2 + \frac{1}{2(n^2-1)} h^4 + \cdots, \qquad n \geqq 3, \tag{3.15}$$

$$\mathrm{ce}_n(z; h^2) = \cos nz + \left(\frac{\cos(n-2)z}{4(n-1)} - \frac{\cos(n+2)z}{4(n+1)}\right) h^2 + \cdots, \quad n \geqq 2, \tag{3.16}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1{}^c(h^2) &= 1 + h^2 - \frac{1}{8} h^4 + \cdots, \\ \lambda_2{}^c(h^2) &= 4 + \frac{5}{12} h^4 + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

$$\mathrm{ce}_1(z; h^2) = \cos z - \frac{1}{8} \cos 3z \cdot h^2 + \cdots \tag{3.18}$$

は上の一般式に含まれない．同様にして

$$\lambda_n{}^s(h^2) = n^2 + \frac{1}{2(n^2-1)} h^4 + \cdots, \qquad n \geqq 3, \tag{3.19}$$

$$\mathrm{se}_n(z; h^2) = \sin nz + \left(\frac{\sin(n-2)z}{4(n-1)} - \frac{\sin(n+2)z}{4(n+1)}\right) h^2 + \cdots, \quad n \geqq 2. \tag{3.20}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1{}^s(h^2) &= 1-h^2-\frac{1}{8}h^4+\cdots,\\ \lambda_2{}^s(h^2) &= 4-\frac{1}{12}h^4+\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

$$\mathrm{se}_1(z;h^2) = \sin z-\frac{1}{8}\sin 3z\cdot h^2+\cdots; \tag{3.22}$$

この計算を吟味すれば，$\lambda_{2m}^c$ と $\lambda_{2m}^s$ とは $h^{4m-4}$ までは係数が一致し，差は $h^{4m}$ の係数に始めて現われることがわかる．また $\lambda_{2m+1}^c$, $\lambda_{2m+1}^s$ では $h^{4m}$ までは $h^2$ の偶数次の項だけが現われ，$h^2$ の奇数次の項は $h^{4m+2}$ で始めて現われることが知られる．したがって一般に

$$\lambda_n{}^c(h^2)-\lambda_n{}^s(h^2) = O(h^{2n}) \tag{3.23}$$

が成り立つ．なおこの $h^{2n}$ の係数は正である．

## §4　固有値の重なり

Mathieu 方程式は $h\to 0$ の極限では単に

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\lambda w = 0$$

となり，これは $\lambda = n^2$ のとき二つの独立な周期解 $\cos nz$, $\sin nz$ をもつ．しかし，$h\neq 0$ の場合には $\lambda$ の固有値に対して偶函数の周期解 $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ をもつか奇函数の周期解 $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ をもつかのいずれかであり，同じ固有値に対し二つの独立な周期解をもつことはない．すなわち，$\lambda$ の固有値に対して一つの解は周期解であるがそれに独立な第二の解は非周期解である．別の言葉で言えば，$\lambda^c(h^2)$ と $\lambda^s(h^2)$ とは $h\neq 0$ の領域では決して交わらない．

例として，$\lambda = \lambda^c(h^2)$，したがって偶函数の周期解 $\mathrm{ce}(z;h^2)$ がある場合を考え，$h\neq 0$ ならば奇函数の解は周期解でないことを証明しよう：

もし，奇函数の解も周期解であるとすれば，それを

$$\sum_{r\geqq 0}^{\infty} c_{2r+2}\sin(2r+2)z \tag{4.1}$$

と書くことができる．これを Mathieu 方程式に代入すれば，係数に対する漸化式

$$(\lambda-2r^2)c_{2r} = h^2(c_{2r-2}+c_{2r+2}) \tag{4.2}$$

がえられる．一方 $\mathrm{ce}(z;h^2) = \sum_{r\geqq 0}^{\infty} A_{2r}\cos 2rz$ の係数 $A$ に対する漸化式は (4.

2) と同じ形，すなわち

$$(\lambda-2r^2)A_{2r}=h^2(A_{2r-2}+A_{2r+2}) \tag{4.3}$$

である．(4.2), (4.3) から $A_{2r}c_{2r+2}-A_{2r+2}c_{2r}=A_{2r-2}c_{2r}-A_{2r}c_{2r-2}$ を導くことができ，したがって

$$\begin{vmatrix} A_{2r} & A_{2r+2} \\ c_{2r} & c_{2r+2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{2r-2} & A_{2r} \\ c_{2r-2} & c_{2r} \end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix} A_2 & A_4 \\ c_2 & c_4 \end{vmatrix}=2A_0c_2 \tag{4.4}$$

がえられる．さて，ce の係数だけでなく，(4.1) が収束するとすれば，その係数も $r\to\infty$ のとき 0 にならなければならない．そうすれば (4.4) の各項は 0 となり

$$A_0c_2=0 \tag{4.5}$$

となる．さて，(3.2) により $h\neq0$ ならば $A_0\neq0$．したがって $c_2=0$．これから (4.2) により，$c_4=0$(1), $c_6=0, \cdots$ が順次求められ，結局 (4.1) は恒等的に 0 になる．したがって，$\lambda=\lambda^c(h^2)$ に対し一つの解 $\mathrm{ce}(z;h^2)$ は周期解であるが，それに独立な他の解は周期解ではない．

$\mathrm{ce}_{2m+1}(z;h^2)$, $\mathrm{se}_{2m}(z;h^2)$, $\mathrm{se}_{2m+1}(z;h^2)$ についても，それらの解に対する固有値 λ について第二の解は周期解でないことが，同様にして証明できる．

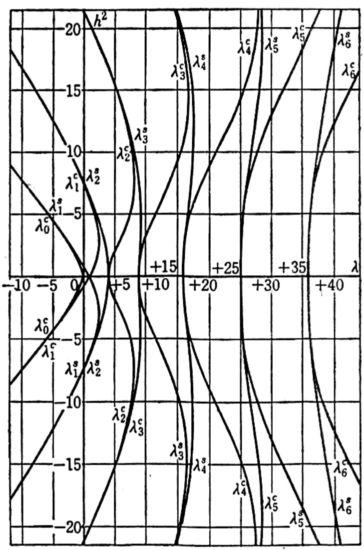
前節および本節の結果から，一般に $h^2>0$ では：

$$\lambda_0{}^c<\lambda_1{}^s<\lambda_1{}^c<\lambda_2{}^s<\lambda_2{}^c<\lambda_3{}^s<\lambda_3{}^c<\cdots,$$

$h^2<0$ では：

$$\lambda_0{}^c<\lambda_1{}^c<\lambda_1{}^s<\lambda_2{}^s<\lambda_2{}^c<\lambda_3{}^c<\lambda_3{}^s<\cdots$$

が導かれる．これらの関係に注意して，固有値 λ が $h^2$ の函数としてどのように変化するかを図示すれば，第 4.1 図のようになる．



第 4.1 図

## §5 積分方程式

(1.4) の微分演算子 $L_z$ を使えば，Mathieu の微分方式は $L_zw+\lambda w=0$ と

(1) $c_0\equiv0$ であることに注意．

書けるが，これについて次の定理が成り立つ：

**定理**　$K(z,z')$ が偏微分方程式

$$(L_z-L_{z'})K(z,z')=0 \tag{5.1}$$

を満足する函数とし，$w(z')$ を，Mathieu 方程式

$$L_{z'}w+\lambda w=0 \tag{5.2}$$

の解とするとき，$z$ につき恒等的に

$$\left\{w(z')\frac{\partial}{\partial z'}K(z,z')-K(z,z')\frac{dw}{dz'}\right\}\Big|_a^b=0 \tag{5.3}$$

ならば

$$f(z)=\int_a^b K(z,z')w(z')dz' \tag{5.4}$$

は $w(z)$ と同じ $\lambda, h^2$ に対する Mathieu 方程式の解である．

（証明）
$$\begin{aligned} L_z f(z) &= \int_a^b L_z K(z,z')w(z')dz' \\ &= \left\{w(z')\frac{\partial}{\partial z'}K(z,z')-K(z,z')\frac{dw}{dz'}\right\}\Big|_a^b \\ &\quad +\int_a^b K(z,z')L_{z'}w(z')dz' \\ &= -\lambda\int_a^b K(z,z')w(z')dz' \\ &= -\lambda f(z), \end{aligned}$$

すなわち $f(z)$ は Mathieu 方程式の解である．　（証終）

この定理が有用なのは偏微分方程式 (5.1) が $z=i\xi$, $z'=\eta$ とおき $(\xi,\eta)$ を楕円座標と見れば Helmholtz の方程式に帰着するという点にある．逆にいえば，われわれは，正則性に関する適当な考慮の下に，Helmholtz の方程式の任意の解をとり，これを楕円座標で表わし，さらに $\xi=-iz$, $\eta=z'$ とおけばこれを上の定理の $K(z,z')$ として使うことができる．(5.3) の条件は通常，$K(z,z')$, $w$ が $z'$ について周期をもち $(a,b)$ がその一周期にわたっての積分である場合，または積分路の両端 $a,b$ において $K(z,z')$ が十分強く 0 になる場合として満足される．これらの場合，$f(z)$ の周期性その他によって，$f(z)$ が $w(z)$ の定数倍でなければならないことがわかれば，$w(z)$ に対する積分方程式がえられる．その例を次にあげよう．

Helmholtz の式 $(\nabla^2+k^2)K=0$ の解として

$$K=e^{ik(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} \tag{5.5}$$

をとり，これを楕円座標で表わせば

$$K=e^{ikc(\cosh\xi\cos\eta\cos\alpha+\sinh\xi\sin\eta\sin\alpha)}.$$

上の処法に従い $\xi=-iz$, $\eta=z'$ とおき，$h=\dfrac{1}{2}kc$ であることに注意すれば (5.5) の $K$ は

$$K(\alpha;z,z')=e^{2ih\cos z\cos z'\cos\alpha+2h\sin z\sin z'\sin\alpha} \tag{5.6}$$

となる．上記の理論によれば，この $K(z,z')$ に対し

$$A\mathrm{ce}_n(z)=\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,z')\,\mathrm{ce}_n(z')dz'$$

で，ここに $A$ は $z$ によらない数であるが $\alpha$ には依存する．ところが右辺の積分は $z,\alpha$ については対称であるから $A$ は $\nu_n\mathrm{ce}_n(\alpha)$ の形をもち，$\nu_n$ は $h$ だけの函数でなければならない：

$$\nu_n\mathrm{ce}_n(\alpha)\mathrm{ce}_n(z)=\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,z')\mathrm{ce}_n(z')dz'. \tag{5.7}$$

$\nu_n$ を定めるために，$n$ が偶数のときには $\alpha=0$, $z=\dfrac{\pi}{2}$ とおいて

$$\nu_n\mathrm{ce}_n(0)\mathrm{ce}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ce}_n(z')dz'.$$

$\mathrm{ce}_n(z')$ に対し Fourier 級数 (2.4a) を代入すれば

$$\nu_n\mathrm{ce}_n(0)\mathrm{ce}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi A_0{}^n. \tag{5.8}$$

これを (5.7) に代入すれば $\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)$ に対する積分方程式

$$2\pi A_0^{2m}\mathrm{ce}_{2m}(\alpha)\mathrm{ce}_{2m}(z)=\mathrm{ce}_{2m}(0)\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,z')\mathrm{ce}_{2m}(z')dz' \tag{5.9}$$

がえられる．(5.7) で $n$ 奇数のときは $z$ で微分して後 $\alpha=0$, $z=\dfrac{\pi}{2}$ とおいて定数を定めて

$$\begin{aligned}&-2\pi ihA_1^{2m+1}\mathrm{ce}_{2m+1}(\alpha)\mathrm{ce}_{2m+1}(z)\\&=\mathrm{ce}_{2m+1}(0)\mathrm{ce}'_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,z')\mathrm{ce}_{2m+1}(z')dz'.\end{aligned} \tag{5.10}$$

同様にして，$\mathrm{se}_{2m}(z)$, $\mathrm{se}_{2m+1}(z)$ に対する積分方程式

$$-2\pi ih^2B_2^{2m}\mathrm{se}_{2m}(\alpha)\mathrm{se}_{2m}(z)$$

$$= \mathrm{se}_{2m}(0)\mathrm{se}'_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,z')\mathrm{se}_{2m}(z')dz', \tag{5.11}$$

$$2\pi h B_1^{2m+1}\mathrm{se}_{2m+1}(\alpha)\mathrm{se}_{2m+1}(z)$$

$$= \mathrm{se}'_{2m+1}(0)\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,z')\mathrm{se}_{2m+1}(z')dz'. \tag{5.12}$$

(5.9), (5.10), (5.11), (5.12) を通じて積分方程式の核 $K(\alpha;z,z')$ は (5.6) で与えられる．また，これらの積分方程式は核を多少修正することによって積分区域を $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ にすることもできる．それには，たとえば (5.9) では，$K(\alpha;z,z')$ を

$$4\cos(2h\cos z\cos z'\cos\alpha)\cosh(2h\sin z\sin z'\sin\alpha)$$

で置き換えればよい．

さて，これらの積分方程式の一つの用途は，それによって Mathieu 函数の一つの級数展開から他の級数展開を導きうることにある．その例として，$\mathrm{ce}_{2m}(z)$ の積分方程式

$$2\pi A_0^{2m}\mathrm{ce}_{2m}(z) = \mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}e^{2ih\cos z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')dz' \tag{5.13}$$

——これは (5.9) で $\alpha=0$ とおいてえられる——に $\mathrm{ce}_{2m}(z')$ の Fourier 級数 (2.4a) を代入してみよう．この Fourier 級数は $z'$ につき一様収束であるので項別積分ができて

$$\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2) = \frac{1}{A_0^{2m}(h^2)}\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2};h^2\right)\sum_{s\geqq 0}^{\infty}(-1)^s A_{2s}^{2m}(h^2)J_{2s}(2h\cos z) \tag{5.14}$$

がえられる．ここに $J_{2s}$ は $2s$ 次の Bessel 函数である．積分の実行については I §11.1 を参照されたい．同様にして

$$\mathrm{ce}_{2m+1}(z;h^2)$$

$$= -\frac{1}{hA_1^{2m+1}(h^2)}\mathrm{ce}'_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2};h^2\right)\sum_{s\geqq 0}^{\infty}(-1)^s A_{2s+1}^{2m+1}(h^2)J_{2s+1}(2h\cos z), \tag{5.15}$$

$$\mathrm{se}_{2m}(z;h^2) = \frac{1}{hB_2^{2m}(h^2)}\mathrm{se}'_{2m}\left(\frac{\pi}{2};h^2\right)\sin z\left\{-B_2^{2m}(h^2)J_1(2h\cos z)\right.$$

$$\left.+\sum_{s\geqq 1}^{\infty}(-1)^s(B_{2s}^{2m}(h^2)-B_{2s+2}^{2m}(h^2))J_{2s+1}(2h\cos z)\right\}, \tag{5.16}$$

$$\mathrm{se}_{2m+1}(z;h^2) = \frac{1}{B_1^{2m+1}(h^2)}\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2};h^2\right)\sin z\left\{B_1^{2m+1}(h^2)J_0(2h\cos z)\right.$$

$$+\sum_{s\geqq 1}^{\infty}(-1)^s(B_{2s+1}^{2m+1}(h^2)-B_{2s-1}^{2m+1}(h^2))J_{2s}(2h\cos z)\Bigg\} \qquad (5.17)$$

がえられる.

## §6 Bessel 函数の積を含む級数展開

Helmholtz の微分方程式の他の解として，円筒座標 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ を導入し

$$K=J_n(kr)\,{\cos \atop \sin}\,n\varphi \qquad (6.1)$$

をとることができる. $x=c\cosh\xi\cos\eta$, $y=c\sinh\xi\sin\eta$ を使って楕円座標で表わせば

$$r=c\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\xi+\cos 2\eta)}, \qquad (6.2)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{\cosh\xi\cos\eta}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\xi+\cos 2\eta)}},\\ \sin\varphi&=\frac{\sinh\xi\sin\eta}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\xi+\cos 2\eta)}}\end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

であるが，(5.1) の解を導くためには $\xi=-iz$, $\eta=z'$ とおけばよい. このようにして，$n=0$ の $K$ を使って，$\mathrm{ce}_{2m}(z)$ に対する積分方程式

$$\gamma_{2m}\mathrm{ce}_{2m}(z)=\int_0^{\pi}J_0(h\sqrt{2(\cos 2z+\cos 2z')})\mathrm{ce}_{2m}(z')dz' \qquad (6.4)$$

が導かれる.

$\mathrm{ce}_{2m+1}(z)$, $\mathrm{se}_{2m+1}(z)$, $\mathrm{se}_{2m}(z)$ に対する積分方程式を得るにはそれぞれ $J_1(kr)\cos\varphi$, $J_1(kr)\sin\varphi$, $J_2(kr)\sin 2\varphi$ から導かれる核を使うのが便利である. その結果はつぎのようになる：

$$\gamma_{2m+1}\mathrm{ce}_{2m+1}(z)$$
$$=\cos z\int_0^{\pi}\frac{J_1(h\sqrt{2(\cos 2z+\cos 2z')})}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2z+\cos 2z')}}\cos z'\mathrm{ce}_{2m+1}(z')dz', \qquad (6.5)$$

$$\delta_{2m+1}\mathrm{se}_{2m+1}(z)$$
$$=\sin z\int_0^{\pi}\frac{J_1(h\sqrt{2(\cos 2z+\cos 2z')})}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2z+\cos 2z')}}\sin z'\mathrm{se}_{2m+1}(z')dz', \qquad (6.6)$$

$$\delta_{2m}\mathrm{se}_{2m}(z)$$
$$=\sin z\cos z\int_0^\pi \frac{J_2(h\sqrt{2(\cos 2z+\cos 2z')})}{\frac{1}{2}(\cos 2z+\cos 2z')}\sin z'\cos z'\mathrm{se}_{2m}(z')dz'. \quad (6.7)$$

積分方程式 (6.4)～(6.7) を基にして，Mathieu 函数に対する新らしい展開式を導くことができる．(I §11.8) の Gegenbauer の加法定理

$$J_0(\sqrt{x^2-2xy\cos\alpha+y^2})=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s J_s(x)J_s(y)\cos s\alpha \quad (6.8)$$

において，$x=he^{iz}$, $y=he^{-iz}$, $\alpha=2z'+\pi$ ととれば

$$J_0(h\sqrt{2(\cos 2z+\cos 2z')})=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varepsilon_s J_s(he^{iz})J_s(he^{-iz})\cos 2sz', \quad (6.9)$$

また，(6.8) を $\cos\alpha$ で微分し，その結果に $x=he^{iz}$, $y=he^{-iz}$, $\alpha=2z'+\pi$ とおけば

$$\frac{J_1(h\sqrt{2(\cos 2z+\cos 2z')})}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2z+\cos 2z')}}$$
$$=\frac{4}{h}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(s+1)J_{s+1}(he^{iz})J_{s+1}(he^{-iz})\frac{\sin(2s+2)z'}{\sin 2z'}. \quad (6.10)$$

同様に，(6.8) を $\cos\alpha$ で二回微分した式を書き換えて

$$\frac{J_2(h\sqrt{2(\cos 2z+\cos 2z')})}{\frac{1}{2}(\cos 2z+\cos 2z')}$$
$$=\frac{8}{h^2}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}(s+1)J_{s+1}(he^{iz})J_{s+1}(he^{-iz})$$
$$\cdot\left\{\frac{\sin(2s+2)z'\cos 2z'}{\sin^3 2z'}-(s+1)\frac{\cos(2s+2)z'}{\sin^2 2z'}\right\}. \quad (6.11)$$

(6.9), (6.10), (6.11) を (6.4), (6.5), (6.6), (6.7) に代入し，項別に積分することにより，Mathieu 函数を Bessel 函数の積で展開する公式がえられる．

まず，(6.4), (6.9) および (2.4a) から

$$\gamma_{2m}\mathrm{ce}_{2m}(z)=\pi\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2m}J_r(he^{iz})J_r(he^{-iz}). \quad (6.12)$$

(6.10) を (6.5) に代入し，

$$\frac{1}{2}\frac{\sin(2s+2)z'}{\sin z'}=\cos(2s+1)z'+\cos(2s-1)z'+\cdots+\cos z'$$

に注意して積分を行えば

$$\gamma_{2m+1}\mathrm{ce}_{2m+1}(z)=\frac{2\pi\cos z}{h}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}^{2m+1}\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^s(s+1)J_{s+1}(v_1)J_{s+1}(v_2),\quad (6.13)$$

$$v_1\equiv he^{iz},\ v_2\equiv he^{-iz}$$

となる．この $s$ についての和はつぎのようにして簡単化される．(I *11. 11*) によれば

$$\frac{2(s+1)}{v}J_{s+1}(v)=J_s(v)+J_{s+2}(v)$$

であるから

$$2(s+1)\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)J_{s+1}(v_1)J_{s+1}(v_2)$$
$$=[J_s(v_1)+J_{s+2}(v_1)]J_{s+1}(v_2)+J_{s+1}(v_1)[J_s(v_2)+J_{s+2}(v_2)]=[W_s+W_{s+1}],$$

ただし $W_s\equiv J_s(v_1)J_{s+1}(v_2)+J_{s+1}(v_1)J_s(v_2)$．したがって，

$$\cos z\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^s(s+1)J_{s+1}(v_1)J_{s+1}(v_2)$$
$$=\frac{h}{4}(-1)^r[(W_r+W_{r+1})-(W_{r+1}+W_{r+2})+\cdots]=(-1)^r\frac{h}{4}W_r.$$

これを (*6. 13*) に代入して

$$\gamma_{2m+1}\mathrm{ce}_{2m+1}(z)$$
$$=\frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rA_{2r+1}^{2m+1}\{J_r(he^{iz})J_{r+1}(he^{-iz})+J_{r+1}(he^{iz})J_r(he^{-iz})\}\quad (6.14)$$

がえられる．

類似の計算によって，

$$\delta_{2m+1}\mathrm{se}_{2m+1}(z)$$
$$=\frac{i\pi}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rB_{2r+1}^{2m+1}\{J_r(he^{iz})J_{r+1}(he^{-iz})-J_{r+1}(he^{iz})J_r(he^{-iz})\},\quad (6.15)$$

$$\delta_{2m}\mathrm{se}_{2m}(z)$$
$$=\frac{i\pi}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rB_{2r+2}^{2m}\{J_r(he^{iz})J_{r+2}(he^{-iz})-J_{r+2}(he^{iz})J_r(he^{-iz})\}\quad (6.16)$$

がえられる．

これらの式には積分方程式の固有値（の逆数）$\gamma,\delta$ が含まれているが，その値はこれらの展開式またはそれを微分した式で $z=0$ とおいて求められる：

$$\gamma_{2m}=\frac{\pi}{\mathrm{ce}_{2m}(0;h^2)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2m}[J_r(h)]^2, \tag{6.17}$$

$$\gamma_{2m+1}=\frac{\pi}{\mathrm{ce}_{2m+1}(0;h^2)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{2m+1}J_r(h)J_{r+1}(h), \tag{6.18}$$

$$\delta_{2m+1}=\frac{\pi h}{\mathrm{se}_{2m+1}'(0;h^2)}\sum(-1)^r B_{2r+1}^{2m+1}\{J_r(h)J_{r+1}'(h)-J_r'(h)J_{r+1}(h)\}, \tag{6.19}$$

$$\delta_{2m}=\frac{\pi h}{2\mathrm{se}_{2m}'(0;h^2)}\sum(-1)^r B_{2r+2}^{2m}\{J_r(h)J_{r+2}'(h)-J_r'(h)J_{r+2}(h)\}. \tag{6.20}$$

本節で求めた展開式の長所の一つは，初めの Fourier 展開式や前節の Bessel 函数展開式に比べてその収束が速いことにある．

## §7 周期解があるときの Mathieu 方程式の第二の解

Mathieu 微分方程式は二階の常微分方程式であるので，二つの独立な解をもっているが，その微分方程式の演算子が独立変数 $z$ について偶であるので，独立な解の一方を偶函数，他方を奇函数ととることができる．$\lambda$ が固有値 $\lambda_n^c$ をとるときは偶函数の解 $\mathrm{ce}_n(z)$ は周期解であるが，この $\lambda$ に対する奇函数の解を $\mathrm{fe}_n(z;h^2)$ と書く．また $\lambda$ が固有値 $\lambda_n^s$ をとるときには奇函数の解 $\mathrm{se}_n(z)$ が周期解であるが，そのときの偶函数の解を $\mathrm{ge}_n(z;h^2)$ と書くことにする．

まず，§4 で証明したところによれば，周期解と反対の偶奇性をもつこれらの解 $\mathrm{fe}_n(z;h^2)$, $\mathrm{ge}_n(z;h^2)$ は，$h\neq0$ である限り，周期解ではない．

Mathieu の微分方程式の演算子は $z$ の代りに $z+\pi$ と置いても変らないから，$\mathrm{fe}_{2m}(z+\pi)$ もまた解である．したがって

$$\mathrm{fe}_{2m}(z+\pi)=\gamma\mathrm{ce}_{2m}(z)+\delta\mathrm{fe}_{2m}(z) \tag{7.1}$$

が成り立つ．(*7.1*) で $z$ の代りに $z+\pi$ とおいた式と (*7.1*) とから

$$\mathrm{fe}_{2m}(z+2\pi)=\gamma(1+\delta)\mathrm{ce}_{2m}(z)+\delta^2\mathrm{fe}_{2m}(z)$$

がえられ，さらに $z$ の代りに $z-\pi$ とおけば

$$\mathrm{fe}_{2m}(z+\pi)=\gamma(1+\delta)\mathrm{ce}_{2m}(z)-\delta^2\mathrm{fe}_{2m}(\pi-z)$$

となる．この式の最後の項に (*7.1*) の $z$ を $-z$ に変えた式を代入して整理すれば，結局

$$\mathrm{fe}_{2m}(z+\pi)=\gamma(1+\delta-\delta^2)\mathrm{ce}_{2m}(z)+\delta^3\mathrm{fe}_{2m}(z) \tag{7.2}$$

が導かれる．(*7.1*) と (*7.2*) とを比較して

$$\gamma=\gamma(1+\delta-\delta^2),\qquad \delta=\delta^3 \tag{7.3}$$

がえられる．$\mathrm{fe}_{2m}(z)$ は周期解ではないから $\gamma, \delta$ はいずれも $\neq 0$ であることに注意すれば，(7.3) から $\delta=1$ であることがわかる．すなわち

$$\mathrm{fe}_{2m}(z+\pi)=\gamma \mathrm{ce}_{2m}(z)+\mathrm{fe}_{2m}(z). \tag{7.4}$$

この結果から，$f_{2m}(z;h^2)$ を $z$ につき $\pi$ の周期をもつ周期函数として $\mathrm{fe}_{2m}(z;h^2)$ がつぎの形をもっていることが導かれる：

$$\mathrm{fe}_{2m}(z;h^2)=c_{2m}(h^2)\{z\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)+f_{2m}(z;h^2)\}. \tag{7.5}$$

(7.4) の $\gamma$ は (7.5) の場合 $\pi c_{2m}(h^2)$ に当る．一般に，$n$ の奇偶によらず $\lambda=\lambda_n{}^c(h^2)$ に対し

$$\mathrm{fe}_n(z;h^2)=c_n(h^2)\{z\mathrm{ce}_n(z;h^2)+f_n(z;h^2)\} \tag{7.6}$$

が成り立ち，$\lambda=\lambda_n{}^s(h^2)$ に対して

$$\mathrm{ge}_n(z;h^2)=s_n(h^2)\{z\mathrm{se}_n(z;h^2)+g_n(z;h^2)\} \tag{7.7}$$

が成り立つ．ただし

$$f_n(-z;h^2)=-f_n(z;h^2), \quad g_n(-z;h^2)=g_n(z;h^2)$$

で，$f_{2m}(z;h^2)$, $g_{2m}(z;h^2)$ は $\pi$ の周期をもち，$f_{2m+1}(z;h^2)$, $g_{2m+1}(z;h^2)$ は自変数の $\pi$ だけの増加に対して符号だけが逆転するものとする．定数 $c_n(h^2)$, $s_n(h^2)$ の定め方はここに確立する必要はないが，$h^2\neq 0$ に対し $c_n(h^2)\neq 0$, $s_n(h^2)\neq 0$ で，$c_{2m}(h^2)$, $s_{2m}(h^2)$ は $h^2$ の偶函数であり，$c_{2m+1}(-h^2)=s_{2m+1}(h^2)$ が満たされているものとする．

周期函数 $f_n(z;h^2)$, $g_n(z;h^2)$ に対しては，(7.6), (7.7) を Mathieu 方程式に代入し，$\mathrm{ce}_n(z;h^2)$, $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ が Mathieu 方程式の解であることに注意することにより，非同次微分方程式

$$\frac{d^2}{dz^2}f_n(z;h^2)+\{\lambda_n{}^c(h^2)-2h^2\cos 2z\}f_n(z;h^2)=-2\frac{d}{dz}\mathrm{ce}_n(z;h^2), \tag{7.8}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}g_n(z;h^2)+\{\lambda_n{}^s(h^2)-2h^2\cos 2z\}g_n(z;h^2)=-2\frac{d}{dz}\mathrm{se}_n(z;h^2) \tag{7.9}$$

がえられる．

(7.8), (7.9) を解くためには二つの方法がある．第一の方法は $f_n(z;h^2)$, $g_n(z;h^2)$ をそれぞれ sin および cos の項から成る Fourier 級数に仮定し，右辺にも $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$, $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ に対する Fourier 級数を代入し，$f_n(z;h^2)$, $g_n(z;h^2)$ の Fourier 級数の係数に対する非同次連立定差方程式を求め，これを解く方法である．第二の方法は解を Mathieu 方程式の周期解で展開する方

法である．以下にこれを説明しよう．

例として (7.9) で $n=2m$ (偶数) の場合を考える．$\frac{d}{dz}\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)$ および $\mathrm{fe}_{2m}(z;h^2)$ は対称性において函数 $\mathrm{se}_{2r}(z;h^2)$ と同様であるから

$$-2\frac{d}{dz}\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)=\sum_{r\geqq 1}^{\infty}\varphi_{2r}^{2m}(h^2)\mathrm{se}_{2r}(z;h^2), \tag{7.10}$$

$$f_{2m}(z;h^2)=\sum_{r\geqq 1}^{\infty}\Phi_{2r}^{2m}(h^2)\mathrm{se}_{2r}(z;h^2) \tag{7.11}$$

とおく．函数 $\mathrm{se}_{2r}(z;h^2)$ $(r=1,2,3,\cdots)$ は直交系をなすから，これらが

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\mathrm{se}_{2r}(z;h^2)]^2dz=1$$

に従って規格化されているとすれば (7.10) の展開係数は

$$\varphi_{2r}^{2m}(h^2)=-\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dz}\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)\cdot\mathrm{se}_{2r}(z;h^2)dz$$

で与えられ，さらにこれは Fourier 係数を使って

$$\varphi_{2r}^{2m}(h^2)=2\sum_{s\geqq 1}^{\infty}(2s)A_{2s}^{2m}(h^2)B_{2s}^{2r}(h^2) \tag{7.12}$$

のように表わされる．さて，(7.11), (7.10) を (7.8) に代入し，$\mathrm{se}_{2r}(z;h^2)$ が固有値 $\lambda_{2r}^{s}(h^2)$ に対する Mathieu 方程式の解であることに注意すれば，容易に $\Phi_{2r}^{2m}(h^2)$ が決定される．結果は

$$f_{2m}(z;h^2)=\sum_{r\geqq 1}^{\infty}\frac{\varphi_{2r}^{2m}(h^2)}{\lambda_{2m}^{c}(h^2)-\lambda_{2r}^{s}(h^2)}\mathrm{se}_{2r}(z;h^2). \tag{7.13}$$

同様の形の式は $f_{2m+1}(z;h^2)$, $g_{2m}(z;h^2)$, $g_{2m+1}(z;h^2)$ に対してもえられるが，ここには記載を省く．

## §8　変形された Mathieu 方程式の解，漸近形

Mathieu 方程式で独立変数 $z$ を $\frac{1}{i}z$ でおきかえてえられる微分方程式

$$-\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=0 \tag{8.1}$$

を "変形された (modified) Mathieu 方程式" という．Helmholtz 方程式を楕円函数で分離したときの $\xi$ の方の方程式 (1.6) は正にこの形をもっている．

ここでは，応用上重要な場合として，$\lambda$ がもとの Mathieu 方程式の周期解の固有値をとるときの (8.1) の解を論ずるに止める．この場合にはもとの

Mathieu 方程式の解は $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$, $\mathrm{fe}_n(z;h^2)$ または $\mathrm{se}_n(z;h^2)$, $\mathrm{ge}_n(z;h^2)$ で与えられるのであるから，次の関係で変形された Mathieu 方程式の独立解を定義することができる．

$$\lambda=\lambda_{2m}^{c}:\quad \mathrm{Ce}_{2m}(z;h^2)=\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=\sum_{r\geqq 0}^{\infty}A_{2r}^{2m}(h^2)\cosh 2rz,$$

$$\mathrm{Fe}_{2m}(z;h^2)=i\,\mathrm{fe}_{2m}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=C_{2m}(h^2)\Bigg[z\,\mathrm{Ce}_{2m}(z;h^2)+\sum_{r\geqq 1}^{\infty}f_{2r}^{2m}(h^2)\sinh 2rz\Bigg],\tag{8.2}$$

$$\lambda=\lambda_{2m+1}^{c}:\quad \mathrm{Ce}_{2m+1}(z;h^2)=\mathrm{ce}_{2m+1}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=\sum_{r\geqq 0}^{\infty}A_{2r+1}^{2m+1}(h^2)\cosh(2r+1)z,$$

$$\mathrm{Fe}_{2m+1}(z;h^2)=i\,\mathrm{fe}_{2m+1}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=C_{2m+1}(h^2)\Bigg[z\,\mathrm{Ce}_{2m+1}(z;h^2)+\sum f_{2r+1}^{2m+1}(h^2)\sinh(2r+1)z\Bigg],\tag{8.3}$$

$$\lambda=\lambda_{2m}^{s}:\quad \mathrm{Se}_{2m}(z;h^2)=i\,\mathrm{se}_{2m}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=\sum_{r\geqq 1}^{\infty}B_{2r}^{2m}(h^2)\sinh 2rz,$$

$$\mathrm{Ge}_{2m}(z;h^2)=\mathrm{ge}_{2m}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=S_{2m}(h^2)\Bigg[-z\,\mathrm{Se}_{2m}(z;h^2)+\sum_{r\geqq 1}^{\infty}g_{2r}^{2m}(h^2)\cosh 2rz\Bigg],\tag{8.4}$$

$$\lambda=\lambda_{2m+1}^{s}:\quad \mathrm{Se}_{2m+1}(z;h^2)=i\,\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=\sum_{r\geqq 0}^{\infty}B_{2r+1}^{2m+1}(h^2)\sinh(2r+1)z,$$

$$\mathrm{Ge}_{2m+1}(z;h^2)=\mathrm{ge}_{2m+1}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=S_{2m+1}(h^2)\Bigg[-z\,\mathrm{Se}_{2m+1}(z;h^2)+\sum_{r=0}^{\infty}g_{2r+1}^{2m+1}\cosh(2r+1)z\Bigg].\tag{8.5}$$

以上の函数は $z$ についてきまった偶奇性をもっており，その意味で $z=0$ の近傍での性質によって特徴づけられているものである．しかし，変形された Mathieu 方程式の解としては，応用上は，$z\gg 1$ のときの漸近形が簡単になるような解が重要である．それを以下に論じよう．

この目的には §5 で証明した積分定理を使うのが便利である．それによれば，

$w(z)$ が Mathieu 方程式の解であり $K(z,z')$ が (5.2) の解であって，$a, b$ が $z$ につき恒等的に

$$\left\{w(z')\frac{\partial}{\partial z'}K(iz,z')-K(iz,z')\frac{dw}{dz'}\right\}\Bigg|_a^b=0 \tag{8.6}$$

を満たすならば

$$F(z)=\int_a^b K(iz,z')w(z')dz' \tag{8.7}$$

は変形された Mathieu 方程式 (8.1) の解である．たとえば

$$\int_a^b e^{2ih\cosh z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')dz' \tag{8.8}$$

は $a, b$ が (8.6) を満たすように選ばれれば (8.1) の解である．実際 $a=0$, $b=\pi$ ととれば，(5.13) からわかるように，

$$\int_0^\pi e^{2ih\cosh z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')dz'=\frac{\pi A_0^{2m}}{\mathrm{ce}_{2m}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}\mathrm{Ce}_{2m}(z;h^2) \tag{8.9}$$

がえられる．しかし，$z$ が実数で $z\to+\infty$ のとき漸近形が簡単になるような解を得るのには (8.8) を $z'$ の複素積分と考え，$a, b$ を $0, \pi$ 以外に $z'$ 面上の無限遠方にとる可能性をも考えなければならない．そのために

$$z'=x'+iy'$$

とおき，$y'\to\pm\infty$ のとき (8.8) の被積分函数の絶対値が十分強く 0 に向かう条件を調べよう．

まず，被積分函数内の $\mathrm{ce}_{2m}(z')$ の絶対値を抑えるために (5.14)，すなわち

$$\pi A_0^{2m}\mathrm{ce}_{2m}(z')=\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^\pi e^{2ih\cos z'\cos z''}\mathrm{ce}_{2m}(z'')dz'' \tag{8.10}$$

を考える．$z''$ は実数，$z'=x'+iy'$ とするとき

$$\Re(2ih\cos z'\cos z'')=2h\cos z''\sin x'\sinh y'<h|\sin x'|e^{|y'|} \tag{8.11}$$

であるから，結局

$$|\mathrm{ce}_{2m}(z')|<\mathrm{const}\times e^{h|\sin x'|\exp|y'|}. \tag{8.12}$$

つぎに (8.9) の被積分函数中の $e^{2ih\cosh z\cos z'}$ の絶対値を評価するために，$z$ を実数，$z'=x'+iy'$ として指数の実数部分をとれば

$$\Re(2ih\cosh z\cos z')=2h\cosh z\sin x'\sinh y'. \tag{8.13}$$

したがって，(8.12) の評価を考慮に入れて，(8.13) が $-\infty$ になるように

$y'\to\pm\infty$ へ積分路をもっていっても積分は収束することがわかる．そのためには

$$y'\to+\infty \text{ のときは } \quad -\pi<x'<0, \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$
$$y'\to-\infty \text{ のときは } \quad 0<x'<\pi, \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

ととればよい．よっていま

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)=\frac{2(-1)^m}{\pi\,\mathrm{ce}_{2m}(0)}\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}e^{2ih\cosh z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')dz' \tag{8.14}$$

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(2)}(z)=\frac{2(-1)^m}{\pi\,\mathrm{ce}_{2m}(0)}\int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\pi}e^{2ih\cosh z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')dz' \tag{8.15}$$

と定義すれば，$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)$, $\mathrm{Me}_{2m}^{(2)}(z)$ はともに固有値 $\lambda_{2m}^c$ に対する変形された Mathieu 方程式を満たす．これらと $\mathrm{Ce}_{2m}(z)$ との関係は

$$\mathrm{Ce}_{2m}(z)=(-1)^m\frac{\mathrm{ce}_{2m}(0)\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2A_0^{2m}}[\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)+\mathrm{Me}_{2m}^{(2)}(z)] \tag{8.16}$$

で与えられる．

(*8. 14*), (*8. 15*) の $z\to+\infty$ のときの漸近形を求めるには鞍点法 (D 第3章 §12 参照) を使うのが便利である．指数の式を $z'$ で微分して鞍点を求めると $z'=0\ (\mathrm{mod}\ \pi)$ をうる．$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)$, $\mathrm{Me}_{2m}^{(2)}(z)$ に対してはそれぞれ $z'=0$, $z'=\pi$ の鞍点の付近の積分だけをとればよい．$z'=0$ の付近では $\cos z'=1-\frac{z'^2}{2}$ とおき，最急降下線に沿って

$$z'=e^{-\frac{\pi}{4}i}s, \qquad s>0$$

ととればよい．そうすれば

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)\sim\frac{2}{\pi}e^{2ih\cosh z-\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty e^{-hs^2\cosh z}ds$$
$$=\sqrt{\frac{1}{\pi h\cosh z}}e^{2ih\cosh z-m\pi i-\frac{\pi}{4}i}. \tag{8.17}$$

同様にして

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(2)}(z)\sim\sqrt{\frac{1}{\pi h\cosh z}}e^{-2ih\cosh z+m\pi i+\frac{\pi}{4}i}. \tag{8.18}$$

さらに，(*8. 16*) によって，$\mathrm{Ce}_{2m}(z)$ の漸近形

$$\mathrm{Ce}_{2m}(z)\sim\frac{\mathrm{ce}_{2m}(0)\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{A_0^{2m}}\sqrt{\frac{1}{\pi h\cosh z}}\cos\left(2h\cosh z-\frac{\pi}{4}\right) \tag{8.19}$$

が求められる.

このように，$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)$, $\mathrm{Me}_{2m}^{(2)}(z)$ は $z\to+\infty$ のときの漸近形が特に簡単で，円筒函数の場合の第一種および第二種の Hankel 函数に対応するものである.

(*8.14*), (*8.15*) に対応して，奇数次の函数

$$\mathrm{Me}_{2m+1}^{(1)}(z)=\frac{2(-1)^m}{i\pi\,\mathrm{ce}_{2m+1}(0)}\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}e^{2ih\cosh z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m+1}(z')dz', \tag{8.20}$$

$$\mathrm{Me}_{2m+1}^{(2)}(z)=\frac{2(-1)^m}{i\pi\,\mathrm{ce}_{2m+1}(0)}\int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\pi}e^{2ih\cosh z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m+1}(z')dz' \tag{8.21}$$

を定義する．これらの漸近形は

$$\mathrm{Me}_{2m+1}^{(1)}(z)\sim\sqrt{\frac{1}{\pi h\cosh z}}e^{2ih\cosh z-\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i-\frac{\pi}{4}i}, \tag{8.22}$$

$$\mathrm{Me}_{2m+1}^{(2)}(z)\sim\sqrt{\frac{1}{\pi h\cosh z}}e^{-2ih\cosh z+\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i+\frac{\pi}{4}i} \tag{8.23}$$

であり，

$$\mathrm{Ce}_{2m+1}(z)=-\frac{\mathrm{ce}_{2m+1}(0)\mathrm{ce}_{2m+1}'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2hA_1^{2m+1}}[\mathrm{Me}_{2m+1}^{(1)}(z)+\mathrm{Me}_{2m+1}^{(2)}(z)] \tag{8.24}$$

が成り立つ.

さらに，$\lambda=\lambda_{2m+1}^{s}$ および $\lambda=\lambda_{2m}^{s}$ に対する解として

$$\mathrm{Ne}_{2m+1}^{(1)}(z)=\frac{4h(-1)^m}{\pi\,\mathrm{se}_{2m+1}'(0)}\sinh z\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}e^{2ih\cosh z\cos z'}\sin z'\,\mathrm{se}_{2m+1}(z')dz', \tag{8.25}$$

$$\mathrm{Ne}_{2m+1}^{(2)}(z)=\frac{4h(-1)^m}{\pi\,\mathrm{se}_{2m+1}'(0)}\sinh z\int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\pi}e^{2ih\cosh z\cos z'}\sin z'\mathrm{se}_{2m+1}(z')dz' \tag{8.26}$$

および

$$\mathrm{Ne}_{2m}^{(1)}(z)=\frac{4ih(-1)^m}{\pi\,\mathrm{se}_{2m}'(0)}\sinh z\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}e^{2ih\cosh z\cos z'}\sin z'\mathrm{se}_{2m}(z')dz', \tag{8.27}$$

$$\mathrm{Ne}_{2m}^{(2)}(z)=\frac{4ih(-1)^m}{\pi\,\mathrm{se}_{2m}'(0)}\sinh z\int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\pi}e^{2ih\cosh z\cos z'}\sin z'\mathrm{se}_{2m}(z')dz' \tag{8.28}$$

を定義すれば $z\to+\infty$ のとき一般に，$n$ の偶数奇数にかかわらず，

$$\mathrm{Ne}_n^{(1)}(z)\sim\sqrt{\frac{1}{\pi h\cosh z}}e^{2ih\cosh z-\frac{n}{2}\pi i-\frac{\pi}{4}i}, \tag{8.29}$$

$$\mathrm{Ne}_n^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{1}{\pi h \cosh z}}\, e^{-2ih\cosh z+\frac{n}{2}\pi i+\frac{\pi}{4}i} \tag{8.30}$$

が成り立つ．なお

$$\mathrm{Se}_{2m+1}(z) = \frac{\mathrm{se}'_{2m+1}(0)\,\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2hB_1^{2m+1}}[\mathrm{Ne}_{2m+1}^{(1)}(z)+\mathrm{Ne}_{2m+1}^{(2)}(z)], \tag{8.31}$$

$$\mathrm{Se}_{2m}(z) = \frac{\mathrm{se}'_{2m+1}(0)\,\mathrm{se}'_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4h^2B_2^{2m}}[\mathrm{Ne}_{2m}^{(1)}(z)+\mathrm{Ne}_{2m}^{(2)}(z)]. \tag{8.32}$$

結局，$\mathrm{Me}_n^{(1)}(z)$, $\mathrm{Me}_n^{(2)}(z)$; $\mathrm{Ne}_n^{(1)}(z)$, $\mathrm{Ne}_n^{(2)}(z)$ は $\lambda=\lambda_n{}^c$; $\lambda=\lambda_n{}^s$ に対する変形された Mathieu 方程式の解であって，$z\to+\infty$ のときの漸近形においては

$$\mathrm{Me}_n^{(1)}(z) \sim \mathrm{Ne}_n^{(1)}(z) \sim H_n^{(1)}(2h\cosh z), \tag{8.33}$$

$$\mathrm{Me}_n^{(2)}(z) \sim \mathrm{Ne}_n^{(2)}(z) \sim H_n^{(2)}(2h\cosh z) \tag{8.34}$$

を満足するものである．

## §9　Me, Ne の級数展開

本節では函数 Me, Ne を円筒函数の級数に展開することを論じよう．

まず，$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)$ について考える．その定義式 (*8. 14*) に $\mathrm{ce}_{2m}(z')$ の Fourier 級数を代入して

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z) = \frac{2(-1)^m}{\pi\,\mathrm{ce}_{2m}(0)}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}e^{2ih\cosh z\cos z'}\cos 2rz'dz' \tag{9.1}$$

となるが，$\cos 2rz' = \frac{1}{2}(e^{2irz'}+e^{-2irz'})$ とおいて上式の各項の積分を二つに分け，前者では $z'=\tau+\frac{\pi}{2}$，後者では $z'=-\left(\tau+\frac{\pi}{2}\right)$ とおいて積分変数を $\tau$ に直せば

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z) = \frac{(-1)^m}{\pi\,\mathrm{ce}_{2m}(0)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2m}\int_{-\pi+i\infty}^{-i\infty}e^{-2ih\cosh z\sin\tau+2ir\tau}d\tau$$

となる．この積分は (I *11. 42*) によって $\pi H_{2r}^{(1)}(2h\cosh z)$ である．このようにして

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z) = \frac{1}{\mathrm{ce}_{2m}(0)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{m+r}A_{2r}^{2m}H_{2r}^{(1)}(2h\cosh z) \tag{9.2}$$

がえられる．全く同様に

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(2)}(z) = \frac{1}{\mathrm{ce}_{2m}(0)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{m+r}A_{2r}^{2m}H_{2r}^{(2)}(2h\cosh z). \tag{9.3}$$

他の函数に対しても $H_{2r}^{(1)}(2h\cosh z)$，$H_{2r}^{(2)}(2h\cosh z)$ を含む級数の式を求めることができる．

しかし，これらの級数は $z$ の小さいときには収束が非常におそい．もっと速く収束する級数を得るのにはつぎのようにするのが便利である．

$\mathrm{ce}_{2m}(z)$ の積分方程式 (6.4) に関連して，積分

$$F(z)\equiv\int_0^{\pi}H_0^{(1)}(h\sqrt{2(\cosh 2z+\cos 2z')})\mathrm{ce}_{2m}(z')dz'$$

を考える．これは変形された Mathieu 方程式を満たす．しかも，$z\to+\infty$ のときの漸近形を求めれば，このとき $\sqrt{2(\cosh 2z+\cos 2z')}\sim 2\cosh z$ とおくことができるので，

$$F(z)\sim H_0^{(1)}(2h\cosh z)\int_0^{\pi}\mathrm{ce}_{2m}(z')dz'=\pi A_0^{2m}\cdot H_0^{(1)}(2h\cosh z).$$

したがって，$F(z)$ は $\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)$ に比例しなければならない．このようにして

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)=\frac{(-1)^m}{\pi A_0^{2m}}\int_0^{\pi}H_0^{(1)}(h\sqrt{2(\cosh 2z+\cos 2z')})\mathrm{ce}_{2m}(z')dz' \qquad (9.4)$$

なる $\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)$ の積分表示式がえられる．

さて，(6.9) に対応して

$$H_0^{(1)}(h\sqrt{2(\cosh 2z+\cos 2z')})=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varepsilon_s H_s^{(1)}(he^z)J_s(he^{-z})\cos 2sz' \qquad (9.5)$$

が成り立つ(1)．これを (9.4) に代入して項別に積分すれば

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(1)}(z)=\frac{(-1)^m}{A_0^{2m}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s A_{2s}^{2m}H_s^{(1)}(he^z)J_s(he^{-z}). \qquad (9.6)$$

この級数は (9.2) に比べてはるかに速く収束する．

同様にして

$$\mathrm{Me}_{2m}^{(2)}(z)=\frac{(-1)^m}{A_0^{2m}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s A_{2s}^{2m}H_s^{(2)}(he^z)J_s(he^{-z}). \qquad (9.7)$$

函数 $\mathrm{Me}_{2m+1}(z)$，$\mathrm{Ne}_{2m+1}(z)$，$\mathrm{Ne}_{2m}(z)$ に対しては (6.5), (6.6), (6.7) の形で $J$ を $H$ にかえ $z$ を $iz$ にかえた形の表示式がえられ，Hankel の函数に加法定理を適用して §6 で $\mathrm{ce}_{2m+1}(z)$，$\mathrm{se}_{2m+1}$，$\mathrm{se}_{2m}(z)$ に対して求めたように，円筒函数の積の級数を導くことができる．結果は

---

(1)　例えば，G. N. Watson： Theory of Bessel Functions, p. 361 参照．

$$\mathrm{Me}^{(j)}_{2m+1}(z)=\frac{(-1)^m}{A^{2m+1}_1}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s A^{2m+1}_{2s+1}\{H^{(j)}_s(he^z)J_{s+1}(he^{-z})+H^{(j)}_{s+1}(he^z)J_s(he^{-z})\}, \qquad (9.8)$$

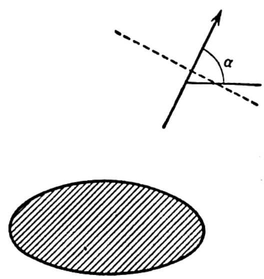
$$\mathrm{Ne}^{(j)}_{2m+1}(z)=-\frac{(-1)^m}{B^{2m+1}_1}\sum(-1)^s B^{2m+1}_{2s+1}\{H^{(j)}_s(he^z)J_{s+1}(he^{-z})-H^{(j)}_{s+1}(he^z)J_s(he^{-z})\}, \qquad (9.9)$$

$$\mathrm{Ne}^{(j)}_{2m}(z)=\frac{(-1)^m}{B^{2m}_2}\sum(-1)^s B^{2m}_{2s+2}\{H^{(j)}_s(he^z)J_{s+2}(he^{-z})-H^{(j)}_{s+2}(he^z)J_s(he^{-z})\}. \qquad (9.10)$$

Me, Ne の漸近形はこれらの級数からも容易に求められる.

## §10　楕円筒による音波の散乱

Mathieu 函数を応用する偏微分方程式の問題として，無限に長い剛体の楕円筒によってその軸に垂直に入射する音波が散乱される有様を調べよう.



第 10.1 図

音波の速度ポテンシアルを $\psi$ とすれば，空気の各点の速度は $\mathrm{grad}\,\psi$ で表わされ，$\psi$ は波動方程式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0 \qquad (10.1)$$

を満足する．ただし，楕円筒の軸を $z$ 軸にとり，音波による空気の運動は $z$ にはよらないものとする．$x, y$ 軸を楕円のそれぞれ長軸，短軸の方向にとり，§1 のように

$$x=c\cosh\xi\cos\eta, \quad y=c\sinh\xi\sin\eta$$

とおいて楕円筒座標を導入するとき，与えられた楕円筒面が $\xi=\xi_0$ で表わされるものとしよう．筒面での境界条件は

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{\xi=\xi_0}=0 \qquad (10.2)$$

と書かれる.

まず，入射波は

$$\psi_0=Ae^{ik(x\cos\alpha+y\sin\alpha)-i\omega t} \qquad (10.3)$$

で表わされる．$x, y$ を $\xi, \eta$ で表わせば

$$\psi_0=Ae^{ikc(\cosh\xi\cos\eta\cos\alpha+\sinh\xi\sin\eta\sin\alpha)} \qquad (10.4)$$

となる．ただし，以下時間因数 $e^{-i\omega t}$ は省いて書くことにする．$\alpha$ は入射波の進む方向が $+x$ の方向との間になす角である.

楕円筒のある場合には $\psi=\psi_0$ だけでは境界条件 (*10. 2*) を満足しないので, 散乱波 $\psi_1$ をつけて

$$\psi=\psi_0+\psi_1 \tag{10.5}$$

とおく. $\psi_1$ は外へ拡っていく波だけでできている必要がある (Sommerfeld の Ausstrahlungsbedingung).

この問題を解く第一歩として, 入射平面波 (*10. 4*) を楕円体座標での特解 $\mathrm{Ce}_n(\xi)\mathrm{ce}_n(\eta)$ および $\mathrm{Se}_n(\xi)\mathrm{se}_n(\eta)$ で展開しよう. そのためには (*10. 4*) を $\eta$ の函数とみて完全直交函数系 $\mathrm{ce}_n(\eta)$, $\mathrm{se}_n(\eta)$ で展開することを考える. すなわち

$$e^{2ih(\cosh\xi\cos\eta\cos\alpha+\sinh\xi\sin\eta\sin\alpha)}=\sum_n M_n(\xi,\alpha)\mathrm{ce}_n(\eta)+\sum_n N_n(\xi,\alpha)\mathrm{se}_n(\eta) \tag{10.6}$$

として, $M_n(\xi,\alpha)$, $N_n(\xi,\alpha)$ を求めよう. (*10. 6*) で $\xi\to -iz$ とおけば左辺は (*5. 6*) の $K(\alpha;z,\eta)$ となり, (*10. 6*) は

$$K(\alpha;z,\eta)=\sum_n M_n(-iz,\alpha)\mathrm{ce}_n(\eta)+\sum_n N_n(-iz,\alpha)\mathrm{se}_n(\eta) \tag{10.7}$$

と書かれる. $\mathrm{ce}_n(\eta)$, $\mathrm{se}_n(\eta)$ の直交性から

$$M_n(-iz,\alpha)=\frac{1}{\pi M_n}\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,\eta)\mathrm{ce}_n(\eta)d\eta, \tag{10.8}$$

$$N_n(-iz,\alpha)=\frac{1}{\pi N_n}\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,\eta)\mathrm{se}_n(\eta)d\eta, \tag{10.9}$$

$$M_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ce}_n(\eta)^2d\eta,\quad N_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{se}_n(\eta)^2d\eta. \tag{10.10}$$

(*10. 8*), (*10. 9*) の右辺の積分は (*5. 9*), (*5. 10*), (*5. 11*), (*5. 12*) によって求めることができる. その結果において $z\to i\xi$ とおけば, $M_n(\xi,\alpha)$, $N_n(\xi,\alpha)$ に対するつぎの式がえられる:

$$M_n(\xi,\alpha)=\mu_n\mathrm{ce}_n(\alpha)\mathrm{Ce}_n(\xi), \tag{10.11}$$

$$N_n(\xi,\alpha)=\nu_n\mathrm{se}_n(\alpha)\mathrm{Se}_n(\xi), \tag{10.12}$$

$$\mu_{2m}=\frac{2A_0^{2m}}{M_{2m}\mathrm{ce}_{2m}(0)\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{10.13}$$

$$\mu_{2m+1}=\frac{-2ihA_1^{2m}}{M_{2m+1}\mathrm{ce}_{2m+1}(0)\mathrm{ce}'_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{10.14}$$

$$v_{2m+1}=\frac{2ihB_1^{2m+1}}{N_{2m+1}\mathrm{se}_{2m+1}'(0)\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{10.15}$$

$$v_{2m}=\frac{2h^2B_2^{2m}}{N_{2m}\mathrm{se}_{2m}'(0)\mathrm{se}_{2m}'\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{10.16}$$

(*10.11*), (*10.12*) を (*10.6*) に代入すれば求める展開式

$$\begin{aligned}&e^{2ih}(\cosh\xi\cos\eta\cos\alpha+\sinh\xi\sin\eta\sin\alpha)\\&\quad=\sum_n\mu_n\mathrm{ce}_n(\alpha)\mathrm{Ce}_n(\xi)\mathrm{ce}_n(\eta)+\sum_n\nu_n\mathrm{se}_n(\alpha)\mathrm{Se}_n(\xi)\mathrm{se}_n(\eta)\end{aligned} \tag{10.17}$$

がえられる．これに振幅 $A$ をかければ入射平面波を特解 $\mathrm{Ce}_n(\xi)\mathrm{ce}_n(\eta)$ および $\mathrm{Se}_n(\xi)\mathrm{se}_n(\eta)$ によって展開した式がえられる．

つぎに，境界条件 (*10.2*) を満足するように散乱波 $\psi_1$ をつけ加えなければならない．散乱波は外向きの波を表わさなければならないが，それは特解

$$\mathrm{Me}^{(1)}(\xi)\mathrm{ce}_n(\eta) \quad および \quad \mathrm{Ne}^{(1)}(\xi)\mathrm{se}_n(\eta) \tag{10.18}$$

をよせ集めて作られる．実際，楕円筒から十分離れた場所 ($\xi\gg1$) では，(*1.1*) により

$$\cosh\xi\sim\sinh\xi\sim\frac{r}{c}\gg1$$

であるので，(*8.22*), (*8.29*) により

$$\mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi)\sim\mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{ikr-n\pi i-\frac{\pi}{4}i} \tag{10.19}$$

である．われわれは時間因子を $e^{-i\omega t}$ ととっているので，この結果は (*10.18*) が外向きの波であることを示している．したがって，境界条件 (*10.2*) を満たすためには，入射波の展開式 (*10.17*) の中で

$$\mathrm{Ce}_n(\xi) \quad を \quad \mathrm{Ce}_n(\xi)-\frac{\mathrm{Ce}_n'(\xi_1)}{\mathrm{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_1)}\mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi)$$

で，また

$$\mathrm{Se}_n(\xi) \quad を \quad \mathrm{Se}_n(\xi)-\frac{\mathrm{Se}_n'(\xi_1)}{\mathrm{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_1)}\mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi)$$

でおき代えればよい．それによって，散乱波を表わす式

$$\begin{aligned}\psi_1=-A\Bigg\{&\sum_n\mu_n\frac{\mathrm{Ce}_n'(\xi_1)}{\mathrm{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_1)}\mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi)\mathrm{ce}_n(\alpha)\mathrm{ce}_n(\eta)\\&+\sum_n\nu_n\frac{\mathrm{Se}_n'(\xi_1)}{\mathrm{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_1)}\mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi)\mathrm{se}_n(\alpha)\mathrm{se}_n(\eta)\Bigg\}\end{aligned} \tag{10.20}$$

がえられる. 遠方における散乱波は, (*10. 20*) に (*10. 19*) の漸近形を代入して

$$\psi_1 \sim -A\sqrt{\frac{2}{i\pi kr}}e^{ikr}\left\{\sum_n(-1)^n\mu_n\frac{\mathrm{Ce}_n'(\xi_1)}{\mathrm{Me}_n^{(1)\prime}(\xi_1)}\mathrm{ce}_n(\alpha)\mathrm{ce}_n(\eta)\right.$$
$$\left.+\sum_n(-1)^n\nu_n\frac{\mathrm{Se}_n'(\xi_1)}{\mathrm{Ne}_n^{(1)\prime}(\xi_1)}\mathrm{se}_n(\alpha)\mathrm{se}_n(\eta)\right\} \quad (10.21)$$

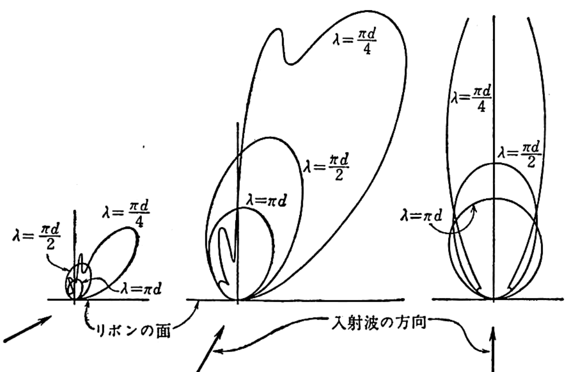
のように表わされる. { } の中の式が $\eta \sim \cos\theta$ の函数として散乱波の振幅の方向性を表わしている. とくに, この式が $\eta$ と $\alpha$ とについて対称であることは波の入射方向と散乱方向とについての相反性 (reciprocity) を示すものである.

$\xi_1 \to 0$ として楕円筒の厚さを 0 にすれば薄い無限に長いリボンによる音波の散乱が論じられる. $\mathrm{Ce}_n'(0)=0$ であるから (*10. 21*) の { } 内の前半は消え, $\mathrm{Se}_n'(0)=\mathrm{se}_n'(0)$ を利用して,

$$\psi_1 \sim -A\sqrt{\frac{2}{i\pi kr}}e^{ikr}\left\{\sum_m\frac{-2ihB_1^{2m+1}}{N_{2m+1}\mathrm{se}_{2m+1}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{Ne}_{2m+1}^{(1)}{}'(0)}\mathrm{se}_{2m+1}(\alpha)\mathrm{se}_{2m+1}(\eta)\right.$$
$$\left.+\sum_m\frac{2h^2B_2^{2m}}{N_{2m}\mathrm{se}_{2m}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{Ne}_{2m}^{(1)\prime}(0)}\mathrm{se}_{2m}(\alpha)\mathrm{se}_{2m}(\eta)\right\} \quad (10.22)$$

がえられる.

第 10. 2 図はこの式によって計算した幅 $2c$ のリボンによる散乱音波の方向性を示している.




第 10.2 図 リボンにより散乱された音波の強さの方向分布 ($\lambda$ は波長, $d$ はリボンの幅)

## §11 Mathieu 方程式の解の安定性

Mathieu 微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=0 \tag{11.1}$$

の量子力学への応用などでは，これの周期解だけでなく，$-\infty<z<+\infty$ において (*11.1*) が有界な解をもつような $\lambda$ の範囲を定めることが問題になる．このような $\lambda$ の区域を安定域といい，$-\infty<z<+\infty$ で 0 以外に有界な解のないような区域を不安定域と名づける．

この問題を調べるために，つぎの考察から始めよう．

(*11.1*) はすべての有限の $z$ に対して正則であるから，任意の $z$ の値 $z_0$ に対して $w$ と $\dfrac{dw}{dz}$ の値を指定すれば常に一つの解がえられ，この解は $z$ の $\infty$ を除く全平面で正則である．いい換えれば (*11.1*) の解は $z$ の整函数である．

さて，(*11.1*) の演算子 $\dfrac{d^2}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)$ は $z$ について偶函数であるから，一つの解 $w(z)$ があれば $w(-z)$ もやはり解でなければならない．したがって $w(z)\pm w(-z)$ も解でなければならない．このことから，(*11.1*) は偶函数の解と奇函数の解とをもっていることがわかる．それに適当に定数をかけて，つぎの二つの解を考えよう．

$$\left.\begin{aligned} &w_{\mathrm{I}}(z)=w_{\mathrm{I}}(-z), && w_{\mathrm{I}}(0)=1, && w_{\mathrm{I}}'(0)=0, \\ &w_{\mathrm{II}}(z)=-w_{\mathrm{II}}(-z), && w_{\mathrm{II}}(0)=0, && w_{\mathrm{II}}'(0)=1. \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

まず

$$\frac{d^2w_{\mathrm{I}}}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w_{\mathrm{I}}=0,$$

$$\frac{d^2w_{\mathrm{II}}}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w_{\mathrm{II}}=0$$

にそれぞれ $-w_{\mathrm{II}}, w_{\mathrm{I}}$ をかけて加え，それを積分すれば $w_{\mathrm{I}}\dfrac{dw_{\mathrm{II}}}{dz}-w_{\mathrm{II}}\dfrac{dw_{\mathrm{I}}}{dz}$ が定数であることがわかる．$z=0$ のときの値から定数を定めれば，つぎの関係がえられる：

$$w_{\mathrm{I}}\frac{dw_{\mathrm{II}}}{dz}-w_{\mathrm{II}}\frac{dw_{\mathrm{I}}}{dz}=1. \tag{11.3}$$

つぎに，演算子 $\dfrac{d^2}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)$ が $\pi$ の周期をもっていることから，$w_{\mathrm{I}}(z\pm\pi)$, $w_{\mathrm{II}}(z\pm\pi)$ も (*2.1*) の解であることがわかる．したがって，それらは $w_{\mathrm{I}}(z)$, $w_{\mathrm{II}}(z)$ の一次結合として表わされなければならない．たとえば

$$w_{\mathrm{I}}(z\pm\pi)=Aw_{\mathrm{I}}(z)+Bw_{\mathrm{II}}(z).$$

この式およびこれを $z$ で微分した式で $z=0$ とおいて係数 $A, B$ をきめれば

$$w_{\mathrm{I}}(z\pm\pi)=w_{\mathrm{I}}(\pi)w_{\mathrm{I}}(z)\pm w_{\mathrm{I}}'(\pi)w_{\mathrm{II}}(z), \tag{11.4}$$

同様にして

$$w_{\mathrm{II}}(z\pm\pi)=\pm w_{\mathrm{II}}(\pi)w_{\mathrm{I}}(z)+w_{\mathrm{II}}'(\pi)w_{\mathrm{II}}(z), \tag{11.5}$$

(11.4), (11.5) で複号を $-$ にとり，$z=\pi$ とおけば

$$1=w_{\mathrm{I}}(\pi)^2-w_{\mathrm{I}}'(\pi)w_{\mathrm{II}}(\pi), \tag{11.6}$$

$$0=w_{\mathrm{II}}(\pi)\{-w_{\mathrm{I}}(\pi)+w_{\mathrm{II}}'(\pi)\} \tag{11.7}$$

となる．(11.7) から $w_{\mathrm{I}}(\pi)=w_{\mathrm{II}}'(\pi)$ または $w_{\mathrm{II}}(\pi)=0$ をうるが $w_{\mathrm{II}}(\pi)=0$ ならば (11.6) から $w_{\mathrm{I}}(\pi)=\pm 1$ となり，これらを (11.3) に入れれば $w_{\mathrm{II}}'(\pi)=\pm 1$ となるので，いずれにしても

$$w_{\mathrm{I}}(\pi)=w_{\mathrm{II}}'(\pi) \tag{11.8}$$

がえられる．

再び (11.4), (11.5) において複号を $-$ にとり，$z=\frac{\pi}{2}$ とおけば

$$w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=w_{\mathrm{I}}(\pi)w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)-w_{\mathrm{I}}'(\pi)w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right), \tag{11.9}$$

$$w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=w_{\mathrm{II}}(\pi)w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)-w_{\mathrm{II}}'(\pi)w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{11.10}$$

同様に，微分してから $z=\frac{\pi}{2}$ とおけば

$$-w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=w_{\mathrm{I}}(\pi)w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)-w_{\mathrm{I}}'(\pi)w_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2}\right), \tag{11.11}$$

$$w_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-w_{\mathrm{II}}(\pi)w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)+w_{\mathrm{II}}'(\pi)w_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{11.12}$$

(11.9) に $w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$，(11.11) に $w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ をかけて引き，(11.3) によって $w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)-w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ であることに注意すれば

$$w_{\mathrm{I}}'(\pi)=2w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{11.13}$$

同様にして，(11.10), (11.12) から

$$w_{\mathrm{II}}(\pi)=2w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{11.14}$$

がえられる．一方 (*11.9*) に $w'_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, (*11.11*) に $w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ をかけて引けば

$$w_{\mathrm{I}}(\pi)=w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)+w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

これと $1=w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)-w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ とを加え，または引けば，つぎの関係がえられる：

$$w_{\mathrm{I}}(\pi)+1=2w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right), \tag{11.15}$$

$$w_{\mathrm{I}}(\pi)-1=2w_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{11.16}$$

なお，これらの諸公式に現われる $w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $w_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, … はいずれも $\lambda$ と $h^2$ の正則函数である．

## §12 Floquet の定理，固有指数

(*11.1*) の係数が $\pi$ の周期をもつことからの結果を導こう．恒等的に 0 でない (*11.1*) の解 $w(z)$ を考えれば $w(z+\pi)$ もまた同じ微分方程式の解である．いま特に，$\sigma$ をある定数として

$$w(z+\pi)=\sigma w(z) \tag{12.1}$$

を満足するような $w(z)$ を求めてみよう．解は函数自身とその微分係数とのある点での値で完全に定まるから，(*12.1*) は

$$w(\pi)=\sigma w(0), \quad w'(\pi)=\sigma w'(0)$$

と同等である．$w(z)$ を基本解 $w_{\mathrm{I}}(z)$, $w_{\mathrm{II}}(z)$ で表わして $Aw_{\mathrm{I}}(z)+Bw_{\mathrm{II}}(z)$ とおき，上の条件を書けば

$$(w_{\mathrm{I}}(\pi)-\sigma)A+w_{\mathrm{II}}(\pi)B=0,$$
$$w_{\mathrm{I}}'(\pi)A+(w'_{\mathrm{II}}(\pi)-\sigma)B=0.$$

これから $A, B$ を消去し，(*11.8*), (*11.3*) を利用すれば

$$\sigma^2-2w_{\mathrm{I}}(\pi)\sigma+1=0 \tag{12.2}$$

をうる．あるいは，

$$\sigma=e^{i\pi\nu} \tag{12.3}$$

とおけば

$$\cos\pi\nu=w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2) \tag{12.4}$$

と書くこともできる．

(*12.4*) を満足する $\nu$ の値は，パラメタ値 $\lambda, h^2$ に対する‘固有指数’と呼ば

れる．(*12.4*) によれば $\nu$ と同時に $2l\pm\nu$ ($l$ 整数) が固有指数になる．したがって，$\nu$ が固有指数であるとき，すなわち定まった $\lambda, h^2$ に対して，(*12.4*) を満足するとき，Mathieu 微分方程式の，恒等的に 0 でない解で，

$$w(z+\pi)=e^{i\pi\nu}w(z) \tag{12.5}$$

を満足するものが存在する．このような解を Floquet の解 (量子物理学では Bloch の解) と称する．

(*12.5*) を満足する $w(z)$ は，$u(z)$ を周期 $\pi$ の函数として，

$$w(z)=e^{i\nu z}u(z) \tag{12.6}$$

の形に書くことができる．$l$ を任意の整数とするとき $e^{2ilz}$ も $\pi$ の周期をもつから，同じ $w(z)$ を

$$w(z)=e^{i(\nu+2l)z}\cdot e^{-2ilz}u(z)$$

と書けば，(*12.6*) の $\nu$ の代りに $\nu+2l$ を使ってもよいことがわかる．すなわち $\nu$ には $+2l$ だけの不定さがあるので，これを利用して $-1\leqq\nu\leqq1$ ($\nu$ が複素数のときは $-1\leqq\Re\nu\leqq1$) ととることもできる．このように定めた $\nu$ を換算固有指数という．

しかし，ここでは換算しない固有指数を考える方針で進もう．それには $w(z)$ が $\lambda, h^2$ の連続函数であり，$h=0$ のときには解が特に簡単な形

$$w(z)=Ce^{i\alpha z}+De^{-i\alpha z} \tag{12.7}$$

($\alpha^2=\lambda$) となることを利用する．これが Floquet の解であるためには，$\alpha$ が整数でない限り，$CD=0$ で $w(z)$ は単項指数函数でなければならない．これを $w(z)\propto e^{i\alpha z}$ とおいて一般性を失わない．さらに，これが固有指数 $\nu$ に属するためには $\alpha=\nu+2l$ ($l$ 整数) でなければならない．よっていま

$$\lim_{h^2\to0}w(z)=e^{i\nu z} \tag{12.8}$$

となるような Mathieu 方程式の解 $w(z)$ を次数 $\nu$ の Mathieu 函数と称し，Meixner に従って $\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$ と書くことにする．パラメタに $\lambda$ を書かないのは，(*12.4*) の条件があるので，$\nu, h^2$ で $\lambda$ は定まっていると考えるためである．この $\nu$ は上述の意味で“換算されない”固有指数である．

(*12.7*) の $\alpha$ が整数のときにはこれを $e^{i\alpha z}(C+De^{-2i\alpha z})$ と書いてわかるように，$CD\neq0$ でも Floquet の解になりうる．それゆえ，この場合 $\lim_{h^2\to0}w(z)$ はあらかじめ指定できない．

## §13 解の安定，不安定．量子力学への応用

$w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2)$ が $\pm1$ のどちらにも等しくない場合には (*12.4*) を満足する $\nu$ は整数ではない．このときには $\mathrm{me}_\nu(z,h^2)$ と $\mathrm{me}_{-\nu}(z,h^2)$ とが一次独立であって，基本解を形成すると考えてよい．

$h^2$ および $\lambda$ を実とすれば $w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2)$ は実である．これの絶対値が 1 より大きいか小さいかによって解の性質に次に述べるような著しい差異がある．

(I) $|w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2)|>1$ のとき．(*12.4*) によれば $\nu$ は純虚数に定まる：$\nu=\pm ir$ ($\tau>0$ とする)．このとき二つの独立な解 $\mathrm{me}_{i\tau}(z;h^2)$, $\mathrm{me}_{-i\tau}(z;h^2)$ は

$$\mathrm{me}_{\pm i\tau}(z+n\pi;h^2)=e^{\mp n\tau\pi}\mathrm{me}_{\pm i\tau}(z;h^2)$$

を満足するから，$\mathrm{me}_{i\tau}(z;h^2)$ は $z\to-\infty$ のとき，$\mathrm{me}_{-i\tau}(z;h^2)$ は $z\to+\infty$ のとき，いずれも指数函数的に増大し，結局 $-\infty\leqq z\leqq\infty$ で有界な解は存在しない．この場合，解は不安定であるといい，$(\lambda,h^2)$ を座標とする平面上，このような区域は不安定域であるという．

(II) $|w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2)|<1$ のとき．(*12.4*) によれば $\nu$ は実数に定まる．この場合，固有指数 $\nu$ の解と $-\nu$ の解とは基本解をなし，しかも $|e^{\pm i\pi\nu}|=1$ であるから，すべての解は $-\infty\leqq z\leqq\infty$ で有界である．この場合解は安定であるといい，$\lambda,h^2$ 平面上のこのような区域は安定域であるという．

(III) $|w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2)|=1$ のとき．$w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2)=+1$ ならば $\nu$ は偶数に，$-1$ ならば $\nu$ は奇数に，定まり，$\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$ はそれぞれの場合に周期 $\pi$ または $2\pi$ をもつ周期函数となり，これはもちろん有界である．しかし，これらの場合，微分方程式の第二の解は有界でない．このことはすでに §4 で証明したところである．

この結果によれば，$(\lambda,h^2)$ を直角座標とする平面上において安定域と不安定域との境界は周期解に対する $\lambda(h^2)$ の曲線，すなわち第 4.1 図に示した固有値の曲線である．$h^2=0$ のときには $\lambda>0$ がすべて安定域に入ることに注意し，第 4.1 図の曲線間の区域から安定域を選び出し斜線を施せば第 13.1 図がえられる．

量子力学において，ポテンシアル $V(x)$ の中を運動する電子に対する一次元の Schrödinger 方程式は

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)\psi=E\psi$$

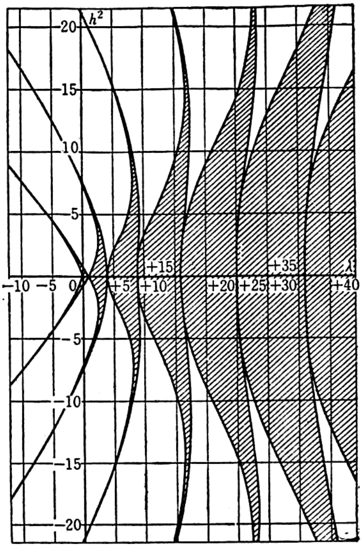
である．結晶の中などでは $V(x)$ は周期函数であるが，とくに

$$V(x)=V_0\cos 2\pi\frac{x}{a}$$

で近似できる場合には $x=\dfrac{a}{\pi}z,\ \dfrac{8ma^2}{h^2}E=\lambda,\ \dfrac{8ma^2}{h^2}V_0=h^2$ ととることによって

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+(\lambda-h^2\cos 2z)\psi=0$$

がえられる．これはまさに Mathieu 方程式である．結晶が無限に拡っているとすれば，$-\infty<z<+\infty$ で $\psi$ が有界であるようなエネルギー $E$ の範囲を求めることが問題になるが，それには $\lambda$ の安定域を定め $E=\dfrac{h^2}{8ma^2}\lambda$ によってエネルギー $E$ のとりうる範囲を定めればよい．第 13.1 図からわかるように，その結果としては許されるエネルギーの範囲が無数の帯状の区域にわかれ，その間にエネルギーのとりえない値の範囲――すなわち禁止された区域――が拡っている．これは結晶における電子エネルギーの帯構造の典型的な例である．




第 13.1 図

Mathieu 函数およびその応用についての解説を以上で終り，次節からスフェロイド函数について論じよう．

## §14　スフェロイド函数の導入

直角座標 $x, y, z$ を

$$\left.\begin{aligned} x&=c\sinh\xi\sin\eta\cos\varphi,\\ y&=c\sinh\xi\sin\eta\sin\varphi,\\ z&=c\cosh\xi\cos\eta \end{aligned}\right\}\qquad(14.1)$$

とおくとき，$(\xi,\eta,\varphi)$ は扁長回転楕円体座標である．あるいは $\cosh\xi=u$, $\cos\eta=v$ とおいて $(\xi,\eta,\varphi)$ の代りに $(u,v,\varphi)$ を扁長回転楕円体座標ととってもよい．すなわち

$$\left.\begin{aligned} x &= c\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}\cos\varphi, \\ y &= c\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}\sin\varphi, \\ z &= cuv, \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

$$u \geqq 1,\ 1 \geqq v \geqq -1,\ \varphi = (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

ととる．いま，この座標を使って Helmholtz の方程式 $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ を書きかえ，$\varphi$ については $\psi$ は $\cos(m\varphi-\alpha)$ に比例するとすれば，

$$(L_u-L_v)\psi = 0 \tag{14.3}$$

をうる．ただし

$$L_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}\left\{(u^2-1)\frac{\partial}{\partial u}\right\}+\left(\kappa^2u^2-\frac{m^2}{u^2-1}\right), \qquad \kappa = kc \tag{14.4}$$

とする．

(14.3) において $\psi = U(u)V(v)$ ととれば $U, V$ は同じ形の微分方程式

$$\frac{d}{du}\left\{(u^2-1)\frac{dU}{du}\right\}+\left(\kappa^2u^2-\lambda-\frac{m^2}{u^2-1}\right)U = 0, \tag{14.5}$$

$$\frac{d}{dv}\left\{(1-v^2)\frac{dV}{dv}\right\}+\left(-\kappa^2v^2+\lambda-\frac{m^2}{1-v^2}\right)V = 0 \tag{14.6}$$

がえられる．この方程式の解をスフェロイド函数という．これをまとめて

$$\frac{d}{dz}\left\{(z^2-1)\frac{dw}{dz}\right\}+\left(\kappa^2z^2-\lambda-\frac{m^2}{z^2-1}\right)w = 0 \tag{14.7}$$

と書き，この解を論じよう．

(14.7) が (14.6) に対して使われる場合には，まず $-1 \leqq z \leqq 1$ で正則な，恒等的に 0 でない解が重要である．このような解は固有値 $\lambda$ の飛び飛びの値に対してだけ存在する．$\kappa=0$ のときは (14.7) は Legendre の微分方程式で固有値は $\lambda = n(n+1)$ であり固有函数は Legendre 函数

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z) = \frac{1}{2^nn!}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}(z^2-1)^n \tag{14.8}$$

である $(n = m, m+1, m+2, \cdots)$．これに指示をえて，(14.7) の固有値を $\lambda = \lambda_{nm}$，固有函数を $\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ と書くことにする．すなわち $\kappa\to 0$ のとき $\mathrm{pe}_n{}^m(z) \to \mathrm{const}\, P_n{}^m(z)$ である．

$\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ の規格化はここでは未定としておく．以下の諸公式はいずれも規格化の方法如何にかかわらず成立する．

$\kappa$ の一般の値に対しては $\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ は Legendre 函数 (14.8) で無限級数の

形に展開される．すなわち

$$\mathrm{pe}_n{}^m(z)=\sum_{l\geqq m}^{\infty}A_{n,l}^m P_l{}^m(z),\qquad |l-n|=\text{偶数}. \tag{14.9}$$

これを (*14.7*) に代入すれば係数 $A$ の間の三項関係式を得る：

$$\left\{-\lambda+l(l+1)+\kappa^2\frac{2l^2+2l-1-2m^2}{(2l-1)(2l+3)}\right\}A_{n,l}^m+\kappa^2\frac{(l-m-1)(l-m)}{(2l-3)(2l-1)}A_{n,l-2}^m$$
$$+\kappa^2\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+3)(2l+5)}A_{n,l+2}^m=0,\quad (l>m+1), \tag{14.10}$$

$l=m+1, m$ に対しては $A_{n,l-2}^m$ の項は消えて二項関係式となる．これらの定差方程式を

$$\lim_{l\to\infty}(A_{n,l}^m/A_{n,l-2}^m)\to-\frac{\kappa^2}{4l^2}$$

なる境界条件の下に解けば固有値 $\lambda=\lambda_{nm}$ および（共通に掛かる数を除いて）$A_{n,l}^m$ が定まる．実際には与えられた $\kappa$ について逐次近似法によって $\lambda_{nm}$, $A_{n,l}^m$ を求めるのであるが，その詳細の記述は省略する．

$z>1$ にしても (*14.9*) は (*14.7*) の解であるが，その場合には (*14.8*) の代りに

$$\dot{P}_n{}^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z) \tag{14.11}$$

を使うのが便利である．それを

$$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)=\sum_l A_{n,l}^m\dot{P}_l{}^m(z) \tag{14.12}$$

とおく．(*14.11*) において $(1-z^2)^{m/2}$ でなく $(z^2-1)^{m/2}$ を採用してあることを示すために $P_l{}^m$ および $\mathrm{pe}_n{}^m$ の上に点を付した．

$\lambda=\lambda_{nm}$ のときの (*14.7*) の解で $\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ と反対の奇偶性をもつ函数を $\mathrm{qe}_n{}^m(z)$ とする．これは次の形で求められる：

$$\mathrm{qe}_n{}^m(z)=\sum_{\substack{l\geqq -m\\ |l-n|=\text{偶}}}A_{n,l}^m Q_l{}^m(z)+\sum_{\substack{j\geqq m\\ |j-n|=\text{奇}}}B_{n,j}^m P_j{}^m(z). \tag{14.13}$$

$\mathrm{qe}_n{}^m(z)$ の展開式はこのように $m>l\geqq -m$ の $Q_l{}^m(z)$ および $P_j{}^m(z)$ を含むことに注意を要する．$l\geqq m$ のときの $Q_l{}^m(z)$ は

$$Q_l{}^m(z)=\frac{1}{2}P_l{}^m(z)\log\frac{1+z}{1-z}+(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}\times(z\text{ の多項式}) \tag{14.14}$$

の形をもっているが，$m>l\geqq -m$ の $Q_n{}^m(z)$ は log の項をもっていない．な

お, (*14.13*) の $A_{n,l}^m$ のうち $l \geqq m$ に対するものは (*14.9*) の $A_{n,l}^m$ と同じである. $-m \leqq l < m$ に対する $A_{n,l}^m$ および $B_{n,j}^m$ の値の求め方は別の論文[(1)]に述べたのでここに省くことにする.

(*14.13*), (*14.14*) により

$$\mathrm{qe}_n{}^m(z) = \frac{1}{2}\mathrm{pe}_n{}^m \log\frac{1+z}{1-z} + (1-z^2)^{-\frac{m}{2}} \times (\text{正則函数}) \qquad (14.15)$$

なる関係が得られるが, $\mathrm{qe}_n{}^m(z)$ の $z=\pm 1$ における特異性はこの式から明らかである.

$\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ の場合と同様に, $z>1$ に対しては (*14.13*) の代りに次の級数を使う:

$$\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z) = \sum_{\substack{l \geqq -m \\ |l-n| = \text{偶}}} A_{r,l}^m \dot{Q}_l{}^m(z) + \sum_{\substack{j \geqq m \\ |j-n| = \text{奇}}} B_{n,j}^m \dot{P}_j{}^m(z), \qquad (14.16)$$

$$\dot{Q}_e{}^m(z) = \frac{1}{2}\dot{P}_l{}^m(z) \log\frac{z+1}{z-1} + (z^2-1)^{-\frac{m}{2}} \times (x\text{ の多項式}). \qquad (14.17)$$

したがって

$$\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z) = \frac{1}{2}\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z) \log\frac{z+1}{z-1} + (z^2-1)^{-\frac{m}{2}} \times (\text{正則函数}). \qquad (14.18)$$

## §15　スフェロイド函数の積分表示式

回転楕円体座標で書いた Helmholtz の方程式 (*14.3*) は (*1.5*) と同じ形をもっている. したがって §5 の定理に対応するつぎの定理が成り立つ:

**定理**　$K(z, z')$ が (*14.4*) の演算子 $L$ につき

$$(L_z - L_{z'})K(z, z') = 0 \qquad (15.1)$$

を満足する函数であるとし, $w(z')$ をスフェロイド方程式

$$L_{z'}w - \lambda w = 0 \qquad (15.2)$$

の解とするとき, $z$ につき恒等的に

$$(1-z^2)\left\{w(z')\frac{\partial}{\partial z'}K(z, z') - K(z, z')\frac{dw}{dz'}\right\}\bigg|_a^b = 0 \qquad (15.3)$$

ならば

$$f(z) = \int_a^b K(z, z')w(z')dz' \qquad (15.4)$$

は $w(z)$ と同じ $\lambda, \kappa$ に対するスフェロイド方程式を満足する.

(1) Kotani: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **15** (1933), 30.

証明は §5 と同様であるから省く．

特に，$K(z, z')$ を $-1\leqq z'\leqq 1$ で正則な (15.1) の解とし，$w$ を $\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ にとれば

$$f(z)=\int_{-1}^{+1}K(z, z')\mathrm{pe}_n{}^m(z')dz' \tag{15.5}$$

は $\lambda=\lambda_n{}^m$ に対するスフェロイド方程式を満たす．さらに $K(z, z')$ が $-1\leqq z'\leqq 1$ のすべての $z'$ につき $z=\pm 1$ で正則であれば $f(z)$ は $\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ の定数倍でなければならない．その場合には $\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ に対する積分方程式がえられる．

たとえば

$$K(z, z')=e^{i\kappa zz'}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}} \tag{15.6}$$

ととることによって次の積分方程式が得られる：

$$i^{n-m}\nu_{nm}\mathrm{pe}_n{}^m(z)=\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}e^{i\kappa zz'}\mathrm{pe}_n{}^m(z')dz'. \tag{15.7}$$

実数 $\nu_{nm}$ は $\kappa$ の函数であるが，その数値は (15.7) またはそれを $z$ で微分した式において $z\to 0$ として求められる．すなわち，$n-m=$ 偶数 ならば，

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-m}{2}}\nu_{nm}\mathrm{pe}_n{}^m(0)&=\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{pe}_n{}^m(z')dz'\\&=A_{n,m}^m\frac{2^{m+1}m!}{2m+1},\end{aligned} \tag{15.8}$$

$n-m=$ 奇数 ならば

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-m-1}{2}}\nu_{nm}\mathrm{pe}_n{}^{m\prime}(0)&=\kappa\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}z'\mathrm{pe}_n{}^m(z')dz'\\&=\kappa A_{n,m+1}^m\frac{2^{m+1}m!}{2m+3}.\end{aligned} \tag{15.9}$$

$\mathrm{pe}_n{}^m(0)$ および $\mathrm{pe}_n{}^{m\prime}(0)$ の数値は (14.9) と

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{\frac{m-n}{2}}P_n{}^m(0)&=\frac{1\cdot 3\cdots(n+m-1)}{2\cdot 4\cdots(n-m)}, &&(n-m,\ \text{偶}),\\(-1)^{\frac{m-n-1}{2}}P_n{}^{m\prime}(0)&=\frac{1\cdot 3\cdots(n+m)}{2\cdot 4\cdots(n-m-1)}, &&(n-m,\ \text{奇})\end{aligned}\right\} \tag{15.10}$$

とから容易に計算される．

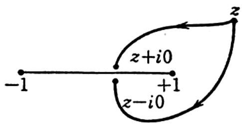
$\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m$ に対する積分表示式を得るために，次の定積分を考える：

$$(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int_{-1}^{+1}\frac{J_{-m-1/2}(\kappa(z-z'))}{\{\kappa(z-z')\}^{m+1/2}}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{pe}_n{}^m(z')dz'. \tag{15.11}$$

$K(z,z')=\dfrac{J_{-(m+1/2)}(\kappa(z-z'))}{\{\kappa(z-z')\}^{m+1/2}}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$ は (*15.1*) を満足し，$|z|>1$ ならば $-1\leqq z'\leqq +1$ で正則であるから，(*15.11*) は微分方程式 (*14.7*) の $\lambda=\lambda_{nm}$ に対する解である．しかし，$z\to 1$, $z'\to 1$ のときこの $K(z,z')$ は特異性を示すので (*15.11*) は $z=\pm 1$ で正則ではない．容易にわかるように，$|z|>1$ の範囲で $z\to(-z)$ とするとき，$-(-1)^n$ がかかるが，$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ では $(-1)^n$ がかかる．すなわち (*15.11*) はその奇偶性において $\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ と逆である．したがって (*15.11*) は $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ の定数倍でなければならない：

$$D_{nm}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int_{-1}^{+1}\frac{J_{-m-1/2}(\kappa(z-z'))}{\{\kappa(z-z')\}^{m+1/2}}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{pe}_n{}^m(z')dz'. \tag{15.12}$$

定数 $D_{nm}$ を定めるには次の如くする：第 15.1 図の如く複素数の平面上で $-1, 1$ の間に切断線を入れれば $\mathrm{qe}_n{}^m$ は複素変数の函数として一価になる．よって，いま $z$ を $-1$ と $1$ との間の実数にとり，図の如く実軸の上側および下側よりに近づくと，(*14.18*) によって




第 15.1 図

$$\left.\begin{aligned}
i^{-m}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z+i0)&=-\frac{\pi i}{2}\mathrm{pe}_n{}^m(z)+\frac{1}{2}\mathrm{pe}_n{}^m(z)\log\frac{1+z}{1-z}\\
&\qquad+(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}f_n{}^m(z),\\
i^{m}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z-i0)&=\frac{\pi i}{2}\mathrm{pe}_n{}^m(z)+\frac{1}{2}\mathrm{pe}_n{}^m(z)\log\frac{1+z}{1-z}\\
&\qquad+(1-z^2)^{\frac{m}{2}}f_n{}^m(z),\\
&\qquad(f_n{}^m(z)\ \text{は}\ z\ \text{の一価函数}).
\end{aligned}\right\}$$

したがって

$$i^{m}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z-i0)-i^{-m}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z+i0)=\pi i\,\mathrm{pe}_n{}^m(z).$$

これに (*15.12*) を代入し簡単にすれば

$$(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\oint\frac{J_{-m-1/2}(\kappa(z-z'))}{\{\kappa(z-z')\}^{m+1/2}}\mathrm{pe}_n{}^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'=-\pi iD_{nm}\mathrm{pe}_n{}^m(z). \tag{15.13}$$

ただし左辺の積分は $z'=z$ なる極のまわりを正の向きに一周するものとする．留数の計算によって左辺の積分を計算すれば $D_{nm}$ が求められる．極の位数は $2m+1$ であるため留数は $\mathrm{pe}_n{}^m$ の $2m$ 階までの微分係数を含むが，$\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ の満足する微分方程式を利用すれば結局 $\mathrm{pe}_n{}^m(z)$ の定数倍となるのである．$m$

の小さい値に対する結果は次の通りである．

$$D_{n_0}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\kappa},\quad D_{n_1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda_{n_1}-\kappa^2}{\kappa^3}. \tag{15.14}$$

## §16　$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$, $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ の漸近展開

スフェロイド函数を (*14.5*) の解として使う場合には，しばしば $z\gg 1$ のときの漸近形が必要になる．

まず $\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ の積分表示式として，(*15.7*) から直ちに導かれる式

$$i^{n-m}v_{nm}\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int_{-1}^{+1}e^{i\kappa zz'}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{pe}_n{}^m(z')dz' \tag{16.1}$$

をとり，被積分函数の中の $\mathrm{pe}_n{}^m(z')$ に展開式 (*14.9*) を代入して項別に積分すれば，$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ の Bessel 函数による展開式

$$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)=\frac{\sqrt{2\pi}}{v_{nm}}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\sum_l(-1)^{\frac{l-n}{2}}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A^m_{n,l}\frac{J_{l+1/2}(\kappa z)}{(\kappa z)^{m+1/2}} \tag{16.2}$$

を得る．この式において $\kappa z\gg 1$ として $\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ の漸近形を求めると

$$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)\sim\frac{2}{v_{nm}\kappa^m}\left(\sum_l\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A^m_{n,l}\right)\frac{\sin\left(\kappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\kappa z}. \tag{16.3}$$

がえられる．

つぎに $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ の漸近形を求めよう．そのためには (*15.12*) を利用する．$\kappa z\gg 1$ とすれば

$$J_{-m-1/2}(\kappa(z-z'))\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\kappa z}}\cos\left(\kappa z-\kappa z'+\frac{m\pi}{2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}D_{nm}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\kappa^m}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos\left(\kappa z-\kappa z'+\frac{m\pi}{2}\right)}{\kappa z}\mathrm{pe}_n{}^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\kappa^m}\left[\frac{e^{i\kappa z+\frac{m\pi}{2}i}}{\kappa z}\int_{-1}^{+1}e^{-i\kappa z'}\mathrm{pe}_n{}^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'\right.\\&\quad\left.+\frac{e^{-i\kappa z-\frac{m\pi}{2}i}}{\kappa z}\int_{-1}^{+1}e^{i\kappa z'}\mathrm{pe}_n{}^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'\right].\end{aligned} \tag{16.4}$$

ここに現われる積分は (*15.7*) によって計算することができる：

$$\int_{-1}^{+1}e^{i\kappa z'}\mathrm{pe}_n{}^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'=i^{n-m}v_{nm}\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{pe}_n{}^m(z)}{(1-z^2)^{m/2}}$$

$$=\frac{i^{n-m}\nu_{nm}}{2^m m!}\sum_l\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m. \quad (16.5)$$

したがって

$$D_{nm}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^m\nu_{nm}}{2^m m!\,\kappa^m}\left(\sum_l\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m\right)\frac{\cos\left(\kappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\kappa z}. \quad (16.6)$$

このようにして，$\kappa z\gg 1$ のとき $\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ は $\dfrac{\sin\left(\kappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\kappa z}$ に比例し，$\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ は $\dfrac{\cos\left(\kappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\kappa z}$ に比例することがわかる．したがって，$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ と $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n{}^m(z)$ との一次式を作って，その漸近形が $\dfrac{1}{\kappa z}e^{i\kappa z}$ および $\dfrac{1}{\kappa z}e^{-i\kappa z}$ に比例するようにすることができる．これらの解は Mathieu 函数のときの $\mathrm{Me}_n^{(1)}(z)$, $\mathrm{Ne}_n^{(1)}(z)$ および $\mathrm{Me}_n^{(2)}(z)$, $\mathrm{Ne}_n^{(2)}(z)$ に対応し，回転楕円体座標を用いて外向きあるいは内向きの波を表わすのに必要であるが，ここにはその詳説を省く．

スフェロイド函数についてはなお扁平回転楕円体座標を使ったときの函数，物理学，工学の諸問題への応用等種々の問題があるが，後記の文献および 183 頁脚註にあげた論文等にゆずることとしたい．

# 参考書


〔1〕 Bateman H.: Partial differential equations of mathematical physics, Cambridge (1932).

〔2〕 Courant R.-Hilbert D.: Methoden der mathematischen Physik I (1931).

〔3〕 Courant R.-Hilbert D.: Methoden der mathematischen Physik II (1937), Berlin, Springer.

〔4〕 Courant R.-Hilbert D.: Methods of mathematical physics I (1953), Interscience.

〔5〕 Coddington E.-Levinson N.: Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill (1955).

〔6〕 Hadamard J.: Lectures on Cauchy's Problem, New Haven (1923).

〔7〕 Hadamard J.: Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris (1932).

〔8〕 犬井鉄郎: 応用偏微分方程式論　岩波 (1951).

〔9〕 犬井鉄郎: 偏微分方程式とその応用　コロナ (1957).

〔10〕 岩村 聯: 超函数　岩波講座　現代応用数学 (1958). 文献〔25〕に収録.

〔11〕 Iwanenko D.-Sokolow A: Klassische Feldtheorie, Berlin Akademie Verlag (1953).

〔12〕 小平邦彦: 二階常微分演算子の固有値問題について　数学, 第1巻 第3号　117頁 (1948), 第2巻 第2号　113 頁 (1949).

〔13〕 Morse P.-Feshbach H: Methods of theoretical physics I, II, McGraw-Hill (1953).

〔14〕 Prüfer H.: Mathematische Annalen, **95** (1926).

〔15〕 Schlögl F.: Randwertprobleme SS. 218～352. Handbuch der Physik Bd. I. Mathematische Methode, Berlin, Springer (1956).

〔16〕 Schwartz L.: Théorie des distributions I, II, Paris, Hermann (1951). 邦訳 I, II 合本 (岩村 聯): 超函数の理論　岩波 (1953).

〔17〕 Schwartz L.: "Généralisation de la notion de fonction et de dérivation; théorie des distributions." Annales des télécommunications, **3** (1948), pp. 135～140.

〔18〕 Sommerfeld A.: Partial differential equations of physics, New York (1949).

〔19〕 Titchmarsh E.: Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, I, 1946, Oxford.

〔20〕 Titchmarsh E.: Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, II, 1958, Oxford.

〔21〕 Webster A.-Szegö G.: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Leipzig (1930).

〔22〕 山内恭彦: 物理数学　岩波 (1950).

〔23〕 吉田耕作: 積分方程式論　岩波 (1950).

〔24〕 吉田耕作: 微分方程式の解法　岩波 (1954).

〔25〕 吉田耕作, 河田敬義, 岩村聯: 位相解析の基礎　岩波 (1960).

個々の引用文献については本文中の各所にあげておいた.

上記のうち全編にわたる参考書を平易なものおよび入門書を (a), さらに進んだもの (b), 専門的のもの (c) に大別してみれば, 次のようになる.

(a) 〔9〕, 〔22〕, 〔24〕

(b) 〔1〕, 〔8〕, 〔13〕, 〔18〕, 〔21〕

(c) 〔2〕, 〔3〕, 〔4〕

なお最後に特に第5章に関する文献をあげておく:

〔26〕 Strutt, M. J. O.: Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Ergbn. Math. u. Grenzgeb. 1 (1932).

〔27〕 Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., and Hunter R.A.: Elliptic cylinder and spheroidal wave functions, New York (1941).

〔28〕 Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Little J. D. C., Corbato F. J.: Spheroidal Wave functions including tables of separation constants and coefficients, New York (1956).

〔29〕 McLachlan N.W.: Theory and application of Mathieu functions, Oxford (1947).

〔30〕 Meixner J. and Schäfke F. W.: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin (1954).

〔31〕 Erdélyi A.: Higher transcendental functions, III, New York (1955).

〔32〕 Flammer C.: Spheroidal Wave Functions, Stanford (1957).

# B　微分方程式の近似解法

## 第1章　摂　動　法

### §1　常微分方程式の初期値問題

微分方程式が小さいパラメタ $\varepsilon$ を含んでいるとき，解を $\varepsilon$ のベキ級数の形に求めようとする近似解法が摂動法と呼ばれ，ひろく行われている．ふつう求めた級数が収束して真の解を表わすことが期待されるが，いつでもそうなるとはかぎらない．しかし収束しなくても漸近級数として役に立つことが多い．この章では主に収束する場合を取り扱うことにする．

1)　**基本定理**　連立常微分方程式

$$\frac{du_i}{dt}=f_i(t,\boldsymbol{u},\varepsilon) \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{1.1}$$

の右辺が小さいパラメタ $\varepsilon$ を含むものとする．$n$ 個の変数 $u_1,\cdots,u_n$ をまとめてベクトルとみなし $\boldsymbol{u}$ と書いてある．$f_i(t,\boldsymbol{u},\varepsilon)$ は $t$ の函数として適当に滑らかである上に，$u_1,\cdots,u_n,\varepsilon$ の函数としては正則（解析的）であるとし $\varepsilon=0$ の近所で

$$f_i(t,\boldsymbol{u},\varepsilon)=f_i^{(0)}(t,\boldsymbol{u})+\varepsilon f_i^{(1)}(t,\boldsymbol{u})+\cdots \tag{1.2}$$

のように Taylor 級数に展開できるものとする．係数 $f_i^{(m)}(t,\boldsymbol{u})$ は $u_1,\cdots,u_n$ の正則函数である．その意味は，$u_1,\cdots,u_n$ の各点の近所で $n$ 重 Taylor 級数に展開できるということである．$\varepsilon$ や $u_i$ は複素数値をとってもよいが，簡単のため以下実数値をとるものとしておく．

このとき (*1.1*) の解 $u_i$ も正則で $\varepsilon$ の Taylor 級数

$$u_i=u_i(t,\varepsilon)=u_i^{(0)}(t)+\varepsilon u_i^{(1)}(t)+\cdots \tag{1.3}$$

のように展開されるであろう．ただし (*1.1*) の解は初期値を与えないと定まらないから

$$t=a \text{ で } \quad u_i=b_i(\varepsilon)=b_i^{(0)}+\varepsilon b_i^{(1)}+\cdots \tag{1.4}$$

という初期条件をつけておく．実際にこのとき (*1.3*) が成立することは，常微

分方程式の理論で知られている[1]．ただし $(1.3)$ は $t$ と $\varepsilon$ の適当な領域においてだけ成立するものであることはいうまでもない．$\varepsilon=0$ の場合（これを**非摂動方程式** (unperturbed equation) という）に $t$ のある区間 $I_0$ にわたって解が存在したとすれば，$I_0$ より小さい区間 $I$ を定めたとき，それに応じて適当な正数 $\delta$ をとれば，$|\varepsilon|<\delta$ ならば $(1.4)$ を満足する $(1.1)$ の解が $I$ において存在して $(1.3)$ の形に表わされる．一般に $I$ を大きくすれば $\delta$ は小さくとらねばならないであろう．

2)　**計算法**　級数 $(1.3)$ を実際に求めるには，これを $(1.1)$ に代入して両辺を $\varepsilon$ のベキ級数の形にし，係数を比較すればよい．$\varepsilon^0$ の係数からは

$$\frac{du_i^{(0)}}{dt}=f_i^{(0)}(t,\boldsymbol{u}^{(0)}) \qquad (1.5)$$

がえられる．これは非摂動方程式にほかならない．これを $t=a$ で $u_i^{(0)}=b_i^{(0)}$ という初期条件の下に解く．次に $\varepsilon^1$ の係数からは

$$\frac{du_i^{(1)}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}f_{i,k}^{(0)}(t,\boldsymbol{u}^{(0)})u_k^{(1)}+f_i^{(1)}(t,\boldsymbol{u}^{(0)}) \qquad (1.6)$$

を得る．$f_{i,k}^{(0)}$ は $\partial f_i^{(0)}/\partial u_k$ を表わす．右辺の $\boldsymbol{u}^{(0)}$ には上に求めた解を代入するから，この式は $\boldsymbol{u}^{(1)}$ についての線型連立方程式で，いわゆる**変分方程式**にほかならない．この方程式を初期条件 $u_i^{(1)}=b_i^{(1)}$ の下に解いて $\boldsymbol{u}^{(1)}$ を定める．$\varepsilon^2$ の係数からは

$$\frac{du_i^{(2)}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}f_{i,k}^{(0)}(t,\boldsymbol{u}^{(0)})u_k^{(2)}+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}f_{i,kl}^{(0)}(t,\boldsymbol{u}^{(0)})u_k^{(1)}u_l^{(1)}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}f_{i,k}^{(1)}(t,\boldsymbol{u}^{(0)})u_k^{(1)}+f_i^{(2)}(t,\boldsymbol{u}^{(0)}) \qquad (1.7)$$

が出る．$f_{i,kl}^{(0)}$ は $\partial^2 f_i^{(0)}/\partial u_k\partial u_l$ を表わす．右辺の $\boldsymbol{u}^{(0)},\boldsymbol{u}^{(1)}$ は既知であるから，この式は $\boldsymbol{u}^{(2)}$ について線型であり，その主要部（同次項）は $(1.6)$ の場合と全く同じである．この方程式を初期条件 $u_i^{(2)}=b_i^{(2)}$ の下に解く．

以下同様にして各 $\boldsymbol{u}^{(m)}$ に関する方程式が次々に作られるが，$\boldsymbol{u}^{(0)}$ の場合を除いてはこれらはすべて線型で同じ主要部をもつ．したがって相当する同次方程式の一組の基本解が求まっていれば，定数変化の法（I §7.7）を用いて解をかき表わすことができる．

---

(1)　例えば福原満洲雄，常微分方程式（岩波全書）93 頁．

もし非摂動方程式の一般解［$n$ 個の任意定数 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ を含むもの］$u_i(t,\boldsymbol{\alpha})$ が知られていれば，これらの基本解も直ちに求めることができる．すなわち

$$v_{ip}(t)=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_p}u_i(t,\boldsymbol{\alpha})\right]_{\boldsymbol{\alpha}=\overline{\boldsymbol{\alpha}}} \tag{1.8}$$

とおくと，$v_{1p},\cdots,v_{np}$ $(p=1,\cdots,n)$ が求める一組の基本解である．（$\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ は考えている解 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ に相当する $\boldsymbol{\alpha}$ の値を表わす.）これをみるには，$u_i(t,\boldsymbol{\alpha})$ を $(1.5)$ に代入したものは $\boldsymbol{\alpha}$ について恒等的に成立するから，$\alpha_p$ で微分して $\boldsymbol{\alpha}=\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ とおけばよい．$v_{ip}$ の作る行列式が 0 でないことは $\partial u_i/\partial\alpha_p$ の作る Jacobi 行列式が 0 でないこと（これは一般解の概念に含まれよう）と同等である．

3）**諸注意**　上では一階の連立方程式についてのべたが，パラメタをふくむ高階の単独方程式

$$\frac{d^n u}{dt^n}=f\left(t,u,\frac{du}{dt},\cdots,\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}},\varepsilon\right) \tag{1.9}$$

についても同様な結果が成り立つ．ただし $f$ は $t$ 以外の変数については正則であるとする．$u=u_1,\ du/dt=u_2,\cdots,d^{n-1}u/dt^{n-1}=u_n$ とおくと $(1.9)$ は連立方程式 $(1.1)$ に帰着できるからである．ただし実際の計算には連立方程式に直す必要はなく，解を $\varepsilon$ のベキ級数の形に書いて直接 $(1.9)$ に代入し逐次係数を決定すればよい．その結果やはり非摂動方程式以外は線型になる．

以上にのべたのは最も素朴な形の摂動法であるが，その難点は，$t$ の区間を大きくすると $\varepsilon$ の許される範囲が狭くなることである．無制限の $t$ に対して許される Taylor 展開を求めようとすれば，適当な工夫によってこれを改良する必要がある．

なお注意すべきことは

$$F\left(t,u,\frac{du}{dt},\cdots,\frac{d^n u}{dt^n},\varepsilon\right)=0$$

のような一般の微分方程式に対しては，解 $u$ が必ずしも $\varepsilon$ のベキ級数に展開できないことである．たとえば

$$f_0(t,\varepsilon)\frac{d^n u}{dt^n}+f_1(t,\varepsilon)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+\cdots+f_n(t,\varepsilon)u=g(t,\varepsilon)$$

のような線型方程式において，もし $f_0(t,0)$ が恒等的に 0 であったり，そうで

なくても考えている $t$ の区間の中で $f_0(t,0)$ が0になる点があると，問題は甚だ複雑になる．この種の問題は“特異”摂動論に属し，そのあるものは第2,3章で取り扱う．

## §2　境界値問題

**1)　二次元境界値問題**　境界値問題に摂動法を応用する例として，偏微分方程式

$$-\nabla^2 u+\varepsilon q(x,y)u=f(x,y) \tag{2.1}$$

を考えてみよう．$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ はラプラシアンを表わす．$u$ は平面の有界な領域 G で (2.1) を満たし，

$$\text{G の境界 } \Gamma \text{ の上で} \qquad u=0 \tag{2.2}$$

という境界条件を満たすことを要求されているとする．$\varepsilon$ は小さいパラメタとし，解を

$$u=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2 u^{(2)}+\cdots \tag{2.3}$$

の形に求めることを考えよう．

(2.3) を (2.1) に代入して $\varepsilon$ の各ベキを比較すれば，直ちに次の方程式がえられる：

$$\left.\begin{aligned} -\nabla^2 u^{(0)}&=f,\\ -\nabla^2 u^{(m)}&=-qu^{(m-1)} \qquad (m=1,2,\cdots). \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

境界条件としてはすべての $u^{(m)}$ に (2.2) が課せられる．

ラプラシアン $\nabla^2$ と領域 G に関する Green 函数[1] $K(x,y;\xi,\eta)$ が知れているとすると，(2.4) の解は容易に

$$\left.\begin{aligned} u^{(0)}&=Kf,\\ u^{(m)}&=-Kqu^{(m-1)} \qquad (m=1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

で与えられる．ただし $Kf$ などの意味は

$$Kf(x,y)=\int_G K(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi\, d\eta \tag{2.6}$$

であって，$K$ は函数 $f$ に作用して函数 $Kf$ を作る**積分演算子**である．なお函数 $u$ に函数 $q$ を乗じて $qu$ を作る演算子を $Q$ と書けば $(Qu=qu)$, $u^{(m)}=-KQu^{(m-1)}$ より

(1)　I, 643 頁．

$$u^{(m)} = (-1)^m KQ\,KQ\cdots QKf \qquad (m \text{ 個の } Q)$$

を得る．よって求める解は

$$u = Kf - \varepsilon KQ\,Kf + \varepsilon^2 KQ\,KQ\,Kf - \cdots \tag{2.7}$$

で与えられる．右辺第 $n$ 項は詳しく書けば $n$ 回重複積分で表わされる．

2) **収束半径，誤差** 解 (2.7) は全く形式的に求めたものであるが，どのような $\varepsilon$ に対してこれが収束するかを調べてみよう．それには $u$ や $f$ を含む適当な函数空間を考え，そこに適当な**ノルム**を導入するのが便利である．ノルムというのは，函数 $f$ をベクトルのように考えたときに，その“長さ”に相当する量であって，その定義はいろいろにできる．ここでは $f$ が $\mathrm{G}+\Gamma=\bar{\mathrm{G}}$ で連続であると仮定し，$\bar{\mathrm{G}}$ で連続な函数の全体 $\mathfrak{F}$ を考えて，$\mathfrak{F}$ に属する函数 $v$ のノルムとして $|v(x,y)|$ の最大値

$$\|v\| = \operatorname*{Max}_{x,y\in\bar{\mathrm{G}}} |v(x,y)| \tag{2.8}$$

を採用してみる．こうすると演算子 $K$ は $\mathfrak{F}$ の勝手な元を $\mathfrak{F}$ の元に移すばかりでなく，**有界**である．すなわち

$$\|Kv\| \leqq M\|v\| \tag{2.9}$$

のような，$v$ によらない定数 $M$ がある．何故なら Green 函数は正であるから

$$|Kv(x,y)| \leqq \int_{\mathrm{G}} K(x,y;\xi,\eta)|v(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta$$

$$\leqq \|v\| \int_{\mathrm{G}} K(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

であるが，G が有界領域ならば

$$\int_{\mathrm{G}} K(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \leqq M \tag{2.10}$$

のような，$x,y$ によらない定数 $M$ が存在するからである．これは“領域 G が大きくなると Green 函数も増加する”という定理[(1)]を用いて，$K$ を適当な円形領域の Green 函数と比較することによって証明できる．なお Green 函数は $(x,y)=(\xi,\eta)$ に特異点をもつが，上の積分は存在する．これらのことは $n$ 次元ラプラシアンの場合にも全く同様に成り立っている．

一般に (2.9) の成立するような $M$ の最小値を演算子 $K$ のノルムと呼んで

---

(1) 例えば 編末文献〔10〕II，第 4 章参照．

$\|K\|$ と書く. (これは**函数** $K(x, y; \xi, \eta)$ のノルムとはちがう.) 同様に演算子 $Q$ のノルムを $\|Q\|$ とする. $q(x, y)$ が $\bar{G}$ で連続ならば $\|Q\|$ は有限で, 函数 $q$ のノルム $\|q\|$ と一致する.

さて $u^{(m)} = -KQu^{(m-1)}$ であったから

$$\|u^{(m)}\| = \|KQu^{(m-1)}\| \leqq \|K\|\,\|Qu^{(m-1)}\| \leqq \|K\|\,\|Q\|\,\|u^{(m-1)}\|$$

であり, これをくり返して使えば

$$\|u^{(m)}\| \leqq (\|K\|\,\|Q\|)^m \|K\|\,\|f\| \tag{2.11}$$

となる. 他方ノルム (2.8) の性質として $\|u+v\| \leqq \|u\| + \|v\|$ が成り立つから, 級数 (2.7) は

$$|\varepsilon| < 1/\|K\|\,\|Q\| \tag{2.12}$$

であれば, ノルムの意味で収束する. すなわち $\|\varepsilon^m u^{(m)} + \cdots + \varepsilon^{m+p} u^{(m+p)}\| \to 0$ $(m \to \infty)$ が成り立つ. ところがわれわれのノルムの定義 (2.8) によれば, ノルム収束は函数としての**一様収束**に他ならない. したがって (2.7) は連続函数の級数で一様収束するから, 極限 $u$ はたしかに存在して連続函数である. ただし $u$ が実際二回微分可能で (2.1) の解になっていることは自明ではない. そのためには実は $f$ や $q$ が連続であるだけでは十分ではない. 適当な条件の下にこれを証明することができるが, 証明は (2.1) の解の存在の証明と同程度に複雑であるからここでは立ち入らない.

級数 (2.7) を有限項で止めた場合の誤差は次のようにして評価することができる.

$$\begin{aligned} &\|u - (u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \cdots + \varepsilon^m u^{(m)})\| \\ &\quad = \|\varepsilon^{m+1} u^{(m+1)} + \varepsilon^{m+2} u^{(m+2)} + \cdots\| \\ &\quad \leqq |\varepsilon|^{m+1} \|u^{(m+1)}\| + |\varepsilon|^{m+2} \|u^{(m+2)}\| + \cdots \\ &\quad \leqq |\varepsilon|^{m+1} (\|K\|\,\|Q\|)^{m+1} \|K\| (1 + \varepsilon\|K\|\,\|Q\| + \cdots) \|f\| \\ &\quad = |\varepsilon|^{m+1} \frac{(\|K\|\,\|Q\|)^{m+1}}{1 - \varepsilon\|K\|\,\|Q\|} \|K\|\,\|f\|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

よって (2.7) を $\varepsilon^m$ の項までとれば誤差は一様に $\varepsilon^{m+1}$ の程度である.

3)　**一般化**　上の方法の説明はすでにかなり抽象的であったから, その応用が特殊な方程式 (2.1) にかぎられるものでないことは明らかであろう. 一般に線型の境界値問題は, 適当な線型演算子 $H$ を用いて

$$Hu = f \tag{2.14}$$

の形に書かれる．境界条件は $H$ の定義の中に含めてしまう．すなわち $H$ は与えられた境界条件を満足する函数 $u$ に対してだけ作用できるものとする．特に $H$ が小さいパラメタ $\varepsilon$ を含んで $H = H_0 + \varepsilon V$ の形をもっていれば

$$(H_0 + \varepsilon V)u = f \tag{2.15}$$

となり，非摂動方程式は

$$H_0 u = f \tag{2.16}$$

となる．われわれはこの方程式が，与えられた特別な $f$ に対して解をもつばかりでなく，考えている函数空間 $\mathfrak{F}$ の勝手な $f$ に対して解をもつことを仮定する．これは $H_0$ が逆 $H_0^{-1} = K$ をもち，(2.16) の解が

$$u = H_0^{-1} f = Kf \tag{2.17}$$

で与えられることにほかならない．前の例では $K$ が Green の函数で表わされた積分演算子であった．一般に $H_0$ が微分演算子で，境界条件が適切に与えられていると，$H_0$ 自身は $\mathfrak{F}$ の勝手な函数には作用できないが（微分不可能な函数!）$K = H_0^{-1}$ は $\mathfrak{F}$ のすべての函数に作用できることが多い．

さて (2.15) を解くのに左から $K$ を乗ずると $KH_0 = 1$（恒等演算子）であるから

$$(1 + \varepsilon KV)u = Kf$$

となり，その解は形式的に

$$\begin{aligned} u &= (1+\varepsilon KV)^{-1} Kf = [1 - \varepsilon KV + \varepsilon^2 (KV)^2 - \cdots] Kf \\ &= Kf - \varepsilon KV\,Kf + \varepsilon^2 KV\,KV\,Kf - \cdots \end{aligned} \tag{2.18}$$

で与えられる (Neumann 級数)．前の例の解 (2.7) はこの特別の場合にほかならない．前と同様に $K$ と $V$ とが有界であって $|\varepsilon| < 1/\|K\|\,\|V\|$ であればこの級数は収束する．もっと一般に $V$ は有界でなくても $VK$ が有界で

$$|\varepsilon| < \|VK\|^{-1} \tag{2.19}$$

ならば十分である．

## §3 固有値問題

**1) 摂動法の問題**　前節で考えた境界値問題よりやや複雑な問題に，固有値問題への摂動法の応用がある．われわれは主に微分方程式への応用を考えているが，固有値問題は線型演算子の問題として考えるのが最も便利であるから，

はじめから抽象的に取り扱うことにする．固有値問題については A §2.2 以下，C §1.5 以下および C §3.2 以下を参照されたい．

このような演算子 $H$ に関する固有値問題は $Hu=\lambda u$ ($\lambda$ が固有値，$u$ が固有元) の形に書かれる．$H$ が小さいパラメタ $\varepsilon$ を含んで $H=H_0+\varepsilon V$ の形をもてば

$$(H_0+\varepsilon V)u=\lambda u \tag{3.1}$$

となる．非摂動演算子 $H_0$ に対する固有値問題の解の一組

$$H_0u_0=\lambda_0u_0 \tag{3.2}$$

がわかっているとすれば，(3.1) の解で

$$\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda^{(1)}+\varepsilon^2\lambda^{(2)}+\cdots, \tag{3.3}$$

$$u=u_0+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\cdots \tag{3.4}$$

のように $\varepsilon$ のベキ級数の形に表わされるものがあると期待される．

ここで注意すべきことは，固有元 $u_0$ や $u$ には定数因子をかけても差支えないから，それらは一義的にはきまらないということである．このように不定なものについて (3.4) のような形をきめることはむずかしい．そこでいま簡単のため $H_0$ の固有値 $\lambda_0$ は縮重していない，すなわち一次独立な固有元 $u_0$ は一つしかないとし，$\|u_0\|=1$ によってこれを正規化する．ここで用いるノルム $\|u\|$ は前節の (2.8) と異なり，**内積**を用いて

$$\|u\|=(u,u)^{1/2}$$

で定義されたものである．これでも $u_0$ は符号だけ不定であるが，これは適当に定めたとする．$u$ の方も $\|u\|=1$ で正規化したいところであるが，それよりも線型の条件

$$(u,u_0)=1 \tag{3.5}$$

によって正規化するのが適当である．この条件によって，$\lambda$ が縮重していないならば (それは当然予想されるが)，$u$ は一義的に定まる．

2) **基本方程式の導出** 例によって (3.3), (3.4) を (3.1) に代入すると $\lambda^{(m)}$, $u^{(m)}$ を決定する方程式がえられるはずであるが，この方法は常套的ではあるが見通しが悪いので，ここでは少し違った方法をとる．

$$u-u_0=\varepsilon v,\quad v=u^{(1)}+\varepsilon u^{(2)}+\cdots \tag{3.6}$$

とおくと，(3.5) と $(u_0,u_0)=\|u_0\|^2=1$ によって

$$(v, u_0) = 0 \tag{3.7}$$

を得る．(*3.6*) を (*3.1*) に代入すると (*3.2*) に注意して

$$\lambda_0 u_0 + \varepsilon V u_0 + \varepsilon H_0 v + \varepsilon^2 V v = \lambda u_0 + \varepsilon\lambda v. \tag{3.8}$$

右から $u_0$ を乗じて内積を作り，$H_0$ が自己随伴であると仮定すると，$(H_0 v, u_0) = (v, H_0 u_0) = \lambda_0 (v, u_0) = 0$ であるから

$$\lambda_0 + \varepsilon(V u_0, u_0) + \varepsilon^2 (V v, u_0) = \lambda. \tag{3.9}$$

他方 (*3.8*) をかきかえて

$$\varepsilon(H_0 - \lambda_0) v + \varepsilon V u_0 - (\lambda - \lambda_0)(u_0 + \varepsilon v) + \varepsilon^2 V v = 0. \tag{3.10}$$

ここで $H_0 - \lambda_0$ の一種の逆を導入する．$H_0 - \lambda_0$ は固有値 0 をもっているから逆は存在しないが，固有元 $u_0$ に直交する元から成る部分空間 $\mathfrak{M}$ においては逆をもっている．これをかき表わすために，$H_0$ の固有元から成る完備な正規直交系があるとして，これを $u_0, u_1, u_2, \cdots$ とする．すなわち

$$(u_m, u_n) = \delta_{mn}, \qquad m, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

相当する固有値を $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ としよう．勝手な元 $w$ を

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m, \quad c_m = (w, u_m)$$

のように展開しておいて

$$S w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\lambda_m - \lambda_0} u_m \tag{3.11}$$

によって演算子 $S$ を定義すると，これが求める“逆”である．何故ならば

$$((H_0 - \lambda_0) S w, u_m) = (S w, (H_0 - \lambda_0) u_m)$$
$$= (S w, (\lambda_m - \lambda_0) u_m) = \begin{cases} c_m & (m \geqq 1), \\ 0 & (m = 0) \end{cases}$$

であるから

$$(H_0 - \lambda_0) S w = w - c_0 u_0 = w - (w, u_0) u_0. \tag{3.12}$$

同様に

$$S(H_0 - \lambda_0) w = w - c_0 u_0 = w - (w, u_0) u_0. \tag{3.13}$$

となり，$w$ が $u_0$ に直交すれば (すなわち $c_0 = 0$ なら)，$(H_0 - \lambda_0) S w = S(H_0 - \lambda_0) w = w$ となるから，このような $w$ に作用させれば $S$ は $H_0 - \lambda_0$ の逆となるのである．なお

$$S u_0 = 0 \tag{3.14}$$

を注意しておく．また $Sw$ の形の元は $u_0$ に直交する．何故なら (3.11) の右辺は $u_0$ を含まないからである．

さて (3.7) によれば $v$ は $u_0$ に直交するから，(3.10) の左から $S$ を乗ずると，(3.14) に注意して

$$\varepsilon v+\varepsilon SVu_0-\varepsilon(\lambda-\lambda_0)Sv+\varepsilon^2SVv=0.$$

(3.9) を用いて $\lambda$ を消去し，$\varepsilon$ で割れば

$$v=-SVu_0-\varepsilon S(V-\alpha)v+\varepsilon^2(Vv,u_0)Sv. \tag{3.15}$$

ただし

$$\alpha=(Vu_0,u_0) \tag{3.16}$$

とおいた．なお $V$ は自己随伴でなくてもよい．

3)　**基本方程式の必要十分性**　(3.15) はわれわれの基本方程式である．これは $v$ の満足すべき必要条件であるが，逆にこれを満足する $v$ がはたして解を与えるかどうかを調べる必要がある．(3.15) の右辺の各項は一番左に因子 $S$ をもっている (数係数は別) から，(3.15) の解は自動的に条件 (3.7) を満たしている．これに注意して (3.15) の左から $H_0-\lambda_0$ をかけると，(3.12)，(3.16) によって

$$(H_0-\lambda_0)v=-Vu_0+\alpha u_0-\varepsilon(V-\alpha)v+\varepsilon(Vv,u_0)u_0+\varepsilon^2(Vv,u_0)v.$$

ゆえに (3.9) で $\lambda$ を定義すれば，簡単な計算によって (3.10) も満足されていることがわかり，$\lambda$ と $u=u_0+\varepsilon v$ が固有値問題の解になることが証明される．

4)　**摂動級数の計算**　$v$ の級数展開 (3.6) を (3.15) に代入すれば，係数 $u^{(m)}$ を決定する漸化式がえられる．すなわち

$$\left.\begin{aligned}&u^{(1)}=-SVu_0,\\&u^{(m+1)}=-S(V-\alpha)u^{(m)}+\sum_{i=1}^{m-1}(Vu^{(i)},u_0)Su^{(m-i)}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad(m=1,2,3,\cdots).\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

これより

$$\left.\begin{aligned}&u^{(1)}=-SVu_0,\\&u^{(2)}=S(V-\alpha)SVu_0,\\&u^{(3)}=-S(V-\alpha)S(V-\alpha)SVu_0+(VSVu_0,u_0)S^2Vu_0.\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

$\lambda$ は (3.9) に $v$ を代入すれば計算できる．したがって

$$\left.\begin{aligned}\lambda^{(1)}&=(Vu_0,u_0)=\alpha,\\ \lambda^{(m)}&=(Vu^{(m-1)},u_0),\qquad m=2,3,\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{3.19}$$

(3.18) を代入すれば

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^{(1)}=\alpha,\qquad \lambda^{(2)}=-(VSVu_0,u_0),\\ &\lambda^{(3)}=(VS(V-\alpha)SVu_0,u_0),\\ &\lambda^{(4)}=-(VS(V-\alpha)S(V-\alpha)SVu_0,u_0)\\ &\qquad\qquad+(VSVu_0,u_0)(VS^2Vu_0,u_0).\end{aligned}\right\}\tag{3.20}$$

なおわれわれの $u$ は (3.5) によって正規化されていたが，ふつうのように $(u,u)=1$ のように正規化するためには，$u$ を $\|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}}$ で割っておけばよい．

$$\begin{aligned}(u,u)&=(u_0+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\cdots,u_0+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\cdots)\\ &=1+\varepsilon^2\|u^{(1)}\|^2+\varepsilon^3[(u^{(1)},u^{(2)})+(u^{(2)},u^{(1)})]+\cdots\end{aligned}$$

であるから

$$\bar{u}=\|u\|^{-1}u=u_0+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2\left[u^{(2)}-\frac{1}{2}\|u^{(1)}\|^2u^{(0)}\right]+\cdots\tag{3.21}$$

が求めるものである．

## §4 固有値問題．つづき

**1) 収束半径，誤差** 前節で求めた $u,\lambda$ のベキ級数が収束することを示すには，優級数の方法を用いるのが便利である．ベクトル $v$ に関する方程式 (3.15) と並行して，数 $\omega$ に関する次の方程式を考える．$\|S\|$ などは演算子 $S$ のノルムで，この節のノルム $\|u\|$ に関して §2 と同じ方法で定義される．

$$\omega=\|SV\|+\varepsilon\|S(V-\alpha)\|\omega+\varepsilon^2\|V^*u_0\|\|S\|\omega^2.\tag{4.1}$$

$V^*$ は $V$ の随伴演算子であって

$$(Vf,g)=(f,V^*g)$$

で定義される．(4.1) の解を

$$\omega=\omega^{(1)}+\varepsilon\omega^{(2)}+\varepsilon^2\omega^{(3)}+\cdots\tag{4.2}$$

と展開したとすれば，$\omega^{(m)}$ を決定すべき式は (3.17) と同様な形

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{(1)}=\|SV\|,\\ &\omega^{(m+1)}=\|S(V-\alpha)\|\omega^{(m)}+\sum_{i=1}^{m-1}\|V^*u_0\|\|S\|\omega^{(i)}\omega^{(m-i)}\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

をとる．ところが (3.17) と (4.3) とをくらべると，

$$\|SVu_0\| \leqq \|SV\|\|u_0\| = \|SV\|,$$

$$\|(Vu^{(i)}, u_0)Su^{(m-i)}\| = |(u^{(i)}, V^*u_0)|\|Su^{(m-i)}\|$$
$$\leqq \|V^*u_0\|\|S\|\|u^{(i)}\|\|u^{(m-i)}\|$$

であるから（ここで Schwarz の不等式 $|(f,g)| \leqq \|f\|\|g\|$ を用いた），まず $\|u^{(1)}\| \leqq \omega^{(1)}$ となり，以下帰納的に

$$\|u^{(m)}\| \leqq \omega^{(m)} \qquad (m=1,2,\cdots) \tag{4.4}$$

が証明される．よって (4.2) が収束する $\varepsilon$ の値に対しては (3.6)，したがって (3.4) も“絶対収束”であることがわかるのである．

ところで (4.1) は実は $\omega$ について二次方程式であるから，その解はすぐに求められる．二つの解のうちの一つ

$$\omega = \frac{2\|SV\|}{1-\varepsilon\|S(V-\alpha)\|+[(1-\varepsilon\|S(V-\alpha)\|)^2-4\|V^*u_0\|\|S\|\|SV\|\varepsilon^2]^{1/2}} \tag{4.5}$$

はたしかに (4.2) の形をもつから，(4.2) 自身にほかならない．この函数の Taylor 級数の収束半径は［　］内が 0 になる $\varepsilon$ の値で与えられる．したがって (3.4) の収束半径を $r$ とすれば

$$r \geqq \frac{1}{\|S(V-\alpha)\|+2(\|V^*u_0\|\|S\|\|SV\|)^{1/2}} \tag{4.6}$$

である．

収束半径ばかりでなく，級数 (3.3), (3.4) を有限項でとめたときの誤差（剰余）も評価することができる．$\|u^{(m)}\| \leqq \omega^{(m)}$ であるから，$v$ に対する剰余は相当する $\omega$ の剰余よりも大きくないからである．こうして $u$ の剰余に対して

$$\|u-(u_0+\varepsilon u^{(1)}+\cdots+\varepsilon^m u^{(m)})\| = |\varepsilon|\|v-(u^{(1)}+\varepsilon u^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{m-1}u^{(m)})\|$$
$$\leqq |\varepsilon|[\omega-(\omega^{(1)}+\varepsilon\omega^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{m-1}\omega^{(m)})] \tag{4.7}$$

がえられる．(3.19) によれば $\lambda$ の剰余として ($m \geqq 1$)

$$|\lambda-(\lambda_0+\varepsilon\lambda^{(1)}+\cdots+\varepsilon^m\lambda^{(m)})| = |\varepsilon|^2|(v-(u^{(1)}+\varepsilon u^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{m-2}u^{(m-1)}), V^*u_0)|$$
$$\leqq |\varepsilon|^2\|V^*u_0\|[\omega-(\omega^{(1)}+\varepsilon\omega^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{m-2}\omega^{(m-1)})] \tag{4.8}$$

を得る．これらの式で $\omega$ としては (4.5) をとる．

2) **諸注意** 以上の結果が正しいためには $S, SV$ が有界な演算子でなければならない．$H_0$ の固有値 $\lambda_0$ が孤立しているならば $S$ はたしかに有界で

$$\|S\| \leqq 1/d \tag{4.9}$$

である．$d$ はほかの $H_0$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ のうちで $\lambda_0$ に最も近いものと $\lambda_0$ との距離を表わす．これは (*3.11*) によって

$$\|Sw\|^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_m|^2}{|\lambda_m-\lambda_0|^2} \leqq \frac{1}{d^2}\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|^2 \leqq \frac{\|w\|^2}{d^2}$$

であることからわかる．

もし $V$ が有界ならばむろん $SV$ は有界であるが，$V$ が有界でなくても $SV$ が有界になることがある．それには $V^*$ が "$H_0$ にくらべて有界" であればよい．正確には

$$\|V^*w\| \leqq M\|w\|+N\|H_0w\| \tag{4.10}$$

のような定数 $M, N$ があればよいのである．なお上の理論を少しかえて，$SV$ のかわりに $VS$ が有界ならばやはり結果が正しいことを示すことができる．このためには (*4.10*) で $V^*$ のかわりに $V$ とした不等式が成り立てばよい．

このような条件が満足されず，$SV$ も $VS$ も有界でなくなると，級数 (*3.3*)，(*3.4*) などは収束するかどうかわからない．実際にどんな小さい $\varepsilon \neq 0$ に対しても発散することがある．そればかりでなく，ある $m$ から先の $\lambda^{(m)}$ や $u^{(m)}$ が求められないこともある．しかしこのような場合には摂動法が無効であるというのではない．ベキ級数としては収束しなかったり，あるいは有限個の項しか存在しないような $\varepsilon$ の級数でも，$\varepsilon \to 0$ のときの**漸近級数**（I §4.17）と解釈すれば役に立つことが多いのである．これは**特異摂動論**に属するが，本書ではそこまで立ち入る余裕がない．

非摂動固有値 $\lambda_0$ が縮重しているときには上の議論はそのままでは成り立たず，適当な修正が必要である．その修正はむしろ形式的な部分にあるが，紙数の都合でこれを省略する．

例題1
$$-\frac{d^2u}{dx^2}+\varepsilon(2x-1)u=\lambda u, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

境界条件

$$u(0)=u(1)=0.$$

$\varepsilon=0$ とおいた非摂動固有値問題の解として

$$\lambda_0=\pi^2=9.86960, \qquad u_0(x)=\sqrt{2}\sin \pi x$$

を採用する．$\lambda_0$ は最小の固有値で，その上の固有値は $\lambda_1=4\pi^2$ であるから $d=3\pi^2$ となる．したがって $\|S\|=1/d=1/3\pi^2$ である．また $V$ は $2x-1$ を乗ずる演算子である

が，$|2x-1|\leqq 1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ であるから $\|V\|=1$ である．よって

$$\|SV\|\leqq\|S\|\,\|V\|\leqq 1/3\pi^2.$$

また $V$ も自己随伴 $(V^*=V)$ であって，

$$\|Vu_0\|^2=2\int_0^1(2x-1)^2\sin^2\pi x\,dx=0.1307,$$

$$\|Vu_0\|=0.3615,\qquad \alpha=0.$$

これより (*4.6*) によって $\lambda$ や $u$ の展開式の収束半径は

$$r\geqq\left(\frac{1}{3\pi^2}+\frac{2\sqrt{0.3615}}{3\pi^2}\right)^{-1}=13.44.$$

$\varepsilon=1$ のとき $\lambda$ の級数をはじめの数項でとめたときの誤差を求めてみよう．(*4.8*) において $m=1$ とすれば $\lambda^{(1)}=\alpha=0$ に注意して

$$|\lambda-\lambda_0|\leqq\|Vu_0\|\,\omega\leqq 0.0126,\qquad \lambda=9.8696\pm 0.0126$$

を得る．もし $\varepsilon^2$ の項まで計算すれば

$$|\lambda-\lambda_0-\lambda^{(2)}|\leqq\|Vu_0\|\,(\omega-\omega^{(1)})\leqq 0.00043.$$

$\lambda^{(2)}$ の値は (*3.20*) により

$$\lambda^{(2)}=-(SVu_0,\,Vu_0),$$

$S$ の式 (*3.11*) を用いるとこれは

$$\begin{aligned}\lambda^{(2)}&=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|(Vu_0,u_m)|^2}{\lambda_m-\lambda_0}\\&=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+2)}\left(\int_0^1(2x-1)\sin(m+1)\pi x\sin\pi x\,dx\right)^2\\&=-\frac{256}{\pi^6}\sum_{m\,\text{偶}}\frac{m^2}{(m^2-1)^5}=-0.00438.\end{aligned}$$

よって

$$\lambda=9.86522\pm 0.00043.$$

さらに

$$|\lambda-\lambda_0-\lambda^{(2)}-\lambda^{(3)}|\leqq 0.000018$$

であることは簡単に知れるが，$\lambda^{(3)}$ を計算するのはかなり手数を要するであろう．

# 第2章　WKB法

## §1　いとぐち

微分方程式が小さいパラメタ $\varepsilon$ (あるいは大きいパラメタ $k$) を含み，それを0(あるいは無限大)とおいた方程式の解が容易に求まるときは，これを第零近似として逐次近似を高めていく摂動法が常用の手段として用いられてきた(第1章)．ところが方程式の最高階の項の係数が極限において非常に小さくなるときは特異的なばあいであって，この方法が失敗することが多い．

これに対処するには場合に応じて独得の手段が必要となる．またこれらの方法によって得られる解は一般に漸近解と呼ばれるもので，逐次近似を究極までおし進めたとしても必ずしも収束する結果を与えるものではないが，パラメタの値しだいでは，最初の近似だけで真実の値に十分近い値を与える有力な方法となることが多い．

中でも主として二階の線型常微分方程式について発展させられたWKB法が著名である．この章では主にこれについて述べ，さらにこの考えの偏微分方程式に対する直接の応用にも言及する．

$z$ の函数 $\Phi(z)$ に対する二階の線型常微分方程式[1]

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+k^2P(z)\Phi=0 \tag{1.1}$$

の $k\to\infty$ における漸近解を求める方法は最初古典的な波動の問題を解くために Jeffreys によって組織的に論じられた(1924)．一方 Wentzel, Kramers, Brillouin ら(1926)は，Schrödinger の方程式にあらわれる Planck の定数 $h$ を0に近づけたときの(古典力学への極限)性質，粒子のポテンシアル壁通過の問題などをしらべるためにそれぞれ独立な研究を行なった．

これらの事情から，今日では Jeffreys の方法，WKB法または WKBJ 法などと呼ばれている．

さて $(1.1)$ でいきなり $k\to\infty$ とし，$d^2\Phi/dz^2$ を無視したのでは微分方程式で

(1)　もっと一般的な形の方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}+2a(z)\frac{dw}{dz}+b(z)w=0 \tag{1.1'}$$

も従属変数に対する

$$w(z)=\Phi(z)\exp\left[-\int^z a(z)dz\right],\qquad b-a'-a^2=k^2P(z)$$

の置きかえ，あるいは独立変数の変換

$$\zeta=\int e^{-2\int a(z)dz}dz$$

によって標準形 $(1.1)$ に変換できるので，$(1.1)$ について議論しておけば十分であろう；

はなくなってしまう．実際 (*1.1*) を $k^2$ で割り $z$ のかわりに $\zeta = kz$ を独立変数にとれば $k$ は表面上消えてしまって，第一項を無視することが必ずしも見かけ通りには許されないことがわかる．特に $P$ が定数のときの解

$$\Phi = Ae^{ik\sqrt{P}z} + Be^{-ik\sqrt{P}z} \tag{1.2}$$

を見れば一目瞭然であろう．上記の人々のとった方法は $k$ に比べて $P(z)$ の変動が小さくてほぼ一定であるとし (*1.2*) の形に似た

$$\Phi = \exp[ik\varphi(z)] \tag{1.3}$$

の形の近似解を仮定することであった．(*1.3*) を (*1.1*) に代入すれば

$$-k^2\varphi'^2 + ik\varphi'' + k^2P = 0 \tag{1.4}$$

が得られる．第二項は残りの項に比較して小さく，これを無視すれば第零近似として

$$\varphi_0' = \pm P^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

すなわち

$$\varphi_0 = \pm\int P^{\frac{1}{2}} dz \tag{1.6}$$

が得られる．これは $P$ が一定のときは (*1.2*) を与える．(*1.4*) で行なった省略

$$\left|\frac{ik\varphi''}{k^2P}\right| = \left|\frac{\varphi''}{kP}\right| \ll 1 \tag{1.7}$$

の意味を知るためにこれに (*1.6*) を代入すれば

$$|k| \gg \left|\frac{\varphi_0''}{P}\right| = \left|\frac{P'}{2P^{\frac{3}{2}}}\right| \tag{1.8}$$

となる．近似の成立に必要な条件はこれから明らかであろう．特に注意すべき点としては

(i) $P$ の変化のはげしい ($P'$ が大きい) 所では $k$ がそれに応じて大きくなっていなくてはならない．また逆に $P$ の変化が小さければ $k$ はかなり小さくても構わない．

(ii) $P=0$ の点では $k$ をどれだけ大きくしても上の近似は無意味である．一般に $P(z)$ の零点 $z_0(P(z_0)=0)$ を転移点 (turning point) と名づける．これが問題の領域に現われるときは，さらに特別な工夫が必要となる．

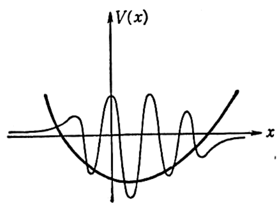
特に実函数のばあいに話を限り，$z=x=$ 実数，$k, P$ が実数のときを考えれ

ば $P(x)>0$ の領域では (*1.3*), (*1.6*) により，近似解の指数の肩は純虚数で近似解は三角函数（振動型）であらわされ，$P(x)<0$ の領域では指数の肩が実数で，単調な指数函数型の解があらわれる．(*1.2*) はその典型的な場合である．

例題〕 一次元のポテンシアル場 $V(x)$ における，質量 $M$ の粒子の運動に対する Schrödinger の方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi+\frac{2M}{\hbar^2}[E-V(x)]\Psi=0 \tag{1.9}$$

であらわされる．$E$ は全エネルギー．$2M/\hbar^2$ が $k^2$ に，運動エネルギー $E-V(x)$ が $P(x)$ に相当する．$P<0$ は古典的には粒子が入れない領域で（運動エネルギーが負），粒子は転移点 $x_0$ のところで引きかえし，その運動領域は $P(x)=E-V>0$ に限られていた．量子力学的には，確率振幅 $\Psi$ の絶対値は $P>0$ では振動型だが $P<0$ では $x_0$ を少し離れると指数的に減小してしまう．



第 1.1 図

屈折率が場所によって変化する媒質中の波の伝播も同じ形の方程式によって支配される．

実際問題ではもっと階数の高い方程式（たとえば粘性流体における層流の安定性理論や，弾性論において，荷重とひっぱりを受けた薄板の問題に対する四階以上の方程式）もあらわれるが，取扱いの基本方針は同一である．

偏微分方程式の問題も，変数分離が可能のときは，(*1.1*) に帰着する．一般にこの場合の解は特殊函数を用いて無限級数や無限積分の形に，形式的には書き下せるが，実際の数値計算は，(*1.1*) で $k\to\infty$ としたときの漸近展開の助けを借りなければ，とうてい不可能なことが多い．既知の特殊函数に帰着しないような場合の役割はもちろんいうまでもない．

変数分離が不可能な偏微分方程式に対しても，方法の拡張によって直接その漸近解（もちろん境界条件や初期条件を満足する）を求めようとする試みが最近では行なわれ始めている．

## §2　転移点のない場合

転移点から離れた場所では (*1.6*) の近似を高めることは容易である．すなわち

$$\varphi=\varphi_0+\frac{1}{k}\varphi_1+\frac{1}{k^2}\varphi_2+\cdots \tag{2.1}$$

とおいて (*1.4*) に代入し $k^2, k^1, k^0, \cdots$ の各項を比較すれば

$$\varphi_0'^2 = P, \tag{2.2}$$

$$2\varphi_0'\varphi_1' = i\varphi_0'', \tag{2.3}$$

$$2\varphi_0'\varphi_2' = i\varphi_1'' - \varphi_1'^2, \tag{2.4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が得られ，これを上から順に解けば

$$\varphi_0' = \pm P^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_1' = \frac{i}{2}\frac{\varphi_0''}{\varphi_0'} = \frac{i}{4}\frac{P'}{P} = \frac{i}{4}(\log P)', \tag{2.5}$$

$$\varphi_2' = \frac{i\varphi_1'' - \varphi_1'^2}{2\varphi_0'} = \pm\frac{5P'^2 - 4PP''}{32P^{\frac{5}{2}}}. \tag{2.6}$$

$z$ について積分し (2.1), (1.3) に代入すれば

$$\Phi \sim \exp\left[\pm ik\int P^{\frac{1}{2}}dz - \frac{1}{4}\log P + \cdots\right] = P^{-\frac{1}{4}}\exp(\pm ik\tau) + O\left(\frac{1}{k}\right), \tag{2.7}$$

$$\tau = \int^z P^{\frac{1}{2}}dz \tag{2.8}$$

が得られる．実函数に問題を限るときは $P>0$, $P<0$ の場合を区別し $P>0$ に対しては波動型，

$$\Phi = P^{-\frac{1}{4}}[Ae^{ik\tau} + Be^{-ik\tau}], \tag{2.9}$$

$P<0$ に対しては指数型 ($\tau = \pm i|\tau|$ に注意)，

$$\Phi = |P|^{-\frac{1}{4}}[A'e^{k|\tau|} + B'e^{-k|\tau|}] \tag{2.9'}$$

の形をとると便利である．通常の WKB 法の応用ではこの程度の近似で満足することが多い．

例題〕 Bessel 函数の漸近展開 (1) Bessel 函数 $Z_\nu(kz)$ は次の微分方程式の解として定義される．

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0. \tag{2.10}$$

変数 $kz$ が次数 $\nu$ に比べて非常に大きくなるときの漸近展開は容易に求まる (I §11.15) が，$\nu$ と $kz$ とが同時に大きくなるときの漸近展開はかなりやっかいで，たとえば鞍点法などによって見出だされるのが普通である．ここではその一つの場合として，$z$ が有限で 1 にあまり近くなく $\nu = k$ が非常に大きくなったときの $Z_k(kz)$ の漸近展開 (Debye の漸近展開) を求めてみよう．(1.1) の脚注に述べた従属変数の変換を行なえば $2a(z) = 1/z$ を考慮し

$$\Phi(z) = Z_\nu(kz)\exp\int\frac{dz}{2z} = \sqrt{z}\,Z_\nu(kz), \tag{2.11}$$

$$k^2P(z) = k^2 - \frac{\nu^2}{z^2} + \frac{1}{4z^2} \tag{2.12}$$

を得る．$\nu = k$ とおき $k \to \infty$ とすれば，(2.7) の精度では $P(z)$ の最後の項は無視できる．転移点の位置は $z=1$ に非常に近い．(2.8) の積分が簡単となるように $z = \sec\theta$ とおけば，$dz = \sec^2\theta \sin\theta\, d\theta$ であって $O(1/k^2)$ の項を無視すれば

$$P \doteqdot \sin^2\theta, \tag{2.13}$$

$$\tau \doteqdot \int^z \sqrt{1-\frac{1}{z^2}}\,dz = \int^\theta \tan^2\theta\, d\theta = \tan\theta - \theta. \tag{2.14}$$

これを (2.9) に代入して

$$Z_k^{\pm}(k\sec\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sec\theta}}\Phi^{\pm} \sim \frac{1}{\sqrt{\tan\theta}}\exp\left[\pm ik(\tan\theta-\theta)\right] \tag{2.15}$$

が得られる．(2.9) と同様に $z$ が 1 より小さい実数のときは $\theta$ が実数となるように $z = \operatorname{sech}\theta$ とおく方が便利である．このとき

$$P \doteqdot -\sinh^2\theta, \qquad \tau = i(\tanh\theta - \theta), \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} Z_k^{\pm}(k\operatorname{sech}\theta) &\propto \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sech}\theta\cdot\sinh\theta}}e^{\pm k|\tau|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tanh\theta}}\exp\left[\pm k(\tanh\theta-\theta)\right]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

これは定数因数を除けば (2.15) で $\theta$ のかわりに形式的に $i\theta$ と置いたものに等しいが，$\theta = 0$ が転移点であるのでお互に直接，解析接続の関係にはないことには特に注意する必要がある．

Bessel 函数の標準形 (第一種の Bessel 函数) $J_k(kx)$, Hankel の函数 $H_k^{(1)}(kx)$, $H_k^{(2)}(kx)$ などとの関係をつけてみよう．(2.15) で $k$ を固定し $\theta \to \frac{\pi}{2}$，したがって $\sec\theta \to \infty$ とすれば $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} \sim \sec\theta$ を考慮し (簡単のために $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする)，

$$Z_k^{\pm}(k\sec\theta) \sim \frac{1}{\sqrt{\sec\theta}}\exp\left[\pm ik\left(\sec\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{2.18}$$

を得る．これを Hankel 函数 $H_\nu^{(1,2)}(kz)$ の $|kz| \to \infty$ での漸近展開 ($\nu$ を固定, I, 490 頁)

$$H_\nu^{(1,2)}(kz) \sim \left(\frac{2}{\pi kz}\right)^{1/2}\exp\left[\pm i\left(kz - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad |kz| \to \infty,\ |\arg kz| < \pi \tag{2.19}$$

と比較すれば

$$Z_k^{\pm}(kz) = \left(\frac{\pi k}{2}\right)^{1/2} e^{\pm\frac{\pi}{4}i} H_k^{(1,2)}(kz), \tag{2.20}$$

あるいは

$$H_k^{(1,2)}(k\sec\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k\tan\theta}}\exp\left[\pm ik(\tan\theta-\theta) \mp \frac{\pi}{4}i\right], \tag{2.21}$$

$$|\arg k| < \pi, \qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

が得られる．

一方 (2.17) で $k$ を固定し $\theta \to \infty$ とすれば $x = \operatorname{sech}\theta \to 0$ で ($0<\theta<\infty$ とする)

$$\tanh\theta \sim 1 - O(x^2), \qquad \theta \sim -\log\frac{x}{2} \tag{2.22}$$

となるので

$$\tilde{Z}_k{}^{\pm}(kx) \sim \exp\left[\pm k\left(1+\log\frac{x}{2}\right)\right] = \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm k} e^{\pm k}. \tag{2.23}$$

これを，第一種の Bessel 函数 $J_{\pm k}(kx)$ において $k$ を固定し，$x\to 0$ としたときの展開式〔(I *11.9*)〕

$$J_{\pm k}(kx) \sim \frac{(kx/2)^{\pm k}}{\Gamma(1\pm k)} \qquad (1\pm k \neq \text{負整数}) \tag{2.24}$$

と比較すれば

$$\tilde{Z}_k{}^{\pm}(kx) = \Gamma(1\pm k)\left(\frac{e}{k}\right)^{\pm k} J_{\pm k}(kx), \qquad x>0, \tag{2.25}$$

あるいは

$$J_{\pm k}(k\,\mathrm{sech}\,\theta) \sim \frac{(k/e)^{\pm k}}{\Gamma(1\pm k)\sqrt{\tanh\theta}} \exp\left[\pm k(\tanh\theta-\theta)\right], \quad 0<\theta<\infty \tag{2.26}$$

を得る．$\Re k>0$ として Stirling の公式 $\Gamma(1+k)\sim\sqrt{2\pi k}(k/e)^k$，および公式 $\Gamma(k)\Gamma(1-k)=\pi/\sin(k\pi)$ を用いればさらに簡単に ($k$ が整数のとき，$J_{-k}=(-1)^k J_k$ に注意)

$$J_{\pm k}(k\,\mathrm{sech}\,\theta) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi k\tanh\theta}} \exp\left[k(\tanh\theta-\theta)\right], \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2}\sin k\pi}{\sqrt{k\pi}\tanh\theta} \exp\left[-k(\tanh\theta-\theta)\right], \end{cases} \tag{2.27}$$

$$0<\theta<\infty, \quad \Re k>0, \quad k\neq\text{整数}$$

とも書ける．$0<\theta<\infty$ ならば $\theta>\tanh\theta$ であるから，$\Re k>0$ のときは，$J_{-k}(kx)\gg J_k(kx)$ $(x>0)$ であり，$H_\nu^{(1,2)}(z)$ や Neumann の函数 $Y_\nu(z)$ に対する公式

$$\left.\begin{aligned} Y_\nu(z) &= \frac{1}{\sin\nu\pi}\left[\cos\nu\pi J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)\right], \\ H_\nu^{(1,2)}(z) &= J_\nu(z)\pm iY_\nu(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

を参照すれば，微小量 $J_k(kx)$ を無視して

$$\begin{aligned} H_k^{(1)}(kx) &\sim -H_k^{(1)}(kx) \sim iY_k(kx) \sim i\left(\frac{-1}{\sin k\pi}\right)J_{-k}(kx) \\ &\sim -i\sqrt{\frac{2}{k\pi\tanh\theta}} \exp\left[k(\theta-\tanh\theta)\right], \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\Re k>0, \quad x=\mathrm{sech}\,\theta, \quad 0<\theta<\infty$$

が成立する．(*2.21*) で形式的に $\theta\to i\theta$ としても必ずしも (*2.29*) を与えない．これが転位点 $x_0\sim 1$ の存在によるものであることはいうまでもない．

## §3 Liouville 変換

近似の性格や，誤差の見つもりなどを数学的に明らかにするには (*2.7*) によって示唆される変換

$$\Phi = P^{-\frac{1}{4}}\Psi, \tag{3.1}$$

$$\tau = \int^z P^{\frac{1}{2}}dz \tag{3.2}$$

を導入して従属変数を $\Phi$ から $\Psi$ に，独立変数を $z$ から $\tau$ に変えておくのが便利である．これはすでに Liouville が Sturm-Liouville の問題において導入した変換である．$z$ についての微分を $'$，$\tau$ についての微分を $\dot{}$ であらわし，$P^{\frac{1}{4}}=X$, $P^{-\frac{1}{4}}=Y$ とおけば

$$\frac{d}{dz}=\frac{d\tau}{dz}\cdot\frac{d}{d\tau}=X^2\frac{d}{d\tau},\quad \frac{d}{d\tau}=Y^2\frac{d}{dz}. \tag{3.3}$$

これから出る関係式

$$\Phi=\Psi/X,\quad \Phi'=X^2d(\Psi/X)/d\tau=X\dot{\Psi}-\dot{X}\Psi,$$

$$\Phi''=X^2d[X\dot{\Psi}-\dot{X}\Psi]/d\tau=X^2(X\ddot{\Psi}-\ddot{X}\Psi)=X^3(\ddot{\Psi}-Q\Psi),$$

$$Q=\frac{\ddot{X}}{X}=Y\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{1}{Y}\right)=Y\cdot Y^2\frac{d}{dz}\left(Y^2\frac{d}{dz}\frac{1}{Y}\right)=-Y^3Y'' \tag{3.4}$$

を (1.1) に代入すれば

$$\frac{d^2\Psi}{d\tau^2}+(k^2-Q)\Psi=0 \tag{3.5}$$

を得る．また $Q$ は

$$Q=P^{-\frac{1}{4}}\frac{d^2}{d\tau^2}(P^{\frac{1}{4}})=-P^{-\frac{3}{4}}\frac{d^2}{dz^2}(P^{-\frac{1}{4}})=\frac{4PP''-5P'^2}{16P^3}. \tag{3.6}$$

これから

(i) $Q=0$ すなわち $\Phi=P^{-\frac{1}{4}}e^{\pm ik\tau}$ が (1.1) の厳密解を与えるのは，(3.6) の右から二番目の式を 0 とおいて

$$P^{-\frac{1}{4}}=p_1z+q_1 \quad すなわち \quad P=\frac{q}{(z+p)^4} \tag{3.7}$$

の場合で，このとき $\tau$ は

$$\tau=\int^z\frac{\sqrt{q}}{(z+p)^2}dz=-\frac{\sqrt{q}}{z+p} \tag{3.8}$$

となる．$P$ が単調な函数で転移点がなければ問題となる点 $z$ の近傍で定数 $p, q$ を適当にえらんで $P$ を (3.7) の形で近似すれば（たとえば接線まで合わせる)，$k$ がかなり小さくともよい近似が得られるであろう．

(ii) (3.5) は一つの逐次近似法を示唆する．すなわち $k^2\gg|Q|$ であればまず $Q=0$ とおいて $Q$ の項を $k^2$ に対して無視することができる．その解はすでに見たように

$$\Psi_0(\tau)=Ae^{ik\tau}+Be^{-ik\tau} \tag{3.9}$$

である．さらに近似を進めるには(3.5)を

$$\frac{d^2\Psi}{d\tau^2}+k^2\Psi=Q\Psi \tag{3.10}$$

と書く．これは右辺が既知であるとすれば，左辺の $\Psi$ に対する非同次方程式であり，同次解(3.9)を参照して未定係数法により形式的に解を求めれば $\Psi$ に対する Volterra の第二種の積分方程式

$$\Psi(\tau)=Ae^{ik\tau}+Be^{-ik\tau}+\frac{1}{k}\int_{\tau_0}^{\tau}\sin k(\tau-t)Q(t)\Psi(t)dt \tag{3.11}$$

が得られる．

特に $k$ が実数 $>0$, $P$ が問題の区間 $\tau_0<\tau<\tau_1$ およびその近傍に転移点のない正の実函数で二階まで連続な微係数を持つとしよう．(3.6)から $Q$ は有界で連続な函数となる．さて積分方程式の理論 (I §13.2) によれば(3.9)を第零近似とし，これを右辺の積分の中の $\Psi$ の代りに代入して得られる函数 $\Psi_1, \cdots$ などを逐次に積分内の $\Psi$ に代入して導かれる級数

$$\Psi_N(\tau)=\sum_{n=0}^{N}\psi_n(\tau), \tag{3.12}$$

ただし

$$\psi_0=\Psi_0,\quad \psi_{n+1}=\frac{1}{k}\int_{\tau_0}^{\tau}\sin k(\tau-t)Q(t)\psi_n(t)dt \tag{3.13}$$

は $N\to\infty$ に対し区間 $\tau_0<\tau<\tau_1$ において一様に収束し，(3.11)したがって(3.10)の解を与える．また $|Q|$ の最大値を $Q_{\max}$ とすれば

$$|\psi_n(\tau)|\leqq\frac{|A|+|B|}{n!}\frac{Q_{\max}^n|\tau_1-\tau_0|^n}{k^n} \tag{3.14}$$

が成立することは数学的帰納法によって明らかである．したがって(3.12)を第 $N$ 近似で打ち切った誤差は

$$\begin{aligned}|\Psi-\Psi_N(\tau)|&<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|A|+|B|}{n!}\frac{Q_{\max}^n|\tau_1-\tau_0|^n}{k^n}\\&<\frac{|\tau_1-\tau_0|^{N+1}Q_{\max}^{N+1}}{(N+1)!\,k^{N+1}}\{|A|+|B|\}\exp\left[\frac{Q_{\max}|\tau_1-\tau_0|}{k}\right]\\&<C/k^{N+1}\end{aligned} \tag{3.15}$$

であり ($C$ は適当な定数)，特に $N=0$ とおけば(3.9)の誤差が $O(1/k)$ であることがわかる．

ただ(3.13)の積分を実行することは特別な場合を除けばあまり容易ではない. また $k\tau$ が複素数値をとるときは $|\sin k(\tau-t)|<1$ とすることができないため (3.15) の評価は許されず漸近評価 $|\Psi-\Psi_N(\tau)|/|\Psi_N(\tau)|<C|k|^{-(N+1)}$ でおきかえられることになる. したがって実際的には後で述べるように, 形式的に

$$\Psi_N\sim\exp\varphi(\tau)=\exp\left[ik\tau+\sum_{n=1}^{N}(ik)^{-n}\varphi_n(\tau)\right], \tag{3.16}$$

あるいは

$$\Psi_N\sim\sum_{n=0}^{N}k^{-n}\psi_n(\tau)e^{ik\tau} \tag{3.17}$$

の形を仮定し, (3.5) に代入して $k$ の各ベキを比較し, $\varphi_n$ あるいは $\psi_n$ を定める方が便利である. ただしその結果として得られる級数は一般に本当の意味の漸近級数で, $N\to\infty$ とすれば発散する結果を与える.

## §4 転移点のない場合の精密化

(3.16) を (3.5) に代入すれば, $\exp\varphi(\tau)$ の因数を除いて

$$\dot{\varphi}^2+\ddot{\varphi}+k^2-Q=0. \tag{4.1}$$

すなわち

$$2ik\sum_{n=1}^{N}(ik)^{-n}\dot{\varphi}_n+\sum_{n=1}^{N}(ik)^{-n}\ddot{\varphi}_n+\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}(ik)^{-(m+n)}\dot{\varphi}_m\dot{\varphi}_n-Q=0 \tag{4.2}$$

を得る. $(ik)^{-n}$ の項を等置すれば

$$(ik)^0:\qquad 2\dot{\varphi}_1=Q, \tag{4.3}$$

$$(ik)^{-1}:\qquad 2\dot{\varphi}_2+\ddot{\varphi}_1=0, \tag{4.4}$$

$$(ik)^{-2}:\qquad 2\dot{\varphi}_3+\ddot{\varphi}_2+\dot{\varphi}_1{}^2=0, \tag{4.5}$$

.........

$$(ik)^{-N+1}:\qquad 2\dot{\varphi}_N+\ddot{\varphi}_{N-1}+\sum_{m=1}^{N-2}\dot{\varphi}_m\dot{\varphi}_{N-m-1}=0. \tag{4.6}$$

これを (4.3) から順次に解けば, 積分定数を除いて

$$\begin{aligned}
\varphi_1&=\frac{1}{2}Q_1(\tau)=\frac{1}{2}\int Q(\tau)d\tau,\quad \varphi_2=-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_1=-\frac{1}{4}Q,\\
\varphi_3&=\frac{-1}{2}\left(\dot{\varphi}_2+\int\dot{\varphi}_1{}^2d\tau\right)=\frac{1}{8}\left(\dot{Q}-\int Q^2d\tau\right),\\
\varphi_4&=\frac{-1}{2}\left(\dot{\varphi}_3+2\int\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2d\tau\right)=-\frac{1}{16}\ddot{Q}+\frac{1}{8}Q^2=-\frac{1}{16}(\ddot{Q}-2Q^2),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

.........

が容易に決定される.

もう一つの独立な解に対しては上の式で $i\to -i$ の置きかえを行なえばよい.
以上をまとめると今井の公式 (1948) が得られる：

$$\Psi\sim\exp\left[\pm ik\tau\mp\frac{i}{2k}\int Qd\tau+\frac{1}{4k^2}Q\pm\frac{i}{8k^3}\left(\dot{Q}-\int Q^2d\tau\right)-\frac{1}{16k^4}(\ddot{Q}-2Q^2)\right]+O\left(\frac{1}{k^5}\right). \tag{4.8}$$

以上のようにして (4.3)〜(4.6) から決定される $\Psi_N$ が (3.10) の漸近解であることを簡略に示そう. もちろん転移点が $\tau$ の変域およびその近くになく $Q(\tau)$ は一価正則とする.

$$\Psi=\Psi_N(\tau)w(\tau) \tag{4.9}$$

とおいて (3.10) に代入し $w$ に対する方程式を立てれば

$$\Psi_N\ddot{w}+2\dot{\Psi}_N\dot{w}+G(\tau)\Psi_N w=0, \tag{4.10}$$

$$G(\tau)=k^2-Q+\frac{\ddot{\Psi}_N}{\Psi_N}. \tag{4.11}$$

ところで $G(\tau)$ は (4.3)〜(4.6) から

$$G(\tau)=k^2-Q+\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2=(ik)^{-N}\left[\ddot{\varphi}_N+\sum_{p=0}^{N}(ik)^{-p}\sum_{q=1}^{N+p-1}\dot{\varphi}_q\dot{\varphi}_{N+p-q}\right]=O(k^{-N}) \tag{4.12}$$

の程度の大きさの既知の有界連続函数である.

(4.10) に $\Psi_N$ を掛けて

$$\frac{d}{d\tau}[\Psi_N{}^2\dot{w}]+\Psi_N{}^2Gw=0 \tag{4.13}$$

と書き改め, 形式的に $s$ から $\tau_j$ まで積分して ($\dot{w}(\tau_j)=0$ としよう)

$$\Psi_N{}^2(s)\dot{w}(s)=\int_s^{\tau_j}\Psi_N{}^2(t)G(t)w(t)dt. \tag{4.14}$$

もう一度積分して $w(\tau_j)=1$ となるように積分定数をえらび, 積分順序の交換を行なえば

$$w(\tau)=1-\int_\tau^{\tau_j}[\Psi_N(s)]^{-2}ds\int_s^{\tau_j}\Psi_N{}^2(t)G(t)w(t)dt \tag{4.15}$$

$$=1-\int_\tau^{\tau_j}K(\tau,t)G(t)w(t)dt, \tag{4.16}$$

$$K(\tau,t)=\int_\tau^t\Psi_N{}^2(t)[\Psi_N(s)]^{-2}ds \tag{4.17}$$

が得られる．$|k|$ が十分大ならば $|\Psi_N(\tau)|$ は $|\tau|$ の単調函数であり，$\tau_j$ を $\tau_0$ か $\tau_1$ のいずれかにとれば $|\Psi_N{}^2(t)/\Psi_N{}^2(s)|\leqq 1$ とすることが可能で

$$K(\tau,t)|\leqq|\tau_0-\tau_1|$$

となる．さらに (*4.12*) を参照すれば前章におけると同様な議論によって $w(t)$ が Volterra の積分方程式の解として決定し，十分大きな $k$ に対し

$$w(\tau)=1+O(|k|^{-N}),$$

(*4.9*) から

$$\Psi=\Psi_N[1+O(|k|^{-N})] \tag{4.18}$$

が成立する．これは $\Psi_N$ が $\Psi$ の漸近展開でその相対誤差が $O(k^{-N})$ であることを示す．

例題〕 Bessel 函数の漸近展開 (2)　(*2.10*) において $x=e^{\xi}$ とおけば $w=Z_k(ke^{\xi})$ に対して

$$\frac{d^2}{d\xi^2}w+k^2(e^{2\xi}-1)w=0 \tag{4.19}$$

が得られる．精密な値を出すにはこの形の方が (*2.10*) より便利である．§2 での結果と比較するために

$$x=e^{\xi}=\sec\theta \tag{4.20}$$

とおけば

$$d\xi=-d\log\cos\theta=\tan\theta\,d\theta, \tag{4.21}$$

$$P=e^{2\xi}-1=\tan^2\theta,\qquad \tau=\int\tan\theta\,d\xi=\int\tan^2\theta\,d\theta=\tan\theta-\theta \tag{4.22}$$

となる．また (*3.6*) から

$$Q=-P^{-\frac{3}{4}}\frac{d^2}{d\xi^2}(P^{-\frac{1}{4}})=-\frac{1}{\sqrt{\tan^3\theta}}\frac{1}{\tan\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\tan\theta}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{\tan\theta}}\right]=-\frac{\cos^2\theta\left(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\right)}{\sin^6\theta},$$

$$Q_1=\int Q\,d\tau=\int Q\tan^2\theta\,d\theta=\frac{5}{12}\cot^3\theta+\frac{1}{4}\cot\theta \tag{4.23}$$

などが得られる．$Q, Q_1$ はいずれも $\theta\to\frac{\pi}{2}$ で 0 となる．(*4.8*) に代入し $\theta\to\frac{\pi}{2}$ とし，(*2.19*) と比較して定数因数を定めれば (*2.21*) の精密な形

$$H_k^{(1,2)}(k\sec\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi k\tan\theta}}\exp\left[\pm ik(\tan\theta-\theta)\mp\frac{\pi}{4}i\mp\frac{i}{2k}Q_1+\frac{1}{4k^2}Q+O(k^{-3})\right] \tag{4.24}$$

が得られる．

## §5　$P(z)=a(z-z_0)^n$ の場合

$P(z)$ の零点の近傍では前章の $Q, G$ ともに無限大となり，逐次近似が不可能である．また原方程式 (*1.1*) の解は $P(z)$ が整函数で無限遠点を除いて特異点

のない場合は，やはり整函数となるべきであるのに漸近解の方は (*1.3*), (*1.6*) から明らかなように転移点を分岐点に持ち ($\sqrt{P}$ に注意), $z-z_0$ の偏角が $2\pi$ だけ変わっても(転位点のまわりを一周すること), もとの値にもどらない. したがって(*2.9*)であらわされる一つの解の $P<0$ の領域への接続を求める際(*2.8*)を見て簡単に $\tau\to i\tau$ のおきかえをしたのでは誤りであることは明らかである. もしそれでよいとすれば $\tau\to -i|\tau|$ とおくことも同等に許されるはずであるが, 前者では $Ae^{ik\tau}\to Ae^{-k|\tau|}$ となるのが後者では $\to Ae^{k|\tau|}$ となって全く相反する結果を生じる. 解の転移点近傍の形, および, その転移点の外部の漸近解の接続の問題は, どのようにすれば解決されるであろうか.

これを知るために, よく用いられる方法として, 実際に転移点が存在し, しかも厳密な解が知られる簡単な場合をさがし出し, その解について手がかりを見いだすことにしよう [(*1.2*) を手がかりとして (*1.3*) が出たことに注意].

一番簡単なのは $P$ が $z=z_0$ に $n$ 位の零点を持つ

$$P(z)=a(z-z_0)^n \tag{5.1}$$

のときであろう. このとき (*1.1*) は

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+k^2a(z-z_0)^n\Phi=0 \tag{5.2}$$

と書ける. (*3.1*), (*3.2*) により変数を

$$\Psi=P^{\frac{1}{4}}\Phi=a^{\frac{1}{4}}(z-z_0)^{\frac{n}{4}}\Phi,$$

$$\tau=\sqrt{a}\int_{z_0}^{z}(z-z_0)^{\frac{n}{2}}dz=\frac{2\sqrt{a}}{n+2}(z-z_0)^{(n+2)/2} \tag{5.3}$$

にかえれば (*3.6*) から

$$P=a\left(\frac{n+2}{2\sqrt{a}}\tau\right)^{\frac{2n}{n+2}},$$

$$Q=P^{-\frac{1}{4}}\frac{d^2}{d\tau^2}P^{\frac{1}{4}}=\frac{n}{2(n+2)}\left[\frac{n}{2(n+2)}-1\right]\frac{1}{\tau^2}=-\frac{q}{\tau^2},$$

$$q=\frac{n(n+4)}{4(n+2)^2}. \tag{5.4}$$

これを (*3.5*) に代入して結局 (*5.2*) は

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Psi+\left(k^2+\frac{q}{\tau^2}\right)\Psi=0 \tag{5.5}$$

に帰着する．(*2.11*), (*2.12*) を参照すれば (*5.5*) の解が

$$\nu^2=\frac{1}{4}-q=\frac{1}{(n+2)^2}$$

によって与えられる次数

$$\nu=\frac{1}{n+2} \tag{5.6}$$

の円筒函数 $Z_\nu$ を用いて

$$\Psi\propto\sqrt{\tau}\,Z_\nu(k\tau) \tag{5.7}$$

の形にあらわされることがわかる．また (*5.2*) の解は

$$\Phi\propto P^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\tau}\,Z_\nu(k\tau)\propto\sqrt{z-z_0}\,Z_\nu(2k\nu\sqrt{a}\,(z-z_0)^{(n+2)/2})\propto\tau^\nu Z_\nu(k\tau) \tag{5.8}$$

となる．$Z_\nu(\xi)$ が $\xi\to0$ で $\xi^{\pm\nu}$ に比例すること，および (*5.6*) を考慮すれば (*5.8*) は $z=z_0$ の近傍で $\Phi$ が $z$ について正則であることを示す．(*5.8*) は確かに $z$ の整函数である．$Z_\nu(k\tau)$ として Hankel 函数 $H_\nu^{(1)}(k\tau)$ と $H_\nu^{(2)}(k\tau)$ をとれば

$$\Psi=\sqrt{\tau}\,[AH_\nu^{(1)}(k\tau)+BH_\nu^{(2)}(k\tau)], \tag{5.9}$$

$H_\nu(k\tau)$ の $|k\tau|\to\infty$ における漸近展開は $|\arg(k\tau)|<\pi$ に対して (*2.19*) すなわち

$$H_\nu^{(1,2)}(k\tau)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi k\tau}}\exp\left[\pm i\left(k\tau-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],\quad |\arg(k\tau)|<\pi \tag{5.10}$$

によって与えられる．$k\tau$ の偏角が上の範囲外にあるときはまず Hankel 函数の公式

$$\left.\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(e^{m\pi i}\zeta)&=-\frac{\sin(m-1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}(\zeta)-e^{-\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}(\zeta),\\H_\nu^{(2)}(e^{m\pi i}\zeta)&=e^{\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}(\zeta)+\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}(\zeta)\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

を用い ($m$ を適当に選んで), $|\arg\zeta|<\pi$ を満足する $\zeta$ に対する Hankel 函数でそれをあらわし，改めて (*5.10*) をあてはめればよい．

## §6 転移点近傍の解と接続公式

1) 転移点 $z=z_0$ の近傍で $P(z)$ が $a(z-z_0)^n$ で近似され，その近傍には転移点がないとしよう．$\tau$ の積分下限を $z=z_0$ にとり

$$\tau=\int_{z_0}^{z}P^{\frac{1}{2}}dz \tag{6.1}$$

に選んでおけば, (*1.1*) あるいは (*3.5*) の $\tau\sim 0$ での近似解は前章の議論により

$$\Phi\sim\tilde{\Phi}=P^{-\frac{1}{4}}\tau^{\frac{1}{2}}Z_\nu(k\tau)=P^{-\frac{1}{4}}\tau^{\frac{1}{2}}[A_1H_\nu^{(1)}(k\tau)+B_1H_\nu^{(2)}(k\tau)] \qquad (6.2)$$

となる. $P$ も $\tau$ も $\tau\to 0$ では (*5.1*), (*5.3*) で近似されるが, ここでは厳密な値そのものを採用することにしよう (その利点は以下に述べる). $k\to\infty$ であれば $|k\tau|$ がかなり大きくとも (たとえば $k\tau=O(1)$) $\tau$ を小さくとることが可能であるため (*6.2*) はよい近似をあたえるはずである. ところで $|k\tau|\to\infty$ のとき (*6.2*) は (*5.10*) により

$$\Phi\sim\tilde{\Phi}=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}P^{-\frac{1}{4}}\left[A_1e^{i\left(k\tau-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+B_1e^{-i\left(k\tau-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right],\quad |\arg(k\tau)|<\pi \qquad (6.3)$$

となる. これは定数係数を除けば (*2.9*) と完全に一致している. $k\tau$ の偏角が他の値に対しても形は同じである. すなわち (*6.2*) は $k$ が大きく他に転移点がない限りは $z$ の全領域にわたって有効な近似解を与える (他に転移点や $P$ の特異点があればそこに至るまで少なくとも有効).

われわれのとった近似の程度は近似解 $\tilde{\Psi}=P^{1/4}\tilde{\Phi}$ の満足する微分方程式 (*5.5*) すなわち

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}}{d\tau^2}+\left[k^2-Q+\left(Q+\frac{q}{\tau^2}\right)\right]\tilde{\Psi}=0 \qquad (6.4)$$

を見ればよくわかる. $k^2-Q$ にくらべて $Q+q/\tau^2$ が小さいほど近似がよいわけだが, $\tau\to 0$ では $Q$ の危険項 $Q\sim -q/\tau^2$ が $Q+q/\tau^2$ で打ち消されているために, $\tau$ のすべての値に対して $|k^2-Q|\gg|Q+q/\tau^2|$ が成立し ($k^2=Q$ の点は除くが, そこでも $Q+q/\tau^2$ はかなり小さいはずである), 近似の有効性を保証する.

2) ただ $k$ が非常に大きいと, $k\tau$ が小さい $\tau$ の範囲は非常に小さく, Bessel 函数が入ってややめんどうな (*6.2*) の近似を使うことがあまり必要でなくなる. 特に $P$ が $x$ の実函数, $k$ も正の実数の場合を考えよう. 解の大勢は (*2.8*) と (*2.9*) によってあらわされる. ただ問題は両者が $P=0$ の点を越えてどのようにつながるか, いいかえれば両者が同一の函数の解析接続となっているためには $A, B$ と $A', B'$ の間にどんな関係があるかを見いだす点にある. これは実際上は非常に多くまた重要な場合である. 屈折率が不均一な媒質を通過する波

の反射率や透過率，ポテンシアル壁を通過する物質波に対する同様な問題や，散乱の問題などはみなこれに属し，(2.8), (2.9) 程度の近似で満足すれば，転移点におけるめんどうな函数形などを必要としない．

このような関係式を接続公式と呼ぶ．その導出にはもちろん (6.2) が役立つ．すなわちこれを $P>0$, $P<0$ の場合について展開し，その係数を比較すればよい．

簡単のために $x>0$ で $P>0$ としよう．$x<0$ で $P<0$ となるのは $P$ が原点の近くで $ax^{2m+1}f(x)$,（ここで $f(x)$ は $f(0)=1$ となる $x$ の正則な函数，$a$ は正の実数，$m$ は整数$\geqq 0$）によってあらわされるときに限る．$x>0$ に対するその漸近展開はもちろん (6.3) である．

$x<0$ すなわち $x=|x|e^{\pi i}$ に対しては

$$\tau=\int_0^x P^{\frac{1}{2}}dx=a^{\frac{1}{2}}\int_0^{|x|\exp(\pi i)} x^{m+\frac{1}{2}}f(x)dx \tag{6.5}$$

の偏角は $\left(m+\dfrac{3}{2}\right)\pi i$ であり，

$$\tau=\exp\left[\left(m+\frac{3}{2}\right)\pi i\right]|\tau| \tag{6.6}$$

が成立する．また $P$ は

$$P=|P|e^{(2m+1)\pi i} \tag{6.7}$$

となる．(6.6) の偏角を持つ $k\tau$ に対する $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ の漸近展開を求めるために (5.11) の公式で $m\to m+1$, $\zeta\to i|\tau|$ $(i=\exp(\pi i/2))$] とおけばまず

$$H_\nu^{(1)}(k\tau)=H_\nu^{(1)}(e^{(m+1)\pi i}\cdot ik|\tau|)=-\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}(ik|\tau|)$$

$$-e^{-\nu\pi i}\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}(ik|\tau|),$$

$$H_\nu^{(2)}(k\tau)=e^{\nu\pi i}\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}(ik|\tau|)+\frac{\sin(m+2)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}(ik|\tau|) \tag{6.8}$$

が得られる．ここで $\nu$ は (5.6) で $n=2m+1$ とおいて

$$\nu=\frac{1}{2m+3}, \tag{6.9}$$

したがって

$$\sin(m+1)\nu\pi=\sin[\pi-(m+1)\nu\pi]=\sin(m+2)\nu\pi \tag{6.10}$$

の関係がある．

$\arg[ik|\tau|]<\pi$ だから (6.8) の右辺は (5.10) によって, $k|\tau|\to\infty$ に対し主項が

$$H_\nu^{(1)}(k\tau)\sim-\sqrt{\frac{2}{\pi k|\tau|}}\frac{1}{\sin\nu\pi}\Big[\sin m\nu\pi\cdot e^{-k|\tau|-i\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$+\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{k|\tau|-i\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\Big]e^{-\frac{\pi}{4}i}, \tag{6.11}$$

$$H_\nu^{(2)}(k\tau)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi k|\tau|}}\frac{1}{\sin\nu\pi}\Big[\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{-k|\tau|+i\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$+\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{k|\tau|+i\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\Big]e^{-\frac{\pi}{4}i}, \tag{6.12}$$

$$\arg(k\tau)=\left(m+\frac{3}{2}\right)\pi i$$

の漸近展開を持つ. $P<0$ では (6.6), (6.7) から

$$P^{-\frac{1}{4}}\tau^{\frac{1}{2}}=|P|^{-\frac{1}{4}}|\tau|^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) \tag{6.13}$$

となるから (6.2) の $P<0$ における漸近展開は

$$\Phi\sim|P|^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{1}{\sin\nu\pi}[A_1'e^{k|\tau|}+B_1'e^{-k|\tau|}], \tag{6.14}$$

$$A_1'=-iA_1\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{-\frac{\nu}{2}\pi i}+iB_1\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{\frac{\nu}{2}\pi i}, \tag{6.15}$$

$$B_1'=-A_1\sin m\nu\pi\cdot e^{-\frac{\nu}{2}\pi i}+B_1\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{\frac{\nu}{2}\pi i} \tag{6.16}$$

であらわされる.

(6.3), (6.14) はともに (6.2) の $P>0$, $P<0$ での展開式であり, (6.15), (6.16) が, 所望の接続関係である. これをもっと簡単な (2.9), (2.9′) の $A$, $B$, $A'$, $B'$ の間の関係に直そう. (2.9) と (6.3), (2.9′) と (6.14) を比較すれば

$$A=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}A_1e^{-\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i},\quad B=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}B_1e^{\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i},$$

$$\frac{A'}{A_1'}=\frac{B'}{B_1'}=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{1}{\sin\nu\pi} \tag{6.17}$$

の関係がある. これを用いて (6.15), (6.16) から $A_1$, $B_1$, $A_1'$, $B_1'$ を消去すれば

$$A'=\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}(e^{-\frac{\pi}{4}i}A+e^{\frac{\pi}{4}i}B), \tag{6.18}$$

$$B'=\frac{1}{\sin\nu\pi}(-\sin m\nu\pi\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}A+\sin(m+1)\nu\pi\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}B) \tag{6.19}$$

が得られる．これが

$$P^{-\frac{1}{4}}[Ae^{ik|\tau|}+Be^{-ik|\tau|}] \tag{6.20}$$

と

$$|P|^{-\frac{1}{4}}[A'e^{k|\tau|}+B'e^{-k|\tau|}] \tag{6.21}$$

との接続公式である．

この公式はもっと簡単化することができる．すなわち(6.21)の $B'e^{-k|\tau|}$ の項は数値的に見れば $A'$ を係数とする項($e^{k|\tau|}$ を主項とする)の誤差に比べてはるかに小さく $A'\equiv 0$ でない限りは無視されるからである．

(i)　$A'\neq 0$ の場合は $\varepsilon\neq 0$ として

$$A=\exp\left(\varepsilon-\frac{\pi}{4}\right)i,\quad B=\exp\left(-\varepsilon+\frac{\pi}{4}\right)i$$

と選び $e^{-k|\tau|}$ の項を無視すれば(6.18)～(6.19)から

$$P^{-\frac{1}{4}}\cos\left(k|\tau|-\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\to\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}\sin\varepsilon\cdot|P|^{-\frac{1}{4}}e^{k|\tau|},\qquad \varepsilon\neq 0,$$
$$\nu=1/(2m+3). \tag{6.22}$$

(ii)　$A'\equiv 0$ のときは

$$A=\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right),\quad B=\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)$$

と選ぶことにより，$B'$ は

$$B'=\frac{1}{\sin\nu\pi}[\sin(m+1)\nu\pi-\sin m\nu\pi]=\frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\nu\pi}{\cos\frac{\nu}{2}\pi} \tag{6.23}$$

となり，

$$|P|^{-\frac{1}{4}}e^{-k|\tau|}\to\frac{2\cos\frac{\nu}{2}\pi}{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\nu\pi}P^{-\frac{1}{4}}\cos\left(k|\tau|-\frac{\pi}{4}\right) \tag{6.24}$$

が得られる．

(i), (ii)は接続公式の標準形として最も手頃なものであろう．ここで矢印は左辺で近似される函数の転移点をこえての接続が右辺で近似されることを示す．矢印の向きを逆にできぬことは上の注意から明らかである．すなわち矢印を逆

にすれば (6.22) では右辺で無視した $B'e^{-k|\tau|}$ の $B'$ を変えれば左辺の位相は何とでも変化し，また (6.24) では右辺の位相のわずかのずれが左辺に $e^{k|\tau|}$ に比例する項の出現を許すという結果を生じる．

応用上特に重要なのは一位の転移点のばあいで，このときは $m=0,\ \nu=1/3$ とおいて，(6.22), (6.23) は

$$P^{-\frac{1}{4}}\cos\left(k|\tau|-\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\to\sin\varepsilon\cdot|P|^{-\frac{1}{4}}e^{k|\tau|},\qquad \varepsilon\neq 0,\tag{6.25}$$

$$|P|^{-\frac{1}{4}}e^{-k|\tau|}\to 2P^{-\frac{1}{4}}\cos\left(k|\tau|-\frac{\pi}{4}\right)\tag{6.26}$$

となる．

以上の公式の導出には $x>0$ で $P>0$ としたが，得られた公式は $\tau$ を (6.1) で定義しておけば一般に $P>0$ の領域 ($\arg P=0$) と，$P<0$ で $\arg P=(2m+1)\pi i$ ((6.7) 参照) との結合公式と見て差支えない．そのために $\tau$ を $|\tau|$ であらわしておいた．$|\tau|$ はいわば転移点からの距離といえる．したがって $x>0$ で $P<0,\ x<0$ で $P>0$ のときでも，転移点が $x=x_0\neq 0$ の場合でももちろん役に立つわけである．

3)　2) の場合と関連して $P$ が $x=0$ で 0 となるがその両側で正または負の実数となるときを考えよう．すなわち原点の近くで

$$P\fallingdotseq ax^{2m}f(x)\tag{6.27}$$

となる場合である．このときは解の型の変化はないが，位相や振幅に変化があらわれる．まず $a>0$ としよう．2) のときと同様にして $x>0$ で $P,\ \tau>0$，すなわち $P=|P|,\ \tau=|\tau|,\ x<0$ で

$$P=|P|e^{2m\pi i},\qquad \tau=e^{(m+1)\pi i}|\tau|\tag{6.28}$$

であり，(5.11) で $m\to m+1,\ \zeta=k|\tau|$ とおけば (6.28) の $k\tau$ に対し，$(m+1)\nu=1/2$ を考慮し

$$H_\nu^{(1)}(k\tau)=-\frac{1}{\sin\nu\pi}[\cos\nu\pi\cdot H_\nu^{(1)}(k|\tau|)+e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(k|\tau|)],\tag{6.29}$$

$$H_\nu^{(2)}(k\tau)=\frac{1}{\sin\nu\pi}[e^{\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(k|\tau|)+\cos\nu\pi\cdot H_\nu^{(2)}(k|\tau|)],\tag{6.30}$$

$$\nu=\frac{1}{2m+2}$$

が成立する. $P^{-1/4}\tau^{1/2}=i|P|^{-1/4}|\tau|^{1/2}$ であることを考慮し (*6.29*), (*6.30*) の $k\tau\to\infty$ での展開の主項をとれば (*6.2*) の $x<0$ での展開の主項は容易に

$$\Phi\sim|P|^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[A_1'e^{i\left(k|\tau|-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+B_1'e^{-i\left(k|\tau|-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right], \quad (6.31)$$

$$A_1'=-iA_1\cos\nu\pi+iB_1e^{\nu\pi i}, \quad (6.32)$$

$$B_1'=-iA_1e^{-\nu\pi i}+iB_1\cos\nu\pi \quad (6.33)$$

によって与えられる. (*6.20*) に対応する形をとれば (*6.3*) を参照して

$$|P|^{-\frac{1}{4}}[Ae^{ik|\tau|}+Be^{-ik|\tau|}]\rightleftarrows|P|^{-\frac{1}{4}}[A'e^{ik|\tau|}+B'e^{-ik|\tau|}], \quad (6.34)$$

$$\left.\begin{aligned}A'&=\frac{1}{\sin\nu\pi}[-i\cos\nu\pi\cdot A+B],\\ B'&=\frac{1}{\sin\nu\pi}[A+i\cos\nu\pi\cdot B].\end{aligned}\right\} \quad (6.35)$$

これを $A, B$ について解けば $A$ と $A'$, $B$ と $B'$ を交換した式が得られ, 両者の関係は全く対称である.

$a<0$ のときは (*6.34*) で形式的に $k$ を $ik$ に変えた関係が成り立ち, $B=0$, $A=1$ とおき, 右辺の $A'\exp(-k|\tau|)$ の項を $B'\exp(k|\tau|)$ に比べて無視すれば (*6.24*) に相当する関係式

$$|P|^{-\frac{1}{4}}e^{-k|\tau|}\to\frac{1}{\sin\nu\pi}|P|^{-\frac{1}{4}}e^{k|\tau|} \quad (6.36)$$

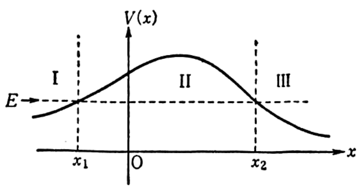
が得られる. 矢印に対する注意も (*6.24*) のときと同じである.

## §7 接続公式の応用

1) 第7.1図のようなポテンシアル壁を左から通過する粒子波の問題を考えてみよう. (*1.9*) によれば

$$\frac{2M}{\hbar^2}=k^2, \quad E-V(x)=P(x) \quad (7.1)$$

と書ける. 転移点は $E=V$ となるところ



第 7.1 図

で, 図では $x_1, x_2$ である. ポテンシアルがなだらかで, $x_1$ と $x_2$ がかなり離れているとしよう [$k(x_1-x_2)\gg1$]. 領域は $x_1, x_2$ によって三つに分れ, $\Psi$ は $x_1<x<x_2$ で指数型, $x>x_2$, $x<x_1$ では波動型となる. $x_1, x_2$ は $P$ の一位の零点である. 各領域における $\Psi$ の形はそれぞれ

$$\Psi_1 = P^{-\frac{1}{4}}[A_1 e^{ik|\tau_1|} + B_1 e^{-ik|\tau_1|}], \qquad x < x_1, \tag{7.2}$$

$$\Psi_2 = |P|^{-\frac{1}{4}}[A_1' e^{k|\tau_1|} + B_1' e^{-k|\tau_1|}] = |P|^{-\frac{1}{4}}[A_2' e^{k|\tau_2|} + B_2' e^{-k|\tau_2|}],$$
$$x_1 < x < x_2, \tag{7.3}$$

$$\Psi_3 = P^{-\frac{1}{4}}[A_2 e^{ik|\tau_2|} + B_2 e^{-ik|\tau_2|}], \qquad x_2 < x, \tag{7.4}$$

ただし $\tau_1, \tau_2$ は $x_1, x_2$ を基準として

$$\tau_1 = \int_{x_1}^{x} P^{\frac{1}{2}} dx, \quad \tau_2 = \int_{x_2}^{x} P^{\frac{1}{2}} dx \tag{7.5}$$

であらわされる.

一方，三つの領域をつなぐ接続公式は (6.18), (6.19) で $m=0$ とおいて

$$A_j' = A_j e^{-\frac{\pi}{4}i} + B_j e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad B_j' = B_j e^{-\frac{\pi}{4}i}, \qquad j = 1, 2 \tag{7.6}$$

となる．$x < x_1$ で $|\tau_1|$ は $x$ の減少函数である ($x$ が $x_1$ に近づけば減る)．$x$ の増加とともに位相が増加するものを右へ進む進行波と考えれば，左からの入射進行波は $\Psi_1$ の中の $P^{-\frac{1}{4}} B_1 e^{-ik|\tau_1|}$ である．一方ポテンシアル壁を通過した $x_2 < x$ では $|\tau_2|$ は $x$ とともに増すが，ここでは右へ進む波しか存在せず，$\Psi_3$ の中で $B_2 = 0$ となる．透過率を計算することは $B_1$ を与えて $A_2$ (すなわち $A_2/B_1$) を求めることに帰するが，$B_2 = 0$ の条件を満足させるためにまず

$$A_2 = e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad B_2 = 0 \tag{7.7}$$

とおいて $B_1$ を定めよう．(比だけが問題だからこれで一般性は失われない．)

(7.6) にこれを代入すれば (7.3) の $A_2', B_2'$ は

$$A_2' = 1, \quad B_2' = 0. \tag{7.8}$$

一方 (7.5) から $x_1 < x < x_2$ において

$$|\tau_1| + |\tau_2| = |\tau_{12}| = \left| \int_{x_1}^{x_2} P^{\frac{1}{2}} dx \right| = \text{定数} \tag{7.9}$$

であり，(7.3) は指数の肩の比較により

$$A_1' = 0, \quad B_1' = e^{k|\tau_{12}|} \tag{7.10}$$

を与える．これを再び (7.6) に代入して得られる連立方程式

$$0 = A_1 e^{-\frac{\pi}{4}i} + B_1 e^{\frac{\pi}{4}i}, \tag{7.11}$$

$$e^{k|\tau_{12}|} = \qquad B_1 e^{-\frac{\pi}{4}i} \tag{7.12}$$

を $B_1, A_1$ について解けば

$$B_1 = e^{k|\tau_{12}|+\frac{\pi}{4}i}, \quad A_1 = e^{k|\tau_{12}|-\frac{\pi}{4}i}. \tag{7.13}$$

(7.2) で $A_1$ のかかった項は $x<x_1$ での反射波を与える.

(7.13), (7.7) から波の透過率 $T$ (振幅の絶対値の二乗の比) は $V(\infty) = V(-\infty) = 0$, $P(\infty) = P(-\infty) = E$ を考慮して

$$T = \frac{|A_2|^2}{|B_1|^2} = e^{-2k|\tau_{12}|} \tag{7.14}$$

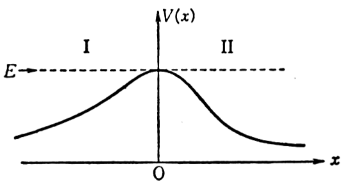
となる. 反射率 $R = |A_1|^2/|B_1|^2$ は (7.13) によれば1だが, 実際はエネルギーの保存則から

$$R = 1-T = 1-e^{-2k|\tau_{12}|} \tag{7.15}$$

のはずである. われわれの近似は $k|\tau_{12}| \gg 1$ を仮定しているのだから, $\exp(-2k|\tau_{12}|)$ が1に比べて省略されるのは近似の性格から当然である.

2)　1) の仮定が成り立たぬ極端な場合として $\tau_{12} = 0$ すなわち $x_1$ と $x_2$ が一致した場合を考えよう. このとき $V$ の最大値は $E$ と等しく, $P$ は $x = x_0$ で二位の零点を持つ. $x<x_0$, $x>x_0$ における $\Psi$ はともに波動型で, $\tau$ を

$$\tau = \int_{x_0}^{x} P^{\frac{1}{2}} dx \tag{7.16}$$



第 7.2 図

で定義すれば (6.34) の右辺と左辺はそれぞれ $x<x_0$, $x>x_0$ における $\Psi$ を与える. 接続公式は (6.35) で $m = 1$, $\nu = 1/4$ とおいて

$$A' = -iA + \sqrt{2}B, \tag{7.17}$$

$$B' = \sqrt{2}A + iB \tag{7.18}$$

である. 左から $B' \exp(-ik|\tau|)$ が入射する場合を考えよう. $x_0<x$ では透過波 $A \exp(ik|\tau|)$ しか存在しないから $B = 0$ とおいて,

$$A' = -iA, \quad B' = \sqrt{2}A \tag{7.19}$$

が得られる. 透過率 $T$ および反射率 $R$ はそれぞれ

$$T = \frac{|A|^2}{|B'|^2} = \frac{1}{2}, \quad R = \frac{|A'|^2}{|B'|^2} = \frac{1}{2} \tag{7.20}$$

で両者は相等しく, 和は1となる. これは (7.14), (7.15) とよい対照をなし

ている:

さらに $x_0$ が $2m$ 位の零点のときは (6.34), (6.35) で $B=0$ とおいて

$$A'=\frac{-i\cos\left(\frac{\pi}{2m+2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2m+2}\right)}A,\quad B'=\frac{A}{\sin\left(\frac{\pi}{2m+2}\right)}. \tag{7.21}$$

$T$ および $R$ は

$$T=\sin^2\left(\frac{\pi}{2m+2}\right),\quad R=\cos^2\left(\frac{\pi}{2m+2}\right) \tag{7.22}$$

で $T+R=1$, $T\leqq R$ の性質がある. $m$ が増すほど透過率の減るのは, 極大値が平坦となり壁が厚くなるわけだから当然であろう.

## §8　転移点の近傍での近似の精密化

1)　(3.5) を

$$\tilde{L}[\Psi]\equiv\frac{d^2\Psi}{d\tau^2}+(k^2-\tilde{Q})\Psi=(Q-\tilde{Q})\Psi \tag{8.1}$$

の形に書こう. これを

$$\tilde{L}[K(\tau,t)]=0,\quad K(t,t)=0,\quad \left[\frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t)\right]_{\tau=t}=1 \tag{8.2}$$

を満足する $K(\tau,t)$ を用いて積分方程式の形に書き直せば

$$\Psi(\tau)=\tilde{\Psi}(\tau)+\int^{\tau}K(\tau,t)\{Q(t)-\tilde{Q}(t)\}\Psi(t)dt \tag{8.3}$$

が得られる. ここに $\tilde{\Psi}(\tau)$ は

$$\tilde{L}[\tilde{\Psi}]=\frac{d^2\tilde{\Psi}}{d\tau^2}+(k^2-\tilde{Q})\tilde{\Psi}=0 \tag{8.4}$$

の解である. §3 までは $\tilde{Q}$ として0を, §6 では $-q/\tau^2$ をとり, そのときの $\tilde{\Psi}$ を漸近展開の主項とした. $|k^2-Q|$ に比べて $|Q-\tilde{Q}|$ が小さいほど近似が良好なことはすでに述べた通りである. §6 の近似をさらに精密化することは, 多くの人によって行なわれた(1).

2)　$Q$ が転移点の近くで $-q/\tau^2$ によって近似されることは前に述べたが, この近似の程度をしらべてみよう. 転移点を $z$ 面の原点に選び, その近傍での Taylor 展開

(1)　R. E. Langer: Phys. Rev., **51** (1937), 669; Comm. Pure Appl. Math., **3** (1950), 427. C. L. Pekeris: J. Appl. Phys., **17** (1946), 1108. I. Imai: Phys. Rev., **74** (1948), 113; **80** (1950), 1112; I. R. E. Trans. AP—4 (1956), 233. R. Mckelvey: Trans. Amer. Math. Soc., **79** (1955), 103.

$$P(z)=az^n(1+b_1z+b_2z^2+\cdots),\qquad a\neq 0 \tag{8.5}$$

を (3.2) に代入すれば

$$\tau=\frac{2}{n+2}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{n+2}{2}}\left[1+\frac{n+2}{2(n+4)}b_1z+\frac{n+2}{n+6}\left(\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{8}b_1{}^2\right)z^2+\cdots\right], \tag{8.6}$$

これを $z$ について解けば

$$z=t\left[1-\frac{b_1}{n+4}t-\frac{1}{n+6}\left\{b_2-\frac{n^2+11n+32}{2(n+4)^2}b_1{}^2\right\}t^2-\cdots\right], \tag{8.7}$$

ただし

$$t=\left[\frac{\tau}{2\nu\sqrt{a}}\right]^{2\nu},\quad \nu=\frac{1}{n+2} \tag{8.8}$$

となる. (8.5)～(8.8) を (3.6) に代入して $Q$ を求めれば

$$Q=-\frac{n(n+4)}{16az^{n+2}}\left[1-\frac{n+2}{n+4}b_1z+\left\{\frac{n^2+5}{n(n+4)}b_1{}^2-\frac{n^2+8}{n(n+4)}b_2\right\}z^2+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{\tau^2}[q_0+q_2\tau^{4\nu}+O(\tau^{6\nu})], \tag{8.9}$$

ただし

$$q_0=\frac{n(n+4)}{4(n+2)^2},$$

$$q_2=6\left(\frac{n+2}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{4}{n+2}}\cdot\frac{1}{(n+2)^2(n+6)}\left[\frac{n+5}{n+4}b_1{}^2-2b_2\right]. \tag{8.10}$$

$k\tau=\xi$ とおけば (8.9) は

$$Q=-\frac{k^2}{\xi^2}\left[q_0+q_2\frac{\xi^{4\nu}}{k^{4\nu}}+O\left(\frac{\xi^{6\nu}}{k^{6\nu}}\right)+\cdots\right] \tag{8.9'}$$

とも書ける. ここで注目すべきことは $\tau^{2\nu}$ (すなわち $k^{-2\nu}$) に比例する項が欠けている点である. これは $k\tau=\xi=O(1)$, $k\gg1$ において $Q=-q_0/\tau^2=-k^2q_0/\xi^2$ とおく近似が非常によいことを示す. $\tilde{Q}$ として $-q_0/\tau^2$ をえらべば (8.2) の $K(\tau,t)$ としては

$$K(\tau,t)=-\frac{\pi i}{4}(\tau t)^{\frac{1}{2}}[H_\nu^{(1)}(k\tau)H_\nu^{(2)}(kt)-H_\nu^{(1)}(kt)H_\nu^{(2)}(k\tau)] \tag{8.11}$$

ととればよろしい. これを用いて (8.3) は $k\tau\sim1$, $k\gg1$ に対し,

$$\Psi(\xi)=\xi^{\frac{1}{2}}Z_\nu(\xi)+\frac{\pi iq_2}{4}k^{-4\nu}\xi^{\frac{1}{2}}\int^{\xi}[H_\nu^{(1)}(\xi)H_\nu^{(2)}(\eta)$$

$$-H_\nu^{(2)}(\xi)H_\nu^{(1)}(\eta)]\eta^{4\nu-\frac{3}{2}}[1+O(k^{-2\nu})]\Psi(\eta)d\eta \tag{8.12}$$

と書かれる．ただし $\xi=k\tau$, $\eta=kt$, $\tilde{\Psi}(\xi)=\xi^{1/2}Z_\nu(\xi)$ とおいた．

これから $\tilde{\Psi}(\xi)$ を出発点として §3, §4 同様に逐次近似法により

$$\Psi(\xi)=\xi^{1/2}Z_\nu(\xi)[1+O(k^{-4\nu})],\qquad \xi=k\tau=O(1) \tag{8.13}$$

を証明することができるが，ここでは省略しよう．(*8.13*) より精密な近似は (*8.12*) の右辺の $\Psi$ を $\eta^{1/2}C_\nu(\eta)$ でおきかえた

$$\Psi=\left\{\xi^{1/2}Z_\nu(\xi)+\frac{\pi i}{4}q_2k^{-4\nu}\xi^{\frac{1}{2}}\int^\xi \eta^{4\nu-1}[H_\nu^{(1)}(\xi)H_\nu^{(2)}(\eta)-H_\nu^{(2)}(\xi)H_\nu^{(1)}(\eta)]Z_\nu(\eta)d\eta\right\}$$
$$\times[1+O(k^{-6\nu})] \tag{8.14}$$

である．特に $n=1$, $\nu=1/3$ のときには任意の円筒函数 $Z_p$, $\bar{Z}_q$ の積に対する積分公式

$$\int^\xi \eta^{-p-q-1}\bar{Z}_{p+1}(\eta)Z_{q+1}(\eta)d\eta=-\frac{\xi^{-p-q}}{2(p+q+1)}\{\bar{Z}_p(\xi)Z_q(\xi)$$
$$+\bar{Z}_{p+1}(\xi)Z_{q+1}(\xi)\} \tag{8.15}$$

において $p=q=-\dfrac{2}{3}$ とおいたものを用いて

$$\Psi\sim\xi^{1/2}Z_{1/3}(\xi)+\frac{3q_2}{2}k^{-4/3}\xi^{5/6}Z_{-2/3}(\xi)+O(k^{-2}),\qquad \xi=O(1) \tag{8.16}$$

が得られる．なお公式

$$H_{p+1}^{(1)}(\xi)H_p^{(2)}(\xi)-H_{p+1}^{(2)}(\xi)H_p^{(1)}(\xi)=-\frac{4i}{\pi\xi} \tag{8.17}$$

も用いた．

3)　$n=1$ のときの精密な公式．上にも見たように一位の転移点に対しては公式が非常に簡単となるが，実用的にはこの場合が最も重要であって (*8.16*) よりはるかに精密ないろいろの公式が多くの著者によって得られている．

たとえば (*8.16*) をもう一度 (*8.14*) の右辺に代入して近似を高めれば

$$\Psi\sim\xi^{1/2}Z_{1/3}(\xi)+\frac{3q_2}{2}k^{-4/3}\xi^{5/6}Z_{-2/3}(\xi)-\frac{q_3}{2k^2}\xi^{3/2}Z_{4/3}(\xi)+O(k^{-8/3}) \tag{8.18}$$

となる．これは Pekeris の求めた公式である(1)．

これらに比べてずっと精密でしかも簡潔な公式は次のようにして得られる (今井, 1947)(2)．まず

(1)　C. L. Pekeris: J. Appl. Phys., **17** (1946), 1108.
(2)　I. Imai: Phys. Rev., **74** (1948), 113; **80** (1950), 1112; I. R. E. Trans. AP—**4** (1956), 233.

$$\tilde{\Psi} = \tau^{1/6} u^{1/2} Z_{1/3}(\kappa u^{3/2}), \tag{8.19}$$

ただし

$$u = \tau^{2/3} + q_2 \kappa^{-2}, \qquad \kappa^2 = k^2 + q_3 \tag{8.20}$$

は直接微分することによって証明されるように

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}}{d\tau^2} + \left(k^2 + \frac{5}{36}\frac{1}{\tau^2} + q_2 \tau^{-2/3} + q_3\right)\tilde{\Psi} = 0 \tag{8.21}$$

を厳密に満足している．したがって $\xi \sim O(1)$ においては (8.18) と近似の程度は同一である．($\tilde{Q}$ として (8.9) の $q_3 \tau^{6\nu}$ までとったもの．) ここで $q_2, q_3, \cdots, q_m$ は (8.9) の $\tau^{2m\nu} = \tau^{2m/3}$ の係数で (8.10) で $n=1$ とおいたものであり，

$$q_0 = 5/36, \qquad q_2 = -\frac{3}{35}\left(\frac{3}{2}a\right)^{-\frac{2}{3}}(5b_2 - 3b_1{}^2), \tag{8.22}$$

$$q_3 = -\frac{4}{75}\frac{1}{a}(25b_3 - 35b_1 b_2 + 14b_1{}^3), \tag{8.23}$$

$$q_4 = -\frac{27}{26950}\left(\frac{3}{2}a\right)^{-\frac{4}{3}}(6125b_4 - 4350b_2{}^2 - 9800b_1 b_3 + 12080b_1{}^2 b_2 - 3624b_1{}^4) \tag{8.24}$$

で与えられている．$\tilde{\Psi}$ として (8.19) をとれば積分方程式 (8.3) において $K(\tau, t)$, $Q(t) - \tilde{Q}(t)$ は，それぞれ

$$K(\tau, t) = -\frac{\pi i}{4}(\tau t)^{1/6}(u u_1)^{1/2}[H_{1/3}^{(1)}(\kappa u^{3/2}) H_{1/3}^{(2)}(\kappa u_1^{3/2}) - H_{1/3}^{(1)}(\kappa u_1^{3/2}) H_{1/3}^{(2)}(\kappa u^{3/2})], \tag{8.25}$$

$$Q(t) - \tilde{Q}(t) = -q_4 t^{2/3} + O(t^{4/3}) \tag{8.26}$$

であらわされる．(8.19) の $Z_{1/3}$ として Hankel 函数 $H_{1/3}^{(1)}, H_{1/3}^{(2)}$ をとり，これを積分の中の $\Psi$ の代りに代入して変形すれば，さらに精密な近似として，

$$\tilde{\Psi}_{1,2} = \left(\frac{\pi k}{2}\right)^{1/2} i^{\pm 5/6} \tau^{1/6} \zeta H_{1/3}^{(1,2)}(\kappa\theta) + O(k^{-3}), \qquad \tau = O(k^{-1}), \tag{8.27}$$

$$\zeta = \left(u - \frac{1}{5} q_4 \kappa^{-2} u^2\right)^{1/2},$$

$$\theta = \left(u + \frac{1}{5} q_4 \kappa^{-2} u^2\right)^{3/2}$$

が得られる．ただしこの式では $k\tau \gg 1$ で (4.8) と接続するように定数係数を掛けた．$Q_1$ の積分定数は $\tau \to 0$ で定数項が消えるように選ぶ．

## §9 精密化のつづき

1) $n=2$, したがって $\nu=1/4$ の場合も，かなり簡単で精密な公式が得られる．これは (8.9), (8.14) からも想像できるがここでは (8.22) と同様 $\tilde{Q}$ として (8.9), (8.10) から得られる

$$\tilde{Q}=-\frac{3}{16}\frac{1}{\tau^2}-\frac{q_2}{\tau}, \quad q_2=\frac{1}{64\sqrt{a}}(7b_1{}^2-12b_2) \tag{9.1}$$

をとって一挙に高い近似を求めてみよう．このとき誤差 $Q-\tilde{Q}$ の主要項は $-q_3/\tau^{3/2}$ である．このとき (8.4) は

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{\Psi}+\left(k^2+\frac{3}{16}\frac{1}{\tau^2}+\frac{q_2}{\tau}\right)\tilde{\Psi}=0 \tag{9.2}$$

と書けるが，これは合流型超幾何函数の一つの標準形であり，その解は Whittaker の函数を用いれば，$A, B$ を定数として

$$\tilde{\Psi}=AW_{-\kappa,1/4}(-2ik\tau)+BW_{\kappa,1/4}(2ik\tau), \tag{9.3}$$

ただし

$$\kappa=-iq_2/(2k) \tag{9.4}$$

であらわされる．$q_2=0$ とおけば（あるいは $k\tau\sim1$ とし $k\to\infty$ とすれば）

$$W_{0,1/4}(z)=\frac{i}{2}e^{\frac{\pi}{8}i}\sqrt{\pi z}H_{1/4}^{(1)}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}z\right) \tag{9.5}$$

の関係があるので定数係数を除いて (9.3) は (5.9) と同等になる．

さらに $|k\tau|\gg1$ に対しては $|\arg k\tau|<\pi$ における $W_{\kappa,\mu}$ の漸近展開

$$W_{\kappa,\mu}(z)\sim e^{-z/2}z^{\kappa}, \quad |\arg z|<\pi, \quad |z|\gg1 \tag{9.6}$$

を用いて

$$\tilde{\Psi}\sim Ae^{ik\tau}(-2ik\tau)^{iq_2/(2k)}\left(1+\frac{3}{32ik\tau}\right)+Be^{-ik\tau}(2ik\tau)^{-iq_2/(2k)}\left(1-\frac{3}{32ik\tau}\right) \tag{9.7}$$

が得られる．

$$\int^{\tau}\tilde{Q}d\tau=\frac{3}{16}\frac{1}{\tau}-q_2\log\tau \tag{9.8}$$

を考慮し，(4.8) と (9.7) を比較すれば両者がよく接続していることがわかる．

2) 転移点が接近している場合には，結合公式を用いるようなやり方が許されなくなってくる．現在のところ二つの転移点 ($\pm z_0$) が接近しており $P(z)$ が $z\sim z_0$ ($|kz_0|\ll1$) の近くで

$$P(z)=a(z^2-z_0{}^2)$$

の形に書ける場合が最もよくしらべられているが，やや専門的になるので省略する[1].

## §10 偏微分方程式

1) (*1. 1*) に相当する三次元の Schrödinger の方程式

$$[\nabla^2+k^2P(x,y,z)]\Phi=0, \qquad (10.1)$$

ただし

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

において $k$ が大きく，$P$ の変動が少ない場合を考えよう．

(*1. 3*) に相当して

$$\Phi=\exp[ik\varphi(x,y,z)] \qquad (10.2)$$

の形を仮定し (*10. 1*) に代入すれば $\varphi$ に対して

$$-k^2(\mathrm{grad}\,\varphi)^2+ik\nabla^2\varphi+k^2P=0 \qquad (10.3)$$

が得られる．第零近似として第二項を無視すれば

$$(\mathrm{grad}\,\varphi_0)^2=P \qquad (10.4)$$

となる．波の問題でいえば $k^2P$ は媒質の屈折率 $n(x,y,z)$ の二乗にほかならず，$k\varphi_0$ は Hamilton の特性函数をあらわす．(アイコナルともいう．) また Schrödinger の方程式では

$$k^2P=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)=\frac{2m}{\hbar^2}W \qquad (10.5)$$

であり，(*10. 5*) は，質点力学の Hamilton-Jacobi の方程式にほかならない．

(*10. 4*) はいわば (*10. 3*) の幾何光学的近似といえる．また $\varphi_0$ が一定の面 (波面) に垂直な線が光線の進路にほかならない．以下簡単のために波の問題に限らず $\varphi_0$ 一定の面を波面と呼ぼう．

さらに高い近似を求めるには，(*2. 1*) の形の展開式を (*10. 3*) に代入し，(*2. 2*) ～(*2. 4*) の形の漸化公式

$$(\mathrm{grad}\,\varphi_0)^2=P, \qquad (10.6)$$

$$2(\mathrm{grad}\,\varphi_0\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_1)=i\nabla^2\varphi_0, \qquad (10.7)$$

$$2(\mathrm{grad}\,\varphi_0\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_2)=i\nabla^2\varphi_1-(\mathrm{grad}\,\varphi_1)^2, \qquad (10.8)$$

---

(1) 興味のある方はたとえば R. Mckelvey: Trans. Amer. Math. Soc., **79** (1955), 103 などを参照されたい．

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2(\mathrm{grad}\,\varphi_0\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_n)=i\nabla^2\varphi_{n-1}-\sum_{m=1}^{n-1}(\mathrm{grad}\,\varphi_m\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_{n-m}) \qquad (10.8')$$

を逐次に解いてゆけばよい.

また同じことだが

$$\Phi=e^{ik\varphi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(x,y,z)}{(ik)^{n-1}} \qquad (10.9)$$

の形を仮定してもよい. (*10.1*) に代入して $k$ のベキの等しい項を等置すれば

$$(\mathrm{grad}\,\varphi_0)^2=P, \qquad (10.10)$$

$$2(\mathrm{grad}\,\varphi_0\cdot\mathrm{grad}\,\psi_1)+(\nabla^2\varphi_0)\psi_1=0, \qquad (10.11)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2(\mathrm{grad}\,\varphi_0\cdot\mathrm{grad}\,\psi_n)+(\nabla^2\varphi_0)\psi_n=-\nabla^2\psi_{n-1},\quad n>1 \qquad (10.12)$$

を得る. 高次近似に対する方程式が簡単で同一な形をとる点でこの方が便利なこともある.

さて幾何光学的な波面の形, すなわち $\varphi_0$ の函数形を求めることは幾何光学の問題であり, すでに解けたものとする. (*10.6*) を考慮すれば射線の方向の単位ベクトル $\boldsymbol{N}$ は

$$\boldsymbol{N}=\pm\mathrm{grad}\,\varphi_0/|\mathrm{grad}\,\varphi_0|=\pm P^{-1/2}\,\mathrm{grad}\,\varphi_0 \qquad (10.13)$$

で与えられる. 射線に沿って長さ $s$ をとれば $x,y,z$ の任意の函数 $f(x,y,z)$ の射線方向の微分は

$$\frac{\partial f}{\partial s}=(\boldsymbol{N}\cdot\mathrm{grad}\,f)=\pm P^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{grad}\,\varphi_0\cdot\mathrm{grad}\,f) \qquad (10.14)$$

の形に書ける.

特に $f$ として $\varphi_0$ をとれば (*10.6*) を用いて

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}=\pm P^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{grad}\,\varphi_0)^2=\pm P^{1/2}, \qquad (10.15)$$

あるいは積分して

$$\varphi_0=\pm\int P^{1/2}ds \qquad (10.16)$$

が得られる. このとき (*10.7*), (*10.8*), … は (*10.14*) を考慮すれば

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}=\pm\frac{i}{2}P^{-\frac{1}{2}}\nabla^2\varphi_0,\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}=\pm\frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}[i\nabla^2\varphi_1-(\mathrm{grad}\,\varphi_1)^2],\quad\cdots \qquad (10.17)$$

と書け，積分すれば

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\pm\frac{i}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}\nabla^2\varphi_0 ds,\quad \varphi_2=\pm\frac{1}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}[i\nabla^2\varphi_1-(\mathrm{grad}\,\varphi_1)^2]ds,\\ \cdots\cdots,\quad \varphi_n&=\pm\frac{1}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}\left[i\nabla^2\varphi_{n-1}-\sum_{m=1}^{n-1}(\mathrm{grad}\,\varphi_m\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_{n-m})\right]ds\end{aligned}\right\}\quad(10.18)$$

を与える．

(10.12) も同様に解ける．すなわち

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial s}\pm\frac{1}{2}(P^{-\frac{1}{2}}\nabla^2\varphi_0)\psi_n=\mp\frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}\nabla^2\psi_{n-1}\quad(10.19)$$

と書き変えれば，一階の線型常微分方程式の公式により

$$\psi_n=\left(A_n\mp\frac{1}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}G^{-1}\nabla^2\psi_{n-1}ds\right)G,\quad(10.20)$$

$$G=\exp\left(\mp\frac{1}{2}\int P^{-\frac{1}{2}}\nabla^2\varphi_0 ds\right)=\exp(i\varphi_1)\quad(10.21)$$

がただちに求まる．ここで $A_n$ は $s$ によらない．

2）　最も簡単な $P=1$ の場合を考えよう．すなわち (10.1) が Helmholtz の方程式

$$(\nabla^2+k^2)\Phi=0\quad(10.22)$$

のときである．(10.15) は $s=0$ で $\varphi_0=0$ となるように積分定数を定めれば

$$\varphi_0=\pm s\quad(10.23)$$

を与える．$P=1$ は均一な媒質を意味し，射線は直線であって，一つの波面がわかっていれば，他の波面とその上の $\varphi_0$ の値は自明である (Huygens の原理).

$s$ と波面上の直交曲線座標 $(\xi_1,\xi_2)$ とを用いて空間内の直交曲線座標 $(s,\xi_1,\xi_2)$ を定義し，その線素 $dS$ を

$$dS^2=ds^2+g_{11}d\xi_1{}^2+g_{22}d\xi_2{}^2\quad(10.24)$$

で与えることとすれば $\nabla^2\varphi_0$ は (10.23) から，簡単な式

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi_0=\pm\nabla^2 s&=\pm\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{g_{11}g_{22}}\frac{\partial s}{\partial s}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{g}\\ &=\pm\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\log g\end{aligned}\quad(10.25)$$

であらわされる．ここに $\sqrt{g}$ は

$$\sqrt{g}=\sqrt{g_{11}g_{22}}\quad(10.26)$$

で，波面上の面素片が $\sqrt{g_{11}g_{22}}d\xi_1 d\xi_2$ であらわされることに注意すれば(*10. 25*)は射線束の断面積の射線に沿っての変化の割合である．(*10. 25*)を(*10. 18*)に代入し $P=1$ とおけば $s$ によらぬ付加項を除いて

$$\varphi_1 = \frac{i}{4}\log g \qquad (10.27)$$

を得る．(*10. 23*),(*10. 27*)を用いれば(*10. 2*),(*2. 1*)に対して $\Phi$ の粗い近似は

$$\Phi = A(s_0)g_0^{\frac{1}{4}}g^{-\frac{1}{4}}e^{\pm iks} \qquad (10.28)$$

であらわされる．ただし $s=s_0$ で $\Phi$ が $A(s_0,\xi_1,\xi_2)$ となるように積分定数をえらんだ．$g_0$ は $s_0$ における $g$ の値である．(*10. 28*)は(*2. 9*)に相当する近似式である．

ふつうの波の問題では $k$ は実数であり(*10. 28*)の絶対値の二乗，すなわちエネルギー密度は

$$|\Phi|^2 = |A|^2 g_0^{\frac{1}{2}}/g^{\frac{1}{2}} \qquad (10.29)$$

で(*10. 26*)の注意によればエネルギー密度が射線束の断面積に反比例するというエネルギー保存則をあらわしている．(*10. 20*)も簡単な式

$$\psi_n = g^{-\frac{1}{4}}\left\{A_n(s_0)g_0^{\frac{1}{4}} \mp \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s} g^{\frac{1}{4}}\nabla^2\psi_{n-1}ds\right\} \qquad (10.30)$$

であらわされる．

例題 1〕 放物柱による平面波の反射[1]．焦点 O を極とする平面極座標 $(r,\theta)$ を用いれば放物面は

$$r = r_0(\theta) = \frac{2p}{1+\cos\theta} \qquad (10.31)$$

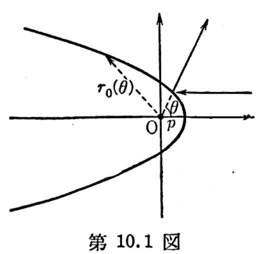
であらわされる．第 10.1 図において軸に平行な射線を持つ平面波

$$\Phi_i = e^{-ikx} \qquad (10.32)$$

が右方から入射したとき，放物面 $r=r_0(\theta)$ 上で

$$e^{-ikx} + \Phi_r(r,\theta) = 0 \qquad (10.33)$$

の条件を満足する反射波 $\Phi_r$ を見いだすこと．



第 10.1 図

このとき射線が焦点 O から外に向かう直線となることは幾何光学から明らかである．したがって波面は O を中心とする円柱面であって，極座標がそのまま利用される．波面の面素片が $r\,d\theta$ となるこ

(1) J. B. Keller, R. M. Lewis, B. D. Seckler: Comm. Pure Appl. Math., 9 (1956), 207.

とに注意すれば ($d\xi_1 = r\,d\theta$)

$$s = r, \quad \sqrt{g} = r \tag{10.34}$$

とおける．また反射波に対しては (10.28) の指数の複号の内 $+iks$ をとったものを用いればよい．(10.28) と (10.33) を見くらべれば $r = r_0(\theta)$ で $x = r_0(\theta)\cos\theta$ を考慮し

$$e^{-ikr_0(\theta)\cos\theta} + A(s_0)e^{ikr_0(\theta)} = 0, \tag{10.35}$$

$A(s_0)$ について解けば，(10.31) を用いて

$$A(s_0) = -\exp\left[-ikr_0(\theta)(1+\cos\theta)\right] = -\exp(-2ikp), \tag{10.36}$$

これを (10.28) に代入すれば反射波の漸近形として

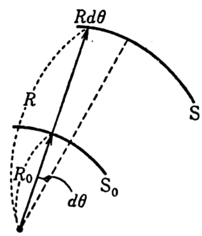
$$\Phi_r = -\sqrt{\frac{p}{r}}\sec\frac{\theta}{2}e^{ik(r-2p)} \tag{10.37}$$

を得る．これは Lamb が求めた厳密解を漸近展開した主項と完全に一致している．

例題 2〕 射線が一点 O から出ていないような場合でも，もちろん取り扱える．特に二次元の場合を考えよう ($d\xi_2 = 0$)．このときは射線に沿う長さ $s$ と，射線の定まった方向との傾き $\theta$ とを独立変数にとればよい．波面の曲率半径 $R(\theta)$，その面素片 $\sqrt{g}\,d\theta$ はそれぞれ

$$R(\theta) = R_0(\theta) \pm s, \quad \sqrt{g}\,d\theta = R(\theta)d\theta \tag{10.38}$$

と書ける．ただし $R_0(\theta)$ は基準の波面 (その上で $s=0$ とする) の曲率半径である．また正負の複号は面の凸凹に従って変わる．たとえば任意の閉曲面 $S_0$ 上で一定の値 1 をとり無限遠 ($s\to\infty$) で 0 に近づく



第 10.2 図

$$(\nabla^2 - |k^2|)\Phi = 0 \tag{10.39}$$

の解は $S_0$ を基準の波面と選び (10.28) で $\pm k \to -|k|$ ($s\to\infty$ での条件)，$A=1$ とおけば

$$\Phi = \sqrt{\frac{R_0(\theta)}{R(\theta)}}e^{-|k|s} \tag{10.40}$$

で近似される．特に実際上問題となる $S_0$ 上での $\Phi$ の外向法線方向の微分は (10.28) を参照し

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)_{s=0} = -|k| \mp \frac{1}{2R(\theta)} \tag{10.41}$$

で与えられる．第一項は曲率 0 の面，すなわち平面の場合の値であり，第二項が面の凸凹による補正である．

以上の例題では，いずれも前に述べた手続を用いて，その近似を高めることも可能であるが，ここではこの程度に止める (前頁脚注および文献〔20〕参照)．

また射線が包絡面を作ったり，陰影ができたりする場所，あるいは物体面が尖っていたりすればその近傍の場については上のような簡単な取り扱いは許されず，今後の研究に待つところが多い．

# 第 3 章　Poincaré-Lighthill-Kuo の方法と境界層の方法

## §1　いとぐち

非線型となると問題はさらに難しくなる．この章ではまず，やや特別な形であるが，最高の微係数の係数が $x+\varepsilon u$ ($x$ が独立変数，$u$ が従属変数) の形をとる場合につき，Lighthill が発展させた方法を主として紹介する．この場合は，特に $\varepsilon\to 0$ となった近似解が一点 $x=0$ の近傍で特異的なふるまいを示すものであり，$x\neq 0$ での近似解がどのようにすれば，$x=0$ の近傍でも一様に成立するかをしらべるのが主な目的となる．この方法は非常に組織的だが，すべての問題に適用できるとは限らぬので，それほど組織的ではないがはるかに適用域の広い境界層の方法を加えてその補いとしたい．両者の特長とする所は，独立変数，時には従属変数を，問題となる場所で適当に拡大，縮小する点にある．これは WKB 法の所でもすでに見たことである．

小さなパラメタ $\varepsilon$ を含んだ微分方程式

$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+u=0 \tag{1.1}$$

を条件 $u(1)=1$ の下に解くことを考えよう．これは $\varepsilon u\, du/dx$ という非線型項を含んだいわゆる非線型の方程式である．これを近似的に解く常用手段は $\varepsilon u\, du/dx$ を他の項に比べて小さいとして一まずこれを無視し，線型化された方程式

$$x\frac{du}{dx}+u=0, \tag{1.2}$$

すなわち

$$\frac{d}{dx}(ux)=0$$

の解

$$u=\frac{c}{x},\qquad \text{境界条件から}\quad c=1 \tag{1.3}$$

を (*1.1*)，あるいは変形して

$$\frac{d}{dx}(ux)=-\varepsilon u\frac{du}{dx} \tag{1.4}$$

の右辺に代入して非同次方程式

$$\frac{d}{dx}(xu)=-\varepsilon\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\varepsilon}{x^3} \tag{1.5}$$

を解く．すなわち

$$u=\frac{1}{x}\left[c-\frac{\varepsilon}{2x^2}\right],\qquad \text{境界条件から}\quad c=1+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

これを (*1.4*) の右辺に代入して逐次に近似を高めていく．

以上の方法をもっと組織的に行なえば次のようになる (§1.1 参照)．$u$ を $\varepsilon$ のベキ級数

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n(x) \tag{1.7}$$

の形に展開できると仮定し，(*1.4*) の右辺に代入して得られる

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\frac{d}{dx}(xu_n)=-\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{n+m}u_n\frac{du_m}{dx} \tag{1.8}$$

の $\varepsilon$ の各ベキを比較して得られる

$$\varepsilon^0:\ \frac{d}{dx}(xu_0)=0, \tag{1.9}$$

$$\varepsilon^1:\ \frac{d}{dx}(xu_1)=-u_0\frac{du_0}{dx}, \tag{1.10}$$

$$\varepsilon^2:\ \frac{d}{dx}(xu_2)=-u_0\frac{du_1}{dx}-u_1\frac{du_0}{dx}=-\frac{d}{dx}(u_0u_1), \tag{1.11}$$

$$\cdots\cdots$$

を境界条件

$$u_0(1)=1,\quad u_n(1)=0\qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{1.12}$$

の下に逐次に解けばよい．(*1.9*) から

$$u_0=\frac{1}{x}. \tag{1.13}$$

これを (*1.10*) に代入し，(*1.12*) を考慮して積分すれば

$$xu_1=\int_1^x\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right), \tag{1.14}$$

すなわち

$$u_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right), \tag{1.15}$$

同様に (*1.13*), (*1.15*) を (*1.11*) に入れて

$$-xu_2(x)=u_0(x)u_1(x)-u_0(1)u_1(1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right), \tag{1.16}$$

すなわち

$$u_2(x)=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right) \tag{1.17}$$

が得られる．

この方法は非常に系統的で原理的にはどれほどでも高い近似が求まるように見える．ところがわれわれの知りたいのが $u(0)$ あるいは $u(0.1)$ であったとする．まず $u(0)$ は無限大という結果を生じる．$u(0.1)$ の方は第三近似までとるとして

$$u \fallingdotseq u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots=10+\frac{1}{2}(10-1000)\varepsilon-\frac{1}{2}(1000-100000)\varepsilon^2+\cdots \tag{1.18}$$

となりεの値がよほど小さくない限り，この級数は発散してしまう．これから見て $u(0)=\infty$ の結果もはたして本当にそうなのか，それとも近似法が悪いためにそうなったのかという疑問が起こる．$x=0$ の近くでは逐次近似を進めるにつれて特異性がますます増加するばかりである．

近似が悪いことは (1.1) の $du/dx$ の係数 $x+\varepsilon u$ に上の近似解を代入してみればわかる．$x\sim 0$ の近傍では確かに $\varepsilon u$ は $x$ に比べて必ずしも小さくなっていない．$x\sim 0$ の近くで $\varepsilon\to 0$ とすれば最高階の微分の係数が消えてしまう事情は WKB 法のときに似ているが，いまの場合は非線型の方程式であり，しかも変数 $x, u$ とパラメタ $\varepsilon$ のすべての値が関係している点で，事情ははるかに複雑である．

ところが (1.1) の厳密解は容易に求まる．$x$ のかわりに $u$ を独立変数にとれば線型の方程式

$$u\frac{dx}{du}+x+\varepsilon u=0 \tag{1.19}$$

となり，書き直して

$$\frac{d}{du}(ux)=-\varepsilon u \tag{1.20}$$

とすれば解は直ちに

$$ux=-\frac{\varepsilon}{2}u^2+c. \tag{1.21}$$

ここで，境界条件 $u(1)=1$ から $c$ は $1+\varepsilon/2$ と定まり

$$x=\frac{1}{u}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{u}-u\right) \tag{1.22}$$

と書ける[(1)].

逆に $u$ を $x$ で表わすには (*1.21*) または (*1.22*) を $u$ に対する二次方程式と見なして解けばよい. $u(1)=1$ に対応して根号正のものをとれば

$$u=\frac{1}{\varepsilon}[-x+\sqrt{x^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}], \tag{1.23}$$

これから $x=0$ のときの $u$ の値 $u(0)$ は

$$u(0)=\frac{\sqrt{2+\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\left[1+\frac{\varepsilon}{4}+O(\varepsilon^2)\right] \tag{1.24}$$

であって, 大きくはあるが有限の値をとる. $1/\sqrt{\varepsilon}$ の形から見ればわかるように, 解を $\varepsilon$ のベキに展開していく方法ではちょっと出せないのが当然である. また (*1.23*) を $\varepsilon$ のベキとして展開するときの収束半径はほぼ $x^2/2$ で, $x$ が 0 に近づけば急速に減少する. 通常の逐次近似法はこの意味で $x$ について一様でない近似法である. このような欠陥のある従来の近似法に何かの改良を加え, すでに見たような見かけの上での解の特異性を避けること, あるいは特異点が存在しているとしても, その影響によって逐次近似の収束が妨げられることのないようにすること, この二つははたして可能であろうか.

さて (*1.22*) で見るように独立変数と従属変数を交換できれば, 確かに困難なく近似を進めることができる. (*1.22*) では第二近似が実は厳密な解を与えている.

だが一般の場合にはこれほどうまくはいかない. そこで考えられるのは独立変数, 従属変数の両者を適当な変数の函数として対等に表現する立場であろう. ただその方法を見つけるのが問題である.

さて単純な摂動計算が逐次近似法を発散させる典型的な例として古くから知られた問題に非線型振動の周期解がある.

具体的な例として非線型微分方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u+\varepsilon u^3=0 \tag{1.25}$$

の周期解を求めることを考えよう. $t$ を時間, $u$ を変位とすればこれは $\omega^2u+\varepsilon u^3$

---

(1) (*1.1*) を

$$x\frac{du}{dx}+u+\varepsilon u\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left(xu+\frac{\varepsilon}{2}u^2\right)=0$$

と書けばもっと直接的に求まるが, ここでは説明の便宜上, 別のやり方をとった.

に比例する復元力を受ける質点の振動(非線型振動)の方程式で，$\varepsilon$ が 0 の場合は周期 $2\pi/\omega$ の線型振動となる．

(*1.25*) で $\varepsilon$ を 0 としたときの解

$$u_0 = a\cos\omega t \qquad (1.26)$$

を第一近似として解を

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots \qquad (1.27)$$

の形に求めれば，$u_1$ に対する方程式は

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + \omega^2 u_1 = -u_0{}^3 = -a^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\right), \qquad (1.28)$$

その解は

$$u_1 = -\frac{3a^3}{8\omega}t\sin\omega t + \frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3\omega t + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \qquad (1.29)$$

となる．ところが $t\sin\omega t$ の項は周期解の条件に反するとともに $t\to\infty$ で解の発散をひきおこす．この事情が近似を進めるほど悪化するのは前の例題と同様である．この項の起因は (*1.28*) の右辺の $\cos\omega t$ の項で，(*1.28*) はいわば左辺 $=0$ であらわされる周期 $2\pi/\omega$ の振動系に同一周期の外力を加える共振の方程式と同型である．この困難を解決するのがよく知られた Poincaré の方法である．その方法を述べる前に，(*1.25*) には幸いに厳密解があるのでそれから求めておこう．(*1.25*) に $du/dt$ を掛け

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\omega^2}{2}u^2 + \frac{\varepsilon}{4}u^4\right] = 0 \qquad (1.30)$$

と書き直し積分すれば，エネルギー積分

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \omega^2u^2 + \frac{\varepsilon}{2}u^4 = 2E = \text{const} \qquad (1.31)$$

を経て ($(du/dt)^2/2$ が運動エネルギー，$\omega^2u^2/2+\varepsilon u^4/4$ が位置エネルギー，$E$ が全エネルギーに当る)，

$$t = \int^u \frac{du}{\sqrt{2E-\omega^2u^2-\varepsilon u^4/2}} = \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\omega^2+\varepsilon A^2(1-\cos^2\theta/2)}} \qquad (1.32)$$

が得られる (第三辺は (*1.33*) の $A$ を用いて $u = A\sin\theta$ とおいたもの)．これは楕円積分で $u$ が $t$ の周期函数であることは明らかであるが，振幅と周期は初等的な考えからも出せる．振幅 $A$ は $|u|$ の最大値，すなわち $du/dt=0$ となる $u$ の値として (*1.31*) から (同じことだが (*1.32*) の分母を 0 とする $u$

の値として),

$$A^2=\frac{1}{\varepsilon}(-\omega^2+\sqrt{\omega^4+4\varepsilon E})=\frac{\omega^2}{\varepsilon}(-1+\sqrt{1+4\varepsilon E/\omega^4}) \tag{1.33}$$

で与えられる.

周期 $T$ は $u$ が 0 から $A, 0, -A$ を経てまた 0 となるまでの時間で, (*1.32*) の被積分函数の対称性から, 0 から $A$ までの時間の四倍, すなわち

$$T=4\int_0^A\frac{du}{\sqrt{2E-\omega^2u^2-\varepsilon u^4/2}}=\frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\varepsilon A^2(1-\cos^2\theta/2)/\omega^2}} \tag{1.34}$$

となる.

$\varepsilon$ が小さいときは (*1.33*), (*1.34*) を $\varepsilon$ のベキに展開して

$$A^2=\frac{2E}{\omega^2}\left[1+O\left(\frac{\varepsilon E}{\omega^4}\right)\right], \tag{1.35}$$

$$T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{\omega}\left[1-\frac{\varepsilon A^2}{\pi\omega^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\cos^2\theta}{2}\right)d\theta+O\left(\frac{\varepsilon^2A^4}{\omega^4}\right)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\left[1-\frac{3\varepsilon A^2}{8\omega^2}+O\left(\frac{\varepsilon^2A^4}{\omega^4}\right)\right] \tag{1.36}$$

が得られる.

(*1.36*) は (*1.26*)～(*1.29*) の手続きの欠陥をよく指摘している. すなわち $\varepsilon A^2/\omega^2$ が小さければ周期は $2\pi/\omega$ で振幅に無関係となり, 解を $2\pi/\omega$ の周期函数で表わそうとする試みは一応妥当のように見える. しかし $t$ が大きくなれば $\Omega$ と $\omega$ の差は僅かでも位相 $\Omega t$ と $\omega t$ の差が非常に大きくなり, とうてい解の近似とはなれない. これが (*1.29*) にあらわれた危険項 $t\sin\omega t$ の意味するところである.

有効な近似法が, (*1.34*) あるいは (*1.36*) であらわされる周期を持つ函数を用いねばならぬことは明らかである. しかし $T$ あるいは $\Omega$ は最初は未知であるので, これを適当な方法で定めていかなくてはならない.

Poincaré の方法は一般に小さなパラメタを持つ連立微分方程式

$$\frac{du^{(i)}}{dt}=X^{(i)}(u^{(1)},\cdots,u^{(i)},\cdots,u^{(m)};\varepsilon)\quad(i=1,2,\cdots,m) \tag{1.37}$$

が $\varepsilon=0$ に対して周期 $T_0$ の簡単な周期解 $u_0^{(i)}$ を持つとき, 解を $u_0^{(i)}$ に始まる $\varepsilon$ のベキ級数

$$u^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n^{(i)} \tag{1.38}$$

に展開するとともに上記の事情を考慮して周期 $T$ を $T_0=2\pi/\omega$ に始まる $\varepsilon$ のベキ級数

$$T=T_0+\varepsilon T_1+\cdots \tag{1.39}$$

に展開し，上述の危険項が消えるように $T_n$ を逐次に定めていく方法である．

やや話が抽象的にすぎるので (*1.25*) を例にとって話を進めよう ((*1.37*) で $m=2$, $u^{(1)}=u$, $u^{(2)}=du/dt$, $X^{(1)}=u^{(2)}$, $X^{(2)}=-\omega^2u^{(1)}-\varepsilon u^{(1)3}$ とかいた場合)．簡単のため (*1.39*) と等価な

$$\frac{2\pi}{T}=\Omega=\omega+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots \tag{1.40}$$

を仮定し，

$$\omega=\Omega-\varepsilon\omega_1-\varepsilon^2\omega_2-\cdots \tag{1.41}$$

を (*1.38*) とともに (*1.25*) に代入し $\varepsilon$ の等ベキの項を 0 とおけば

$$\frac{d^2u_0}{dt^2}+\Omega^2u_0=0, \tag{1.42}$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+\Omega^2u_1=-u_0{}^3+2\omega_1\Omega u_0, \tag{1.43}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が得られる．

(*1.42*) は (*1.25*) の第三項を無視し $\omega$ の代りに $\Omega$ が入っただけだが，(*1.43*) では (*1.28*) の項のほかに $2\omega_1\Omega u_0$ が加わって

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+\Omega^2u_1=\left(-\frac{3}{4}a^3+2\omega_1a\Omega\right)\cos\Omega t-\frac{a^3}{4}\cos3\Omega t \tag{1.44}$$

となっている．共振項 $\cos\Omega t$ はその係数が 0 となるように

$$\omega_1=\frac{3a^2}{8\Omega} \tag{1.45}$$

とかけば確かに消すことができる．これを (*1.40*) に入れれば

$$\Omega=\omega\left[1+\frac{3\varepsilon a^2}{8\omega^2}+O\left(\frac{\varepsilon^2a^4}{\omega^4}\right)\right] \tag{1.46}$$

となり，

$$|A|^2=\max|a\cos\omega t+\varepsilon u_1|^2=a^2\left[1+O\left(\frac{\varepsilon a^2}{\omega^2}\right)\right] \tag{1.47}$$

を考慮すれば (*1.36*) と一致した結果を与える．

さて Poincaré の方法では周期という未知のパラメタの展開によって困難を

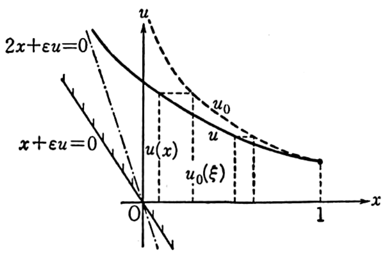
のがれたが，(*1. 1*) ではそういうものは直接存在しない．しかし Poincaré の方法は見方を変えればもっと深い意味を持っていた．

われわれが目的としたのは位相として正しい $\Omega t$ をとることにあるのだから，これを $\Omega t=\omega\cdot\dfrac{\Omega}{\omega}t$ と書けばわかるように独立変数として $t$ でなしに $\tau=\dfrac{\Omega}{\omega}t$ を用いれば，もとの $\omega$ を用いても $\omega\tau$ の形で正しい位相を記述することができる．いいかえれば時間の尺度を（場所によって）変えてやるわけであり，非周期的な場合にも適用される点で，はるかに適用範囲が広く柔軟性に富んでいる．$t$ と $\tau$ の間の関係は

$$t=t(\tau)=\frac{\omega}{\Omega}\tau=\tau-\frac{3\varepsilon a^2}{8\omega^2}\tau+O\left(\frac{\varepsilon^2a^4}{\omega^4}\right)\tau \tag{1.48}$$

であらわされるように逐次近似が進むとともに自動的に求まってくる性質のものであり，ちょうど (*1. 24*) の後で希望した独立変数を助変数であらわす一つの方法を提供している．(*1. 25*) に今の考えを適用することは単に $\Omega t\to\omega\tau$ とかいて (*1. 40*) 以下の式を書き改めればすむことであり，もっと一般的な場合はあとで論じることにして，ここでは (*1. 1*) にもう一度立ちかえってみよう．

第 1.1 図は (*1. 23*) があらわす $x$-$u$ の関係を示す．微分方程式 (*1. 1*) は $x$-$u$ 面の各点における解曲線の接線を与えるものだが，$x+\varepsilon u=0$ の上ではそれが垂直となり ($du/dx\to\infty$)，$2x+\varepsilon u=0$ はこれに近づくすべての解曲線の漸近線になっている．点線で示したのは (*1. 1*) の近似解 (*1. 13*) で，$x=0$ を漸近線として持ち，$x$ が 0 から遠ければよい近似だが，$x$ が 0 に近づくにつれてずれは大きくなってくる．



第 1.1 図

だが $u_0$ は全然無用のわけではない．図で示したようにこれを別な変数 $\xi$ の函数と考え，$\xi$ と $x$ との間の変換を求めてやりさえすれば正しい解を $u(x)=u_0(\xi)$ として見いだすことができる．また逐次近似の発散もおこるはずがない．図では横軸を引きのばして書いてあるが，$x$ と $\xi$ の差は一般に小さく，$\varepsilon$ の程度であり，0 から離れれば消滅する性格のものである．このように，見かけ上の特異性があらわれるような場所でも，独立変数を変える座標のひきのばしによっ

て粗い近似が生かされ，かつ精密となって，全域で一様な近似が得られることとなる．

前おきはこのくらいにして，$x$ と $\xi$ との対応関係を，(*1.40*) や (*1.48*) 同様近似が進むとともに精密化するように

$$x = x(\xi) = \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \cdots \tag{1.49}$$

と表わそう．簡単のために $x=1$ で $x$ と $\xi$ が一致するように定めておけば

$$x_1(1) = x_2(1) = \cdots = 0 \tag{1.50}$$

となる．

さて $\xi$ を独立変数として (*1.1*) すなわち (*1.4*) を

$$\frac{d}{d\xi}(xu) = -\varepsilon u \frac{du}{d\xi} \tag{1.51}$$

と書き

$$u = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \cdots \tag{1.52}$$

と (*1.49*) を (*1.51*) に代入して $\varepsilon$ の等ベキの項を等置すれば

$$\frac{d}{d\xi}(\xi u_0) = 0, \tag{1.53}$$

$$\frac{d}{d\xi}(\xi u_1) = -u_0 \frac{du_0}{d\xi} - \frac{d}{d\xi}(x_1 u_0), \tag{1.54}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

を得る．境界条件は

$$u_0(1) = 1, \quad u_n(1) = 0, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{1.55}$$

である．

(*1.53*) と (*1.55*) から

$$u_0(\xi) = \frac{1}{\xi} \tag{1.56}$$

となるが，これを (*1.54*) に代入した

$$\frac{d}{d\xi}(\xi u_1) = \frac{1}{\xi^3} - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_1}{\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{1}{2\xi^2} - \frac{x_1}{\xi}\right), \tag{1.57}$$

あるいは (*1.55*) を考慮してから $\xi$ まで積分した

$$\xi u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) - \frac{x_1}{\xi} \tag{1.58}$$

は $x_1$ の項だけ (*1.15*) と異なっている．$x_1$ は適当に選べばよいが，今の場合

は(*1.58*)の右辺が完全に 0 となるように

$$x_1=\frac{\xi}{2}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right) \tag{1.59}$$

とえらべば $u_1\equiv 0$, さらに $x_2$ 以下を 0 に選べば(*1.54*)や(*1.11*)の後の $u_2$ 以下に対する式で $u_2$ 以下は完全に 0 となり, $u_0(\xi)$ だけで精密な値が得られることとなる. (*1.52*), (*1.49*) に以上の結果を代入した

$$u=\frac{1}{\xi}, \tag{1.60}$$

$$x=\xi+\frac{\varepsilon\xi}{2}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right) \tag{1.61}$$

は確かに(*1.22*)と一致し, (*1.1*)の厳密解を与える. いまの場合(*1.58*)の右辺が完全に 0 となるように $x_1$ を選んだが, 一般の場合には非線型振動のときと同様, 危険項 $1/\xi^2$ が消えるように $x_1$ を選べば, 厳密解ではないが, 少なくとも全領域で一様によい近似が得られるはずである.

以上の方法は一般に偏微分方程式にも拡張ができる. 要するに線型化された方程式にあらわれる見掛けの特異点(たとえば $x=0$, $y=0$)の近くで座標変換 $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ を行なってやればよい. そのような座標変換は近似解 $u_0(\xi,\eta)$ が正確な解 $u(x,y)$ になるたけ近いようにすれば, 自然に求まってくる. すなわち

$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi,\eta)+\cdots, \tag{1.62}$$

$$y=\eta+\varepsilon y_1(\xi,\eta)+\cdots, \tag{1.63}$$

$$u=u_0(\xi,\eta)+\varepsilon u_1(\xi,\eta)+\cdots \tag{1.64}$$

の形の展開を用い, $\varepsilon u_1$ 以下が全変域でなるたけ小さくなるように $x_1, y_1$ を定めることである. $u_1$ に対する方程式の $x, y=0$ の近くの特異性が $u_0$ に対するものより強くなることは避けることができるし, また $u_1$ に対する方程式でその原因となる項が消えるようにすれば, $x$, $y$ に対する方程式を経て, それが $x_1$, $y_1$ を決定する手がかりとなるわけである.

Lighthill は以上の方法を, 線型化された方程式がもとの微分方程式と同一階数の場合に適用したが, Kuo はさらに第一近似の方程式がすでに非線型で, 階数が原方程式より低い場合の例として平板を過ぎる粘性流の境界層近似の精密化に適用して成功を収めた. Kuo と同じ中国人である Tsien は Poincaré,

Lighthill, Kuo の頭文字をとって以上の方法を PLK 法と名づけているが，人によりその呼び方はまちまちで，欧米では Lighthill の方法 (Lighthill-technique) と呼ぶことが多い．

ただこの方法はまだ実際家の手にあるもので，その収束性その他の厳密な理論は未だ不完全な点が多い．わずかに §2～§6 にあげられた特別な例題について Wasow の行なった証明があるくらいのもので，この点数学者の力に将来負う所が大きいと考えられる．以下の各節では特殊な例題につき解法の技術を主とし，収束性等の証明はほとんど省略して方針だけ述べることにする．

## §2 常微分方程式 $(x+\varepsilon u)u'+q(x)u-r(x)=0$

Lighthill の最初にあげた例題

$$L[u]=(x+\varepsilon u)u'+q(x)u=r(x) \tag{2.1}$$

から考察を始めよう．$q(x)$, $r(x)$ は問題の領域で正則とする．この方程式はもっと一般的に，$x=x_0$ に零点を持つ函数を $f(x)$ とするとき

$$[f(x)+\varepsilon u]u'+q(x)u=r(x) \tag{2.2}$$

の典型的な場合であり，$\varepsilon=0$, $x=0$ において最高階の微係数 $u'$ の係数が 0 になる特長を有する．

(2.1) を，境界条件たとえば

$$x=1 \quad \text{で} \quad u=a \tag{2.3}$$

のもとに解くことを考えよう．これは $x$-$u$ 平面でいえば $(1,a)$ を通る解曲線を見いだすことにほかならない．

前章の処方に従い，変数変換

$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2 x_2(\xi)+\cdots, \tag{2.4}$$

$$u=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2 u_2(\xi)+\cdots \tag{2.5}$$

を行なえば (2.1) は $u'=du/dx=(du/d\xi)/(dx/d\xi)$ を考慮し

$$(x+\varepsilon u)\dot{u}+\{q(x)u-r(x)\}\dot{x}=0 \tag{2.6}$$

と書ける．ここに $\dot{}$ は $\xi$ についての微分を意味する．

$\{q(x)u-r(x)\}\dot{x}$ を (2.4), (2.5) を考慮して $x=\xi$ のまわりで展開すれば

$$\{q(x)u-r(x)\}\dot{x}=\{qu+(x-\xi)\dot{q}u-r-(x-\xi)\dot{r}\}\dot{x}+F(x,u,\dot{x},\xi), \tag{2.7}$$

$$F(x,u,\dot{x},\xi)=\left[\left\{\frac{1}{2}(x-\xi)^2\ddot{q}+\cdots\right\}\{u_0+\varepsilon u_1+\cdots\}-\left\{\frac{1}{2}(x-\xi)^2\ddot{r}+\cdots\right\}\right]\dot{x}$$

$$=\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s h_s(x_1, x_2, \cdots, x_{s-1}; \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_{s-1}; u_0, \cdots, u_{s-1}; \xi), \tag{2.8}$$

$$h_s=\sum A_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\mu;\beta;\gamma}(\xi)x_1^{\alpha_1}\cdots x_\mu^{\alpha_\mu}\dot{x}_\nu^\beta u_\rho^\gamma, \tag{2.9}$$

ただし

$$\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+\mu\alpha_\mu+\nu\beta+\rho\gamma=s, \qquad \beta=0,1;\ \gamma=0,1 \tag{2.10}$$

の形に書ける．ここで $q_1, \dot{q}_1, r_1, \dot{r}_1$ などはそれぞれ $q_1(\xi), \dot{q}_1(\xi), r_1(\xi), \dot{r}_1(\xi)$ などを意味する．(2.7) と (2.8) を (2.6) に代入し (2.4), (2.5) を考慮して $\varepsilon$ のベキの等しいものを等置すれば

$$L_0[u_0]\equiv\xi\dot{u}_0+qu_0-r=0, \tag{2.11}$$

$$L_1[u_1, x_1]\equiv\xi\dot{u}_1+qu_1+(qu_0-r)\dot{x}_1+(\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_1+u_0\dot{u}_0=0, \tag{2.12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$L_s[u_s, x_s]\equiv\xi\dot{u}_s+qu_s+(qu_0-r)\dot{x}_s+(\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_s+R_s=0, \tag{2.13}$$

ただし

$$R_s=\sum_{\substack{\mu+\nu=s\\ \mu,\nu>0}}x_\mu\dot{x}_\nu+\sum_{\mu+\nu=s-1}u_\mu\dot{u}_\nu+q\sum_{\substack{\mu+\nu=s\\ \mu,\nu>0}}\dot{x}_\mu u_\nu+\dot{q}\sum_{\substack{\mu+\nu+\rho=s\\ \mu,\nu>0}}x_\mu\dot{x}_\nu u_\rho+h_s \tag{2.14}$$

が得られる．境界条件 (2.3) は

$$u_0(1)=a, \quad u_s(1)=0, \quad x_s(1)=0, \quad s=1,2,\cdots \tag{2.15}$$

ととれば満足される．最後の条件は $\xi=1$ で $x=\xi$ となるように $\xi$ を選ぶことにほかならない．

問題は (2.15) の境界条件の下に (2.11) の解 $u_0$ から出発して (2.11), (2.12), … を逐次的に解くことに帰着する．ただし (2.12) 以下では $(u_1, x_1), (u_2, x_2), \cdots$ の二つずつが未知函数となっているので

$$L_s[x_s, u_s]\equiv L_s^{(0)}[u_s]+L^{(1)}[x_s]=0 \tag{2.16}$$

と書き，

$$L_s^{(0)}[u_s]\equiv\xi\dot{u}_s+qu_s+R_s^{(0)}=0, \qquad s=1,2,\cdots, \tag{2.17}$$

$$L_s^{(1)}[x_s]\equiv(qu_0-r)\dot{x}_s+(\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_s+R_s^{(1)}=0 \tag{2.18}$$

の二つに分けよう．ここで $R_s^{(0)}$ と $R_s^{(1)}$ とは

$$R_s^{(0)}+R_s^{(1)}\equiv R_s \tag{2.19}$$

を満足すれば全く任意に選ぶことができ，われわれには無数の選択の自由が許される．ただできることなら $R_s^{(0)}\equiv 0$ と選ぶのが好都合である．こうすれば

(2. 15) から $u_s \equiv 0, s=1,2,\cdots$ となり $u_0$ だけで $u$ を表わすことができる上に，収束性などがわかりやすくなるからである．だが問題によっては $R_s^{(0)} \equiv 0$を正確に解くことが難しいことがある．そのときは以上の柔軟性を利用して，最も問題に適した $R_s$ の分け方をとればよい．選択は全くわれわれの任意である．

さて (2. 11) は

$$\frac{d}{d\xi}\left\{u_0(\xi)\exp\int\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi\right\}=\frac{r}{\xi}\exp\int\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi \tag{2.20}$$

の形に書き直せば容易に積分ができる．$q(0)=q_0$, $r(0)=r_0$ と書こう．$q(\xi)$, $r(\xi)$ が $\xi=0$ で正則だから

$$\exp\int\frac{-q(\xi)}{\xi}d\xi=\exp\left[-q_0\log\xi-q_0{}'\xi+\cdots\right]=\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi) \tag{2.21}$$

と書ける．ここに $\tilde{p}(\xi)$ は $|\xi|\leqq 1$ で正則で 0 とならぬ $\xi$ の函数である．

(2. 21) を (2. 20) に代入し，(2. 15) を考慮して積分を実行すれば

$$u_0(\xi)=a\xi^{-q_0}\frac{\tilde{p}(\xi)}{\tilde{p}(1)}+\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int_1^{\xi}\frac{r(\eta)}{\tilde{p}(\eta)}\eta^{q_0-1}d\eta. \tag{2.22}$$

したがって $q_0$ が 0 または負の整数でなければ $|\xi|\leqq 1$ で正則な函数 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ を用いて $u_0(\xi)$ は

$$u_0(\xi)=\xi^{-q_0}P_1(\xi)+P_2(\xi)\to A\xi^{-q_0}+B \qquad (\xi\to 0) \tag{2.23}$$

の形にあらわされる．一方 $q_0$ が $0, -1, -2, \cdots$ の 0 または負の整数値をとれば (2. 22) の後の積分から $\log\xi$ に比例する項 ($r/\tilde{p}$ が含む $\eta^{|q_0|}$ に比例する項) があらわれ (2. 23) は

$$u_0(\xi)=\xi^{-q_0}[P_1(\xi)+\tilde{P}_1(\xi)\log\xi]+P_2(\xi)\to A\xi^{-q_0}\log\xi+B \ (\xi\to 0) \tag{2.24}$$

の形をとる．(2. 14) から

$$R_1=R_1^{(0)}+R_1^{(1)}=u_0\dot{u}_0 \tag{2.25}$$

で，$u_1$ に対する問題は (2. 17), (2. 18) で $s=1$ とおいた

$$\xi\dot{u}_1+qu_1=-R_1^{(0)}, \tag{2.26}$$

$$(qu_0-r)\dot{x}_1+(\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_1=-R_1^{(1)} \tag{2.27}$$

を $u_1(1)=0$, $x_1(1)=0$ の条件の下に解くことになる．ふつうの摂動法では $x_1\equiv 0$ で $-R^{(1)}=0$, $-R_1^{(0)}=-u_0\dot{u}_0$ となり，そのときの解 $\tilde{u}_1(\xi)$ は (2. 26), (2. 22) で $r$ として $-u_0\dot{u}_0$ をおきかえ (2. 20), (2. 21), (2. 15) を参照すれば

$$\tilde{u}_1(\xi) = -\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int_1^{\xi}\frac{u_0(\eta)\dot{u}_0(\eta)}{\tilde{p}(\eta)}\eta^{q_0-1}d\eta \tag{2.28}$$

と書ける．(2.23), (2.24) から $q_0$ が 0 または負の整数でなければ $\xi\to 0$ で

$$\tilde{u}_1(\xi) = O[u_0(\xi)\dot{u}_0(\xi)] \to O(\xi^{-2q_0-1})+O(\xi^{-q_0-1})+O(1), \tag{2.29}$$

$q_0=0, -1, -2, \cdots$ のときは

$$\tilde{u}_1(\xi) = O(\xi^{-q_0-1}\log\xi)+O(1) \tag{2.30}$$

となる．

以上を見ればわかるように，$q_0$ の符号や整数性などに応じて特異性のあらわれ方が異なる．すなわち $q_0>0$ であれば (2.23) の第一項が示すようにすでに $\tilde{u}_0(\xi)$ が $\xi\to 0$ で発散するが，その傾向は $\tilde{u}_1$ でさらに増大され，逐次近似を重ねるごとに特異性が $\xi^{-2q_0-1}/\xi^{-q_0}=\xi^{-q_0-1}$ 倍されていくことが予想される．

また $q_0<0$ なら $\tilde{u}_0(\xi)$ は一応有限であるが (2.29) の第二項が示唆するように，逐次近似の度毎に $\xi^{-1}$ の因子が乗じられ，いつかは $\tilde{u}_n(\xi)$ が $\xi\to 0$ で無限大となってしまうことが予想される．

また逐次近似の収束半径も $\xi\to 0$ では前者では $\xi^{q_0+1}$，後者では $\xi$ に比例して縮少し，展開の非一様性を示す．

以上のことを考慮に入れ，以下の数節では $q_0>0$, $q_0=0$, $q_0\leqq -1$, $0>q_0>-1$ の場合を別々に調べてみることにしよう．

## §3　$q_0>0$ の場合

$q_0>0$ のときは (2.29) の $\xi\to 0$ での発散の原因が，$R_1^{(1)}\equiv 0$ とし $R_1^{(0)}$ を (2.23) が示すように $\xi\to 0$ で発散する

$$R_1 = -q_0A^2\xi^{-2q_0-1}Q_1^{(1)}(\xi)+\xi^{-2q_0}Q_1^{(0)}(\xi),\quad Q_1^{(1)}(0)=1 \tag{3.1}$$

とそのまま等置したのによることは明らかである．ここで $Q_1^{(0)}(\xi)$, $Q_1^{(1)}(\xi)$ は (2.23) の示すように $\xi^{q_0}$ の多項式でその係数は $\xi$ の正則な函数である．これを避けて $u_1$ を少くとも $u_0=O(\xi^{-q_0})$ に対し $\xi^{-q_0}$ 倍された $O(\xi^{-2q_0})$ と同程度に保つためには，最も危険な第一項を $R_1^{(1)}$ に引き受けさせねばならない．($R_1^{(0)}\equiv 0$, $R_1^{(1)}\equiv R_1$ ととれば $u_1\equiv 0$ となり最も好都合だが，ここでは一番悪い条件の下で話を進めよう．) これから (2.26), (2.27) は

$$\xi\dot{u}_1+qu_1 = -\xi^{-2q_0}Q_1^{(0)}(\xi), \tag{3.2}$$

$$(qu_0-r)\dot{x}_1+(\dot{u}_0+\dot{q}u_0-\dot{r})x_1 = q_0A^2\xi^{-2q_0-1}Q_1^{(1)}(\xi) \tag{3.3}$$

となる．

$(3.2)$ の解は $(2.28)$ で $u_0\dot{u}_0$ を $-\eta^{-2q_0}Q_1^{(0)}(\eta)$ でおきかえた

$$u_1(\xi)=-\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int_1^{\xi}\frac{Q_1^{(0)}(\eta)}{\tilde{p}(\eta)}\eta^{-q_0-1}d\eta \qquad (3.4)$$

で，確かに $\xi\to0$ で $O(\xi^{-2q_0})$ となる．一方 $(3.3)$ は $0<\xi<1$ で

$$qu_0-r\neq0 \qquad (3.5)$$

の条件が満足されれば $\xi=0$ 以外で正則で，$\xi\to0$ の近くでは $(2.23)$, $(3.1)$ を考慮すれば

$$(q_0A\xi^{-q_0}+\cdots)\dot{x}_1-(q_0A\xi^{-q_0-1}+\cdots)x_1=q_0A^2\xi^{-2q_0-1}+\cdots \qquad (3.6)$$

の形をとる．したがって $\xi\to0$ で $x_1=B\xi^{-q_0}+\cdots$ とおいて $B$ を定めればわかるように，$x_1$ は

$$x_1(\xi)\to-A\xi^{-q_0}/(q_0+1) \qquad (3.7)$$

の形をとり，$0\leqq\xi\leqq1$ で

$$x_1(\xi)=\xi^{-q_0}X_1(\xi) \qquad (3.8)$$

によってあらわされる．ここに $X_1(\xi)$ は $\xi$ と $\xi^{q_0}$ について正則な函数である．

以上のことから $\xi\to0$ で $u_s(\xi)$ を $O(\xi^{-(s+1)q_0})$ に止めるためには $(2.18)$ の $R_s^{(1)}$ がいつも最も危険な項を引き受けねばならず，したがって $x_s$ は $\xi\to0$ で特異性を持ち，しかもその特異性は $\xi^{-q_0}$ ずつ上昇して一般に $x_s\to O(\xi^{-sq_0})$ となることが $(3.8)$, $(2.13)$, $(2.14)$ などから予想される．

これを数学的帰納法で確かめてみよう．$s=1$ のときは $(3.8)$ でいえているから，あとは $s$ が $n-1$ までの $x_s, u_s$ に対する上の見積りが正しいとして，$s$ が $n$ のときの見積りを行なおう．このとき $(2.14)$, $(2.9)$ から $R_n$ が

$$R_n=\xi^{-(n+1)q_0-1}Q_n^{(1)}(\xi)+\xi^{-(n+1)q_0}Q_n^{(0)}(\xi) \qquad (3.9)$$

であらわされることがわかる．$Q_n^{(1)}(\xi)$, $Q_n^{(0)}(\xi)$ は $\xi^{q_0}$ と $\xi$ につき正則である．$R_n$ を上の二つに分け，第一項を $R_n^{(1)}$ とし，$(2.18)$ で $s=n$ としたものの中に代入してやれば $(3.3)$ から $x_1$ が出たのと全く同様に（主項が同一で），$\xi\to0$ で $x_n=O(\xi^{-(n+1)q_0-1+q_0+1})=O(\xi^{-nq_0})$ が得られる．また第二項を $R_n^{(0)}$ とし $(2.17)$ で $s=n$ としたものの中に代入すれば $(3.2)$ から $(3.4)$ が出たのと全く同様にして $u_n$ が $O(\xi^{-(n+1)q_0})$ となることが結論できる．これは $x_n, u_n$ に対して始めに述べた評価と一致しており，推論が確かめられたこととなる．

以上の処方を行なった結果 $\xi\to 0$ で

$$u_s(\xi)=O(\xi^{-(s+1)q_0}), \tag{3.10}$$

$$x_s(\xi)=O(\xi^{-sq_0}) \tag{3.11}$$

となったが，これは (2.29) の下で予想した従来の摂動法による値 $u_s(\xi)=O(\xi^{-(s+1)(q_0+1)+1})$ に比べれば，ちょっと見たところではわずかなようだが，かなりの改良になっているはずである．

たとえば最も危険であった点 $x=0$ の近くを考えてみよう．$\varepsilon$ が十分小さいとき，$x$ は $x=0$ の近くで (3.7), (3.11) により

$$x=\xi+\varepsilon\left(-\frac{A\xi^{-q_0}}{q_0+1}+\cdots\right)+\varepsilon^2O(\xi^{-2q_0})+\varepsilon^3O(\xi^{-3q_0})+\cdots \tag{3.12}$$

によってあらわされる．$x=0$ とおいてこれを $\xi$ について解けば

$$\xi=B\varepsilon^{\frac{1}{q_0+1}}[1+O(\varepsilon^{\frac{1}{q_0+1}})],\qquad B=\left(\frac{A}{q_0+1}\right)^{\frac{1}{q_0+1}} \tag{3.13}$$

が得られる．したがって (3.10), (3.11) はそれぞれ $x=0$ の近傍で

$$\varepsilon^s u_s=\varepsilon^s O[\varepsilon^{-\frac{q_0}{q_0+1}(1+s)}]=\varepsilon^{-\frac{q_0}{q_0+1}}O[(\varepsilon^{\frac{1}{q_0+1}})^s], \tag{3.14}$$

$$\varepsilon^s x_s=\varepsilon^s O[\varepsilon^{-\frac{q_0}{q_0+1}s}]=O[(\varepsilon^{\frac{1}{q_0+1}})^s] \tag{3.15}$$

を与え，$1/(q_0+1)>0$ を考慮すれば (2.4), (2.5) が $\varepsilon$ を十分小さくとれば $x=0$ においても収束することを示す．また $u(0)$ が $O(1)$ ではなく，$O(\varepsilon^{-\frac{q_0}{q_0+1}})$ であることも特記すべきであろう．したがって $u_0=O(1)\times b$ と考えて $b$ を求めようとする従来の近似法が $b\to\infty$ という結論を導いたのは当然の結果といえよう．

$\varepsilon$ が小さいときの最も粗い近似としては

$$u=u_0(\xi) \tag{3.16}$$

をとり，$\xi$ としては (3.12) の第二項までをとれば $x=0$ の近くまで一様によい近似が得られる．ところで (3.12) は解のパラメタ表示であり，したがってそれらの与える $\xi$，したがって $u$ は $x$ の多価函数となる．われわれの場合にはもちろん $x=1$ が $\xi=1$ と一致するような根を選んでやればよい．

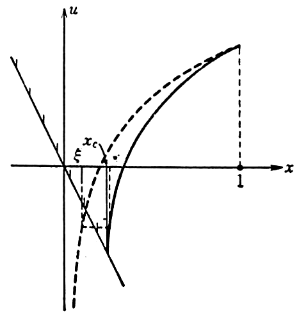
そのような多価性をひきおこす分岐点 $\xi_c$ およびそれに対応する $x_c$ は，(3.12) で $dx/d\xi=0$ とおけば得られる．すなわち

$$\xi_c \doteqdot \left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1}\right)^{\frac{1}{q_0+1}}, \quad x_c \doteqdot \left(1+\frac{1}{q_0}\right)\left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1}\right)^{\frac{1}{q_0+1}} \tag{3.17}$$

がそれである．これが近似法によってあらわれる人工的な特異性ではなく，原方程式 (2.1) に始めから存在する特異性であることは，(3.17) の $x_c$ と (2.23) から出るその点での $u$ の値に対し

$$x_c+\varepsilon u_c \doteqdot \left(1+\frac{1}{q_0}\right)\left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1}\right)^{\frac{1}{q_0+1}}+\varepsilon A\left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1}\right)^{\frac{-q_0}{q_0+1}}=0 \tag{3.18}$$

が成立し，(2.1) の $du/dx$ の係数が 0 となることからもうかがえる．このような場合も扱えるのがこの方法の特長である．なお $A$ の値が負ならば，(3.17) によって分岐点が $x$ の実数値で 0 と 1 の間にあらわれる．第 1.1 図は $A>0$ の場合に相当していたが，$A<0$ の場合は第 3.1 図の通りで，$x=x_c$, $u=u(x_c)$ で解が止まってしまいそれから先へは延長できない．$x_c<x<1$ では (3.12) であらわされる $x$ と $\xi$ との対応によって $u_0(\xi)$ を $u(x)$ のよい近似とすることが可能となる．もちろん複素変数にまで考えを拡張すれば(2.4)，(2.5) はともに $x=0$ の近くまで使える (適当な Riemann 面上で)．



第 3.1 図

$A>0$ であれば分岐点は $x$ の 0 と 1 との間には存在せず (一般には複素数)，$u$ は $x$ の負の実数値に対しても $x$ に対する級数 (2.4) が収束する限りは正則である．

## §4　$q_0=0$ の場合

簡単のために $\xi\to 0$ の近傍での簡単な議論ですませよう．(2.22)，(2.24) から $u_0(\xi)$ は $\xi\to 0$ で

$$u_0(\xi)=r_0\log\xi+B+O(\xi\log\xi) \tag{4.1}$$

と書ける．ここで (2.24) の $A$ は (2.22) から $r_0=r(0)$ で与えられる．したがって $R_1=u_0\dot{u}_0$ は

$$R_1=\frac{r_0}{\xi}(r_0\log\xi+B)+O((\log\xi)^2) \tag{4.2}$$

となる．第一項を $R_1^{(1)}$ に含ませれば $\xi\to 0$ で (2.27) は

$$[-r_0+O(\xi \log \xi)]\dot{x}_1+\left[\frac{r_0}{\xi}+O(\log \xi)\right]x_1=-\frac{r_0}{\xi}(r_0 \log \xi+B) \qquad (4.3)$$

と書ける．$-r_0\xi$ で割って小さい項を無視し

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_1}{\xi}\right)=\frac{1}{\xi^2}(r_0 \log \xi+A) \qquad (4.4)$$

と書き変えれば

$$x_1=-r_0 \log \xi-(r_0+A), \qquad (4.5)$$

また $u_1$ は (2.26) の右辺が $O((\log \xi)^2)$ であることから，$q_0=0$ を考慮すれば $\xi\to 0$ で

$$u_1=O\left(\int^{\xi}\frac{(\log \xi)^2}{\xi}d\xi\right)=O((\log \xi)^3) \qquad (4.6)$$

である．$q>0$ のときと同様に，$u_s$ を $O((\log \xi)^{2s+1})$ の程度に保つためには $R_s^{(1)}$ が最も危険な項を引き受けねばならず，$x_s$ は $O((\log \xi)^{2s-1})$ となることが結論される．

また (2.4), (4.5) を用いて

$$x=\xi-\varepsilon\{[r_0 \log \xi+r_0+A]+O(\xi)\}+O\{\varepsilon^2(\log \xi)^3\} \qquad (4.7)$$

と書けば，$x=0$ は

$$\xi \fallingdotseq r_0\varepsilon(\log \varepsilon+\text{定数}) \qquad (4.8)$$

で与えられ，級数 (2.4), (2.5) が $x=0$ の近傍で収束することがわかる．

## §5 $q_0 \leqq -1$ の場合

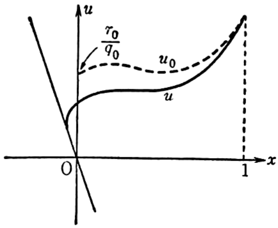
一般に $q_0<0$ の場合 (2.22) から $\xi\to 0$ で ($q_0$ が負整数のときを除き)，

$$\lim_{\xi\to 0} u_0(\xi)=\lim_{\xi\to 0}\xi^{-q_0}r(0)\frac{\xi^{q_0}+O(\xi)}{q(0)}=\frac{r_0}{q_0}+O(\xi^{-q_0})+O(\xi), \qquad (5.1)$$

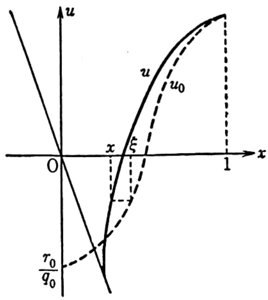
$$\lim_{\xi\to 0} \dot{u}_0(\xi)=O(\xi^{-q_0-1})+O(1) \qquad (5.2)$$

となり，$u_0(0)$ は有限な値をとるが，$q_0<-1$ と $-1\leqq q_0<0$ とでは $\dot{u}_0$ の性質が非常に異なることがわかる．いつものように $x$-$u$ 面でこれを示せば第 5.1～5.4 図のようになる．

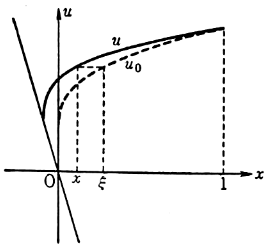
すべての $u_0$ は $(0, r_0/q_0)$ を通過する ($u_0$ に対する式の節点)．$-1\leqq q_0<0$ では $x=0$ における勾配が無限大である．一方 $q_0<-1$ だと勾配は有限となってしまい，$u_0$ と $u$ との間の対応をつけることが $x=0$ の近くで困難なことは図からも容易に見てとれる．



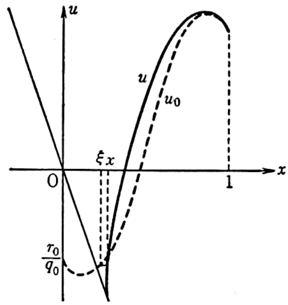

第 5.1 図　$q_0<-1,\ r_0<0$




第 5.2 図　$q_0<-1,\ r_0>0$

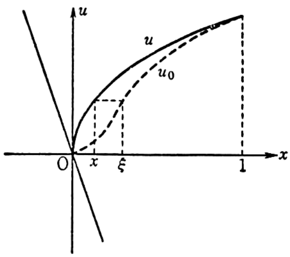



第 5.3 図　$-1\leqq q_0<0,\ r_0<0$

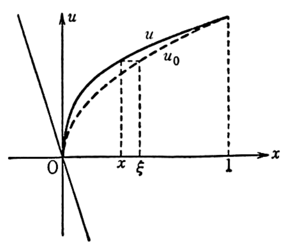



第 5.4 図　$-1\leqq q_0<0,\ r_0>0$

$u_0$ と $u$ とをもっと近づけ近似法の見とおしをよくするには第 5.5~5.6 図のように，$r_0$ が 0 となり $u_0(\xi)$ も $u(x)$ もともに原点を通るように，$u$ と $x$ とをあらかじめ定数だけずらしておくことができれば便利である．




第 5.5 図　$q_0<-1,\ r_0=0$




第 5.6 図　$-1\leqq q_0<0,\ r_0=0$

まず $q_0<-1$ の場合から考えよう．

*(5.1)*, *(5.2)*, *(2.28)* から，*(2.25)* が $\xi\to 0$ で

$$R_1=u_0\dot{u}_0=O(\xi^{-q_0-1})+O(\xi^{-q_0})+O(1) \tag{5.3}$$

であらわされることに注意し $R_1^{(1)}$ に第一項を含めてやれば，$\xi\to 0$ で *(2.27)*

は，(5.1)，(5.2) を考慮して

$$(qu_0-r)\dot{x}_1+\left[\{O(\xi^{-q_0-1})+O(1)\}+\dot{q}(0)\left\{\frac{r_0}{q_0}+O(\xi^{-q_0})+O(\xi)\right\}-O(1)\right]x_1$$
$$=O(\xi^{-q_0-1}) \quad (5.4)$$

と書ける．$x_1$ として定数をとれば両辺の $O(\xi^{-q_0-1})$ を等しくすることができ，$R_1^{(0)}$ の中の最も危険な項 $O(\xi^{-q_0-1})$ の除去が簡単に実行されることがわかる．同様にしてすべての $x_n$ を定数ととることができる．

以上のことから，前以て $\varepsilon$ に依存する適当な定数 $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)$ をえらび，$x, u$ の代りにそれを $\alpha, \beta$ だけずらした

$$x=\xi+\alpha(\varepsilon), \quad (5.5)$$
$$u(x)=v(\xi)+\beta(\varepsilon)$$

で定まる $\xi, v$ を独立変数にとろう．ただし $\xi$-$v$ 面で $\xi=0$, $v=0$ が (1.1) の特異点で，すべての解曲線がここを通過するようにしよう．それには (5.5) を (2.1) に代入して得られる

$$\frac{dv}{d\xi}=\frac{r(\xi+\alpha)-q(\xi+\alpha)(v+\beta)}{\xi+\alpha+\varepsilon v+\varepsilon\beta} \quad (5.6)$$

の右辺の分母，分子が $v\to 0$, $\xi\to 0$ に対してともに 0 となる必要がある．すなわち

$$\alpha+\varepsilon\beta=0, \quad r(\alpha)-\beta q(\alpha)=0, \quad (5.7)$$

あるいは第一式から得られる $\beta$ を第二式に代入し，$q, r$ が原点で正則とすれば

$$\alpha=-\varepsilon\beta=-\varepsilon\frac{r(\alpha)}{q(\alpha)}=-\varepsilon\left\{\frac{r_0}{q_0}+\alpha\left(\frac{r}{q}\right)'_{\alpha=0}+O(\alpha^2)\right\} \quad (5.8)$$

が得られる．これから $\alpha=O(\varepsilon)$ であることがすぐわかり，第一近似として $\alpha=-\varepsilon(r_0/q_0)$，これを右辺に代入して

$$\alpha=-\frac{r_0}{q_0}\varepsilon-\frac{r_0(r_0q_0'-r_0'q_0)}{q_0^3}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3) \quad (5.9)$$

を得る．$\beta$ はこれを $-\varepsilon$ で割れば求まる．このようにして定まった $\alpha, \beta$ に対して (5.6) は (5.7) から

$$(\xi+\varepsilon v)\frac{dv}{d\xi}+q(\xi)v=r(\xi), \qquad r(0)=0 \quad (5.10)$$

の形に変わる．(5.10) の $q, r$ は始めの $q, r$ とは異なるが，$\xi=0$ における $q$ の値は始めの $q$ の値と $O(\alpha)=O(\varepsilon)$ だけ異なるだけである．あとは従来の逐

次近似法で片づくはずである．すなわち，$v$ を

$$v(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n v_n(\xi) \tag{5.11}$$

とおき (5.10) に入れて，等べキの項を比較すれば (2.11)〜(2.13) で $u_n\to v_n$, $x=0$ とおいたものが逐次近似の各項を与え，その積分形は (2.20), (2.28) 等を参照すれば $v_0$ および $v_n$ $(n=1,2,\cdots)$ に対しそれぞれ

$$\frac{d}{d\xi}\left\{v_n(\xi)\exp\int^{\xi}\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi\right\}=\left\{\begin{matrix} r/\xi \\ -\sum_{m=0}^{n-1}v_{n-m-1}\,v_m/\xi\end{matrix}\right\}\exp\int^{\xi}\frac{q(\xi)}{\xi}d\xi \tag{5.12}$$

を与える．これから (2.21) を参照して

$$v_0(\xi)=\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int^{\xi}\frac{r}{\xi}\xi^{q_0}/\tilde{p}(\xi)d\xi=O(\xi)+\begin{cases}O(\xi^{-q_0}), & q_0\neq -1,\ -2,\ \cdots,\\ O(\xi^{-q_0}\log\xi), & q_0=-1,\ -2,\ \cdots\end{cases} \tag{5.13}$$

が得られ，さらに数学的帰納法によって

$$v_n(\xi)=-\xi^{-q_0}\tilde{p}(\xi)\int\frac{\xi^{q_0-1}}{\tilde{p}(\xi)}\sum_{m=0}^{n-1}v_{m-n-1}v_m d\xi \tag{5.14}$$

が

$$v_n(\xi)=O(\xi)+\begin{cases}O(\xi^{-q_0}(\log\xi)^n), & q_0\neq -1,\ -2,\cdots,\\ O(\xi^{-q_0}(\log\xi)^{\mu n+1}), & \mu=2:q_0=-1\,;\ \mu=1:q_0=-2,\ \cdots\end{cases} \tag{5.15}$$

であることも容易に確かめられる．なお $O(\xi^{-(n+1)q_0-n})=O(\xi^{-n(1+q_0)-q_0})$ の項もあらわれるが $q_0+1<0$ である限り上の項より小さくて問題にならない．

このようにして得られる (5.11) は一応 $\xi>0$ で一様収束するように見えるが，(5.5) を参照して得られる第一近似 $u_0(x)=v_0(\xi)+\beta=v_0(x-\alpha)+\beta$ は第5.5図の示すように，ちょうど $\xi=0$ $(x=\alpha)$ の非常に近くでは，近似があまりよくない．すなわち (5.11) で $v_{n+1}/v_n$ の比は $\log\xi$ または $(\log\xi)^2$ で，$\varepsilon$ のベキ級数としての収束半径は $\log\xi$ または $(\log\xi)^2$ の逆数に比例する．

また逆に大体の特異点の位置を知るために $\varepsilon\log|\xi_c|=1$ とおけば，特異点 $\xi_c$ の $\xi=0$ からの距離 $|\xi|$ は $\xi_c\propto\exp(-1/\varepsilon)$ となって $\xi=0$ にきわめて近いことを示す．

例題〕

$$(\xi+\varepsilon v)\frac{dv}{d\xi}-v=0 \tag{5.16}$$

の $v(1)=1$ を満足する解は，$\xi=vz$ とおいて $z$ に対する方程式（同次形）

$$(z+\varepsilon)-\left(v\frac{dz}{dv}+z\right)=0 \tag{5.17}$$

の解として厳密に求まり，$v(1)=1$ の条件の下に積分すれば

$$\xi=v(\varepsilon\log v+1) \tag{5.18}$$

と書ける．(5.16) は $q_0=-1$ の場合に当るが $r\equiv 0$ で $v_0=\xi$ となり $q_0\neq -1$ のときと同様になる．すなわち (5.18) を $\varepsilon\to 0$ に対し $\varepsilon$ のベキに展開すれば

$$\begin{aligned}v&=\xi(1+\varepsilon\log v)^{-1}=\xi[1-\varepsilon\log v+\varepsilon^2(\log v)^2+O(\varepsilon^3)]\\&=\xi[1-\varepsilon\log\xi+\varepsilon^2\{\log\xi+(\log\xi)^2\}+\cdots+O\{\varepsilon^n(\log\xi)^n\}+\cdots]\end{aligned} \tag{5.19}$$

と書け (5.15) を裏書きする．$v(\xi)$ の特異点（分岐点）は (5.18) で

$$d\xi/dv=\varepsilon\log v+1+\varepsilon=0 \tag{5.20}$$

とおくことによって得られ，

$$\xi_c=-\varepsilon\exp(-1-1/\varepsilon) \tag{5.21}$$

によって与えられる．確かに $\xi_c$ は $\varepsilon\to 0$ で指数項のために $\varepsilon$ のどんなベキよりもはやく 0 に近づく．

## §6 $-1<q_0<0$ の場合

問題の特質はこれまでの二つの場合の中間である．必ずしも必要ではないが (5.5) の変換によって解曲線が $\xi=0$, $v=0$ を通過するようにしておけば取り扱いの見通しがよい．(5.15) の下に注意したように，今度は $O(\xi^{-n(1+q_0)-q_0})$ の項が $1+q_0>0$ のために $n>|q_0|/(1+q_0)$ を満足する $n$ の値に対して有界でなくなり，逐次近似が進めばいつかは発散をひきおこすこととなる．これを除去するには $q_0>0$ のときと同じ処方を実行すればよい．$u_n(\xi)$ を $O\{\xi^{-q_0}(\log\xi)^n\}$ に止めるには $x_1(\xi)$ を (3.7)，$x_n(\xi)$ $(n>1)$ を $O\{\xi^{-q_0}(\log\xi)^{n-1}\}$ としなくてはならないことが $q_0>0$ のときと同様数学的帰納法で確かめられる．ただ $r_0=0$, $-1<q_0<0$ に注意すればよい．$q_0<0$ に対してあらわれる $\xi^{-q_0-1}$ による危険は (5.5) によって除かれている．

特異点が $\xi=0$ から $\exp(-1/\varepsilon)$ の距離にあらわれるのは §5 のときと同様である．

例題〕
$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}-ku=1+x^2,\qquad 0<k<1, \tag{6.1}$$

$$u(1)=-1. \tag{6.2}$$

(5.5)〜(5.9) を参照し，そこで

$$q=q_0=-k,\quad r(x)=1+x^2 \tag{6.3}$$

とおけば，(5.8) すなわち

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{k}(1+\alpha^2) \sim \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon^3}{k^3} + \cdots \tag{6.4}$$

を満足する $\alpha$ に対して定まる変換

$$x = \xi + \alpha, \quad u = v - \frac{\alpha}{\varepsilon} \tag{6.5}$$

によって (6.1) は (5.10) に相当する形

$$(\xi + \varepsilon v)\frac{dv}{d\xi} - kv = \xi^2 + 2\alpha\xi \tag{6.6}$$

となる．一方境界条件 (6.2) は

$$\xi = 1-\alpha \quad \text{で} \quad v = -1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} \tag{6.7}$$

と書ける．あとはいつものように

$$v = v_0(\eta) + \varepsilon v_1(\eta) + \cdots, \tag{6.8}$$

$$\xi = \eta + \varepsilon\xi_1(\eta) + \cdots \tag{6.9}$$

の形の解を求めればよい．すなわち (6.6) に $\dot{\xi} = d\xi/d\eta$ を乗じ (6.4) を代入すれば

$$(\eta + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon v_0 + \cdots)(\dot{v}_0 + \varepsilon\dot{v}_1 + \cdots) - k(v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots)(1 + \varepsilon\dot{\xi}_1 + \cdots)$$
$$= \left(\eta^2 + 2\varepsilon\eta\xi_1 + \cdots + \frac{2\varepsilon}{k}\eta + \cdots\right)(1 + \varepsilon\xi_1 + \cdots) \tag{6.10}$$

から

$$\eta\dot{v}_0 - kv_0 = \eta^2, \tag{6.11}$$

$$\eta\dot{v}_1 - kv_1 = (\eta^2 + kv_0)\dot{\xi}_1 + (2\eta - \dot{v}_0)\xi_1 + \frac{2\eta}{k} - v_0\dot{v}_0, \tag{6.12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

境界条件としては，まず (6.9) から得られる

$$\eta = \xi - \varepsilon\xi_1(\eta) + O(\varepsilon^2) \fallingdotseq \xi - \varepsilon\xi_1(\xi) + O(\varepsilon^2) \tag{6.13}$$

を (6.8) に入れ

$$v = v_0(\xi) + (\eta - \xi)\dot{v}_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi) + O(\varepsilon^2) = v_0(\xi) - \varepsilon[\xi_1(\xi)\dot{v}_0(\xi) - v_1(\xi)] + O(\varepsilon^2), \tag{6.14}$$

(6.7) を代入して

$$-1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} = v_0(1-\alpha) - \varepsilon[\xi_1(1)\dot{v}_0(1) - v_1(1)] + O(\varepsilon^2), \tag{6.15}$$

さらに

$$v_0(1-\alpha) = v_0(1) - \alpha\dot{v}_0(1) + O(\varepsilon^2) \tag{6.16}$$

とおき (6.4) を代入すれば結局 $v_0(1)$, $v_1(1)$, $\cdots$ に対し，境界条件

$$v_0(1) = -1 + \frac{1}{k}, \tag{6.17}$$

$$v_1(1) = \xi_1(1)\dot{v}_0(1) + \frac{1}{k}\dot{v}_0(1) = \left[\frac{1}{k} + \xi_1(1)\right]\dot{v}_0(1), \tag{6.18}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が得られる．

(6.11) の一般解は，$A$ を定数として

$$v_0 = A\eta^k + \frac{\eta^2}{2-k} \tag{6.19}$$

であるが，(6.17) を考慮して $A$ を定めれば

$$A = \frac{k^2-4k+2}{k(2-k)} \tag{6.20}$$

となる．さて (6.19) を (6.12) の右辺に代入するとき，最も特異性の高いのは最後の項であるが

$$kv_0\dot{\xi}_1 - \dot{v}_0\xi_1 = v_0\dot{v}_0 \sim O(\eta^{2k-1}) \tag{6.21}$$

を満足する $\xi_1$，すなわち

$$\xi_1 = \frac{-v_0}{1-k} \tag{6.22}$$

をとることにより右辺を $O(\eta^{k+1})$ にすることができる．以上の結果をまとめると最も粗い一様な近似としてパラメタ表示

$$u = -\frac{1}{k} + A\eta^k + \frac{\eta^2}{2-k} + O(\varepsilon), \tag{6.23}$$

$$x = \eta + \varepsilon\left(\frac{1}{k} - \frac{A\eta^k}{1-k} - \frac{\eta^2}{(1-k)(2-k)}\right) + O(\varepsilon^2) \tag{6.24}$$

が得られる．

## §7 Lighthill の方法の $q_0=-\kappa<0$ に対する変形

Wasow は $q_0=-\kappa<0$ の場合に対して収束性の見とおしのよい，Lighthill の方法の変形を示した．まず $r(0)=0$ として (5.10) を基礎にとろう．(5.10) を $t$ を媒介変数とする特別な形（乗数 $t$ は $t+\varepsilon F_1(t)+\cdots$ ともとれる）

$$t\frac{d\xi}{dt} = \xi + \varepsilon v, \tag{7.1}$$

$$t\frac{dv}{dt} = r(\xi) - q(\xi)v, \qquad r(0)=0 \tag{7.1'}$$

に書きかえてやる．$q, r$ はもちろん問題の領域で $\xi$ の正則な函数とする．この形は (5.10) ほど一般的とはいえないので，Lighthill の方法ほどの柔軟性のある方法は展開できぬが，形が定まっており，収束性の証明などの理論的な取り扱いには便利である．なお $q_0$ が負の整数値をとるときは対数項があらわれて議論を複雑にするが，本質的な差はないので $q_0$ は整数でないとしよう．

(7.1) で $\varepsilon=0$ とおけば第一近似として

$$\xi = t. \tag{7.2}$$

これを (7.1′) に代入して $v$ の第一近似 $v_0$ に対する

$$t\frac{dv_0}{dt} + q(t)v_0 = r(t), \qquad r(0)=0 \tag{7.3}$$

が得られる．これの解は (2.11), (2.22) を参照すれば $r(0)=0$ に注意して

$$v_0(\xi)=\xi^{\kappa}Q_1(\xi)+\xi Q_2(\xi)=\xi^{\alpha}Q_0(\xi),\qquad \alpha=\min(\kappa,1) \tag{7.4}$$

の形に書ける．ここに $Q_1, Q_2$ は $1>\xi\geqq 0$ で $\xi$ について正則，$Q_0$ は $\xi$ と $\xi^{\kappa}$ について正則で，$\alpha$ は $\kappa$ と 1 の中で小さいものをとる．(7.1), (7.1′) で

$$v=v_0(t)+w \tag{7.5}$$

とおけば $v_0$ が (7.3) を満足することを用いて

$$t\frac{d\xi}{dt}=\xi+\varepsilon(v_0+w), \tag{7.6}$$

$$t\frac{dw}{dt}=-q(t)w+R(\xi,w,t), \tag{7.7}$$

ただし

$$R(\xi,w,t)=r(\xi)-r(t)-[q(\xi)-q(t)][v_0+w] \tag{7.8}$$

と書ける．(7.2), (7.3), (7.5) を出発点として近似を進めよう．すなわち $(\xi\sim t,\ v_0\gg w)$

$$\xi=t+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s(t)\varepsilon^s, \tag{7.9}$$

$$w=\sum_{s=1}^{\infty}v_s(t)\varepsilon^s \tag{7.10}$$

を (7.6), (7.7) に代入して $\varepsilon$ の等ベキの項を比較すれば，境界条件はすでに $t$ と $v_0(t)$ だけで満足してあるので

$$t\frac{d\xi_s}{dt}=\xi_s+v_{s-1},\qquad \xi_s(1)=0, \tag{7.11}$$

$$s>0$$

$$t\frac{dv_s}{dt}=-qv_s+h_s,\qquad v_s(1)=0, \tag{7.12}$$

を逐次に解けばよい．ここで $h_s$ は $R$ を $\varepsilon$ のベキに展開したときの $\varepsilon^s$ の係数で $\xi_1,\cdots,\xi_s;v_1,\cdots,v_{s-1};t$ の函数である．

(7.11), (7.12) は (2.22) 同様，積分形で

$$\xi_s(t)=t\int_1^t\tau^{-2}v_{s-1}(\tau)d\tau, \tag{7.13}$$

$$v_s(t)=t^{\kappa}\tilde{p}(t)\int_1^t\tau^{-\kappa-1}h_s(\tau)/\tilde{p}(\tau)d\tau \tag{7.14}$$

と書けるので，$0\leqq t\leqq 1$ で適当に大きな定数 $c$ を用いれば

$$\xi_s(t)\leqq\max_{t\leqq\tau\leqq1}|v_{s-1}(\tau)|,\quad |v_s(t)|\leqq c\max_{t\leqq\tau\leqq1}|h_s(\tau)|,\qquad s>0 \tag{7.15}$$

の評価が成立する．また (7.8) の $r(\xi)-r(t)$, $q(\xi)-q(t)$ は $\xi-t$ のベキ級数に展開でき，その係数の絶対値 $|(dr/d\xi)/n!|_{\xi=t}$ などは適当な定数 $k, K$ をえらんでやれば $K/k^n$ より小さくすることができる．したがって $R$ の $(\xi-t)$, $w$ による二重ベキ級数展開の各項の係数の絶対値は (7.4) などを参照すれば

$$\overline{R}(\xi,w,t)=K\frac{\xi-t}{k-(\xi-t)}(1+c\xi^\alpha+w) \tag{7.16}$$

の展開の各係数の絶対値より小さく，$\overline{R}$ が $(\xi-t)$, $w$ のベキ級数として収束する範囲で $R$ も絶対収束する ($\overline{R}$ は $R$ の優函数)．

さて (7.15), (7.16) から

$$\bar{\xi}=t+\varepsilon(ct^\alpha+\bar{w}), \tag{7.17}$$

$$\bar{w}=c\overline{R}(\xi,\bar{w},t) \tag{7.18}$$

のベキ級数展開の各項の絶対値は $\xi, w$ に対する (7.9), (7.10) の各項の絶対値より大きく，その優函数となっている．(7.16)～(7.18) を用いれば $w$ の優函数 $\bar{w}$ に対する式 (7.18) は閉じた形

$$\bar{w}=ct^\kappa\frac{\varepsilon(ct^\alpha+\bar{w})}{k-\varepsilon(ct^\alpha+\bar{w})}(1+ct^\alpha+\bar{w}) \tag{7.19}$$

で表わされる．すなわち $\bar{w}$ は $t$ に無関係に選べる $\delta$ に対して

$$|\varepsilon t^\alpha|<\delta \tag{7.20}$$

ならば $\varepsilon t^\alpha$ について正則である．したがって (7.9), (7.10) も

$$|\varepsilon|\leqq\delta t^{-\alpha},\quad \alpha=\min(-q_0,1),\qquad 0\leqq t\leqq1 \tag{7.21}$$

で絶対収束する．

Wasow はまた $q_0>0$ に対する前節までの Lighthill の方法についても，(2.5) の $u$ に対する級数が $s$ の有限な値について打ち切れるとき，$x$ に対する級数が優級数を持ち，したがって完全に収束することを示している．また $u$ に対する級数が無限級数となるときは，(2.4), (2.5) の与える解は一般に漸近解である．

## §8　その他の場合と方法の限界

以上の方法が有効なのは (2.1) に対してだけとは限らない．二，三の例題について説明しておこう：

1)　$x=0$ が第一近似の高次の特異点となるとき：

$$(x^2+\varepsilon u)u'+u = x^2+2x^3 \tag{8.1}$$

を

$$u(1) = 1+e \tag{8.2}$$

の条件の下に解くこと.

(2.4), (2.5) を代入すれば (2.6) を参照して (8.1) は

$$[\xi^2+2\varepsilon\xi x_1(\xi)+\varepsilon u_0][\dot{u}_0+\varepsilon\dot{u}_1]$$
$$+[u_0+\varepsilon u_1-\{\xi^2+2\varepsilon\xi x_1(\xi)+2\xi^3+6\varepsilon\xi^2 x_1(\xi)\}](1+\varepsilon\dot{x}_1)+O(\varepsilon^2) = 0, \tag{8.3}$$

(8.2) は

$$u_0(1)+O(\varepsilon) = 1+e+O(\varepsilon) \tag{8.4}$$

と書ける. (8.3), (8.4) で $\varepsilon$ の同じベキを等置すれば

$$\xi^2\dot{u}_0+u_0 = \xi^2+2\xi^3, \tag{8.5}$$

$$u_0(1) = 1+e, \tag{8.6}$$

$$\xi^2\dot{u}_1+u_1 = -u_0\dot{u}_0-(u_0-\xi^2-2\xi^3)\dot{x}_1-(2\xi\dot{u}_0-2\xi-6\xi^2)x_1, \tag{8.7}$$

…………

が得られる.

(8.5) は解

$$u_0 = \xi^2+\exp(1/\xi) \tag{8.8}$$

を持つ. $\exp(1/\xi)$ は同次方程式の解で (8.6) から係数は 1 となった. $\xi=0$ で $u_0$ は $\exp(1/\xi)$ の特異性を持ち

$$u_0\dot{u}_0 = -\frac{1}{\xi^2}\exp\left(\frac{2}{\xi}\right)-(1-2\xi)\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)+2\xi^3 \tag{8.9}$$

と書かれる. (8.7) の右辺で最も特異性の高い第一項の寄与を, $x_1$ を適当に選んで打ち消すには, $x_1$ が $\xi\to 0$ で

$$|-u_0\dot{u}_0-u_0\dot{x}_1-2\xi\dot{u}_0x_1| \ll |u_0\dot{u}_0|, \tag{8.10}$$

すなわち

$$\left(\dot{x}_1-\frac{2}{\xi}x_1\right)\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)-\frac{1}{\xi^2}\exp\left(\frac{2}{\xi}\right) = O\left[\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)\right] \tag{8.11}$$

を満足するように選べばよい. (8.11) の解は

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_1}{\xi^2}\right) = \frac{1}{\xi^4}\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)+O\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \tag{8.12}$$

である. これから

$$x=\xi-\varepsilon\left[(1-2\xi+\xi^2)\exp\left(\frac{1}{\xi}\right)+O(1)\right]+\varepsilon^2 O\left[\exp\left(\frac{2}{\xi}\right)\right] \tag{8.13}$$

が得られる．(8.8) と (8.13) は $x\sim 0$ の近傍まで，ある程度一様によい近似を与える．

(8.13) で $x=0$ とおけばそれに対する $\xi$ の値 $\xi_1$ は

$$\xi_1\sim\varepsilon\exp\left(\frac{1}{\xi_1}\right), \tag{8.14}$$

または両辺の対数をとって

$$\xi_1\sim\frac{1}{\log\xi_1+\log(1/\varepsilon)} \tag{8.15}$$

によって近似される．(8.15) で $\varepsilon\to 0$ とすれば $|\log\xi_1|\ll\log|1/\varepsilon|$ であることがわかる．(8.15) で $\log\xi_1$ を無視したものを (8.8) に代入して $\varepsilon\to 0$ とすれば，$u(0)$ の粗い漸近評価

$$u(0)\sim\left[\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1} \tag{8.16}$$

が得られる．

ただしこの方法による逐次近似の収束性は証明されたわけではない．事実 (8.1) で $x^2=z$ とおけば

$$(z+\varepsilon u)\frac{du}{dz}+\frac{1}{2\sqrt{z}}u=z+\frac{1}{2}\sqrt{z} \tag{8.17}$$

となって (2.1) に似た形となるが $p(x)$, $r(x)$ ともに $z=0$ で正則でなく，前節までの証明法がそのままでは成立しない．ただ $\varepsilon\to 0$ における解の定性的性質を知るには十分に役立つものといえよう．

2)　一般に

$$[x+\varepsilon p_1(x,u)+\cdots+\varepsilon^s p_s(x,u)+\cdots]\frac{du}{dx}+q(x)u$$
$$=r(x)+\varepsilon r_1(x,u)+\cdots+\varepsilon^s r_s(x,u)+\cdots \tag{8.18}$$

において $p_s, r_s$ が $u$ についてたかだか $s$ 次の多項式であれば，前節までの議論がそのまま成立することが Wasow によって示されている．したがって $r_1$ がたとえば $u^3$ とか $\sin\alpha u$ とかの場合には保証はまだないわけであるが，1) と同様有用な結論が得られることもある．

3)　二階の常微分方程式または連立方程式．

$$\{x+\varepsilon(v'+a(x)v)\}v''+q(x)v'+s(x)v=r(x) \tag{8.19}$$

は $v'=u$ とおけば連立方程式

$$[x+\varepsilon u+\varepsilon a(x)v]u'+qu+sv=r, \tag{8.20}$$

$$v'-u=0 \tag{8.21}$$

に帰する．新しいのは $\varepsilon avu'+sv$ の項と $v$ とであるが，$x, u$ を (2.4), (2.5), $v$ を (2.5) の形に展開してやれば一階の場合同様に近似を進めることができる．

$q_0>0$ のときは (2.23), (8.21) から明らかなように $\xi\to 0$ で $v_0\ll u_0$ であり，第一近似としては $u_0$ が (2.22)，$x_0+\varepsilon x_1$ が (3.12)，$v_0$ が (8.21) から

$$v_0=\int u_0 d\xi \tag{8.22}$$

で与えられる．

$q_0<0$ のときも前節までのやり方と大差はない．まず $q_0<-1$ のときは $x, u$ を定数だけずらして $\xi=0$ で (8.20) の $u'$ の係数および $r$ が 0 となるようにしてやればよい．$-1<q_0<0$ のときは $q_0>0$ と $q_0<-1$ との両方の方法を併用してやればよい．

4)　非線型振動の周期解．(1.25) を一般化した

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u=\varepsilon f\left(u, \frac{du}{dx}\right) \tag{8.23}$$

の周期解を求めることを考えよう．第一近似は $a\cos x$ であるがこれを右辺に代入した $f(a\cos x, -a\sin x)$ の Fourier 展開

$$f(a\cos x, -a\sin x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{8.24}$$

をつくるとき，すでに見たように $a_1=b_1=0$ でない限り第二近似は $t\to\infty$ で発散し，周期解を与えない．

(8.23) において (2.4), (2.5) を用い独立変数を $\xi$ に変えると

$$\frac{du}{dx}=u'=\frac{\dot{u}}{\dot{x}}, \tag{8.25}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=u''=\frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\dot{u}}{\dot{x}}\right)=\frac{\ddot{u}}{\dot{x}^2}-\frac{\dot{u}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \tag{8.26}$$

を考慮し，

$$\frac{\ddot{u}_0+\varepsilon\ddot{u}_1+\cdots}{(1+\varepsilon\dot{x}_1+\cdots)^2}-\frac{(\dot{u}_0+\varepsilon\dot{u}_1+\cdots)(\varepsilon\ddot{x}_1+\varepsilon^2\ddot{x}_2+\cdots)}{(1+\varepsilon\dot{x}_1+\cdots)^3}+u_0+\varepsilon u_1+\cdots$$

$$= \varepsilon f\left(u_0+\varepsilon u_1+\cdots; \frac{\dot{u}_0+\varepsilon\dot{u}_1+\cdots}{1+\varepsilon\dot{x}_1+\cdots}\right) \tag{8.27}$$

を得る．これを $\varepsilon$ のベキに展開すれば

$$\ddot{u}_0+u_0=0, \tag{8.28}$$

$$\ddot{u}_1+u_1=2\dot{x}_1\ddot{u}_0+\ddot{x}_1\dot{u}_0+f(u_0, \dot{u}_0), \tag{8.29}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が得られる．(8.28) の解 $u_0=a\cos\xi$ に対して (8.29) の右辺は (8.24) を用いれば

$$-2a\dot{x}_1\cos\xi-a\ddot{x}_1\sin\xi+a_0+a_1\cos\xi+b_1\sin\xi+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos n\xi+b_n\sin n\xi) \tag{8.30}$$

と書ける．$a_1\cos\xi$ の項は

$$x_1=\frac{a_1}{2a}\xi \tag{8.31}$$

と置いて消せる．したがって $\ddot{x}_1=0$ である．残りの危険項 $b_1\sin\xi$ が消えるためには $b_1=0$ となるより他にはない．すなわち

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a\cos\xi, -a\sin\xi)\sin\xi\, d\xi=0, \tag{8.32}$$

これは振幅 $a$ を定める方程式とみなせる．このようにして $u_0, u_1, \cdots$ は $\xi$ について $2\pi$ を周期とする周期函数となった．$x$ についての周期 $T$ は (2.4), (8.31) から得られる関係

$$x=\xi+\varepsilon\cdot\frac{a_1}{2a}\xi+O(\varepsilon^2)=\xi\left[1+\frac{a_1}{2a}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right] \tag{8.33}$$

で $\xi=2\pi$ とおいて

$$T=2\pi\left[1+\frac{a_1}{2a}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right]=2\pi+\frac{\varepsilon}{a}\int_0^{2\pi}f(a\cos\xi, -a\sin\xi)\cos\xi\, d\xi \tag{8.34}$$

によって与えられる．(1.36) で $\omega=1$ とおいたものは (8.34) で $a_1=-3/4a^3 \fallingdotseq -3/4A^3$ $(f=-u^3)$ とおいた特別な場合にほかならない．

## §9 偏微分方程式

1) 今までに学んだ方法が最も直接的に応用できるのは，小さなパラメタ $\varepsilon$ のかかった準非線型項 $G$ を含んだ双曲型の方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}\Phi+F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}, \frac{\partial\Phi}{\partial Y}, \Phi, X, Y\right)+\varepsilon G=0 \tag{9.1}$$

である．ここで $G$ は $\Phi$ の二階までの偏微分と $X, Y$ の準非線型函数を表わす．すべての二階の線型の双曲型方程式が，(9.1) で $\varepsilon\to 0$ とかいたものに帰着することは偏微分方程式論の教えるところである．(9.1) はその標準形といえる．直交する二つの曲線群 $X=$ 一定 および $Y=$ 一定 は $\varepsilon$ を $0$ とおいた方程式の特性線で，その上でそれに垂直な方向 ($Y=$ 定数, $X=$ 定数) についての $\Phi$ の微係数に特異性や不連続があれば，その特性線に沿って特異性が拡がる (特異特性曲線)．さて (9.1) に変数変換

$$x=\overline{X}\overline{Y},\quad \overline{X}=X-X_0,\quad \overline{Y}=Y-Y_0 \tag{9.2}$$

$$y=y(X,Y) \tag{9.3}$$

を行なってみよう ($X_0, Y_0$ は定数)．これによって左辺は

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)=\frac{\partial}{\partial X}\left(\overline{X}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\overline{X}\left(\overline{Y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial^2 y}{\partial X\partial Y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial Y}\left(\overline{Y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) \tag{9.4}$$

を考慮すれば

$$(x+\varepsilon g_1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\left(\overline{X}\frac{\partial y}{\partial X}+\overline{Y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+F_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\Phi,x,y\right)+\varepsilon G_1=0 \tag{9.5}$$

と変形される．ここで $g_1$ は $x, y, \partial^2\Phi/\partial x\partial y, \partial^2\Phi/\partial y^2, \partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y, \Phi$ の函数で，$G_1$ は $G$ から $g_1\partial^2\Phi/\partial x^2$ を除いたものに当る．

(9.5) で $\varepsilon$ を $0$ とおいた方程式の特性線は，(9.2) を考慮すれば

$$0=\left(\overline{X}\frac{\partial y}{\partial X}+\overline{Y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2-4x\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}=\left\{\overline{X}\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)-\overline{Y}\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\right\}^2, \tag{9.6}$$

すなわち当然のことだがその一つは

$$\overline{X}=0,\quad \overline{Y}=0,\qquad \text{したがって}\ x=0$$

で与えられる．(9.5) は，$x$ についての微分だけを考えれば (8.19) と全く同様な形であり，$x=0$ が第一近似解の特異点，したがって特異特性線となるときは，ふつうの逐次近似がうまくいかないのが当然で，その処理法も (8.19) に対すると同様，$x$ を (2.4) の形に求めていくことが示唆される．ただ実際問題に際しては (9.5) の形に直しておく必要は全然なく，もとの形の方程式の特性曲線座標に対して，上記の処方をほどこしてやればよい．たとえば (9.5) に対

しては $X, Y$ がそれで，$X=X_0$，もしくは $Y=Y_0$ が $x=0$ と同等なことは (9.2)，(9.6) から明らかである．

例題〕
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \tag{9.7}$$
は
$$\partial\Phi/\partial x=u \tag{9.8}$$
とおけば簡単に
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon u\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9.9}$$
の形に書ける．$\varepsilon=0$ とおいた方程式の特性曲線は (9.7) からもわかるように $x=$ 定数 および $y=$ 定数 である．いまそのときの解 $u_0(x)$ が $x\to 0$ に対して
$$\partial\Phi_0/\partial x=u_0=f(x)\sim Ax^{-q_0}+u_0(0) \tag{9.10}$$
の形の特異性を持つとしよう．すなわち $x=0$ が $\varepsilon=0$ のときの特異特性曲線となるわけである．境界条件としてたとえば $y=0$ で $u=f(x)$ を要求すれば，$u_0$ が (9.10) の形の特異性を持つことは自明であろう．偏微分方程式ではこの例でも見るように，境界条件あるいは初期条件の方からも特異性が導入されるのがふつうである．(8.19) の解法にならい
$$u=u_0(\xi,\eta)+\varepsilon u_1(\xi,\eta)+\cdots, \tag{9.11}$$
$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi,\eta)+\cdots, \tag{9.12}$$
$$y=\eta \tag{9.13}$$
とおき逐次近似を行なえばよい．

(9.12) を $x, y$ につき微分すれば
$$1=\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(1+\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+\cdots\right),\quad 0=\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(1+\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+\cdots\right)+\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\eta}+\cdots, \tag{9.14}$$
すなわち
$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=1-\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+O(\varepsilon^2),\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\eta}+O(\varepsilon^2) \tag{9.15}$$
が成立するので，(9.9) の偏微分，
$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}, \tag{9.16}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{9.17}$$
はそれぞれ
$$\frac{\partial}{\partial x}=\left[1-\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+O(\varepsilon^2)\right]\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\eta}-\varepsilon\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{9.18}$$
と書ける．これと (8.11) を (9.9) に代入し $\varepsilon$ の各ベキを比較すれば
$$\varepsilon^0:\ \frac{\partial u_0}{\partial\eta}=0, \tag{9.19}$$
$$\varepsilon^1:\ \frac{\partial u_1}{\partial\eta}=u_0\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\frac{\partial u_0}{\partial\xi}=\left(u_0+\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\right)\frac{\partial u_0}{\partial\xi}, \tag{9.20}$$
…………．

(9.19) の解は (9.10) を参照すれば

$$u_0=u_0(\xi)\sim u_0(0)+A\xi^{-q_0}\qquad(\xi\to 0)\tag{9.21}$$

であらわされる．特に $x\sim 0$ の近傍に着目しよう．(9.21) に従えば，(9.20) の危険項 $u_0(\partial u_0/\partial\xi)$ の $\xi\to 0$ での特異性を除去するには，$q_0$ の値により，最低限

$$q_0>0,\quad x_1=-A\eta\xi^{-q_0},\tag{9.22}$$

$$q_0\leqq -1,\quad x_1=-\eta u_0(0),\tag{9.23}$$

$$-1<q_0<0,\quad x_1=-\eta[u_0(0)+A\xi^{-q_0}]\tag{9.24}$$

ととればよいことはこれまでの議論から明らかであろう．

2)　ところで上の例において，$x_1, x_2, \cdots$ を適当に選んで (9.20) 以下の右辺が完全に0となるようにできれば，問題はいたって簡単であり，何度も述べた理想的な場合に相当する．さてこのようにして得られる $x_1, x_2, \cdots$ の値，いいかえれば $(x, y)$ と $(\xi, \eta)$ の間の関係は何に対応しているであろうか．このとき上の例では $u_1, u_2, \cdots$ などはすべて $\eta$ に無関係で $\xi$ だけの函数となってしまう．このような $\xi$ は偏微分方程式でいう特性座標にほかならない．

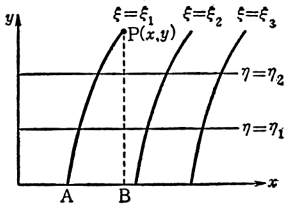
たとえば線型の方程式

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\xi\partial\eta}=0\tag{9.25}$$

の特性座標は $\xi, \eta$ で，解は

$$\Phi_0=f_1(\xi)+f_2(\eta)\tag{9.26}$$

の形に書けるが，さらに $\eta=0$ で $\Phi_0=f_1(\xi)$ の条件をつければ $f_2\equiv 0$ で，$\Phi_0$ は $\xi$ だけの函数となる．このような場をふつう単一波と呼んでいる．別な形の方程式




第 9.1 図

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}\tag{9.27}$$

の進行波解

$$\Phi_0=f_1(x-ct)\tag{9.28}$$

もその一例で，$c$ の速度で $x$ の正の方向に進行する波をあらわす．

さて (9.7) の特性曲線は微分形式

$$dx\,dy+\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x}dy^2=0\tag{9.29}$$

であらわされる．これを因数分解すれば

$$d\xi=dx+\varepsilon u\,dy=0,\tag{9.30}$$

$$d\eta=dy=0\tag{9.31}$$

が得られる. $\xi, \eta$ は特性座標で, 特性曲線 (*9. 30*), (*9. 31*) 上でそれぞれ一定の値をとる. (*9. 30*), (*9. 31*) を積分すれば

$$\xi = x + \varepsilon \int_{x=\text{一定}} u\, dy, \tag{9.32}$$

$$\eta = y \tag{9.33}$$

となり, (*9. 12*), (*9. 22*)~(*9. 24*) が確かに (*9. 32*), (*9. 33*) の近似式となっていることがわかる.

3) もっと一般的ないい方をすれば, 双曲型方程式における Lighthill の方法の本質は, 厳密な非線型の方程式の特性曲線にできるだけ近い助変数 $\xi, \eta$ で解を表わそうとすることにほかならず, 理想的な場合には $\xi, \eta$ がそのまま特性座標となる.

たとえば (*9. 32*) で結びつけられる, 厳密な特性座標 $\xi$ と線型化されたときの特性座標 $x$ とはわずかの差しかなく, 単一波の場 $\Phi = f(\xi)$ を $\Phi = f(x)$ で近似しても大差がないように見える. ところが (*9. 32*) の積分を $y$ の大きいところまで押し進めればその差は非常に大きくなることができる. 第 9. 1 図を見ればその間の事情は明らかであろう. 簡単のために $y=0$ で $\xi = x$ とする. PA, PB をさかのぼってみると, 前者は A における初期値, 後者は B における初期値に等しく, その差は $y$ とともに限りなく増大することがある. この間の事情はすぐ前に見た非線型振動の例題とよく似ている. そのときの時間 $t$ を $y$ でおきかえて考えれば, 正しい特性座標を独立変数に選ぶことは, 正しい位相を用いてやろうとすることに完全に対応している.

上の考えは Lighthill, Whitham, Lin, Fox 等により単一波の場合に限らず重要な二, 三の問題に適用されかなりの成功をもたらした(1) ([18], [19] 参照).

(*9. 1*) に対し, 後者の方法を一般的な形にまとめれば

$$\Phi = \Phi_0(\xi, \eta) + \varepsilon \Phi_1(\xi, \eta) + \cdots, \tag{9.34}$$

$$X = \xi + \varepsilon x_1(\xi, \eta) + \cdots, \tag{9.35}$$

$$Y = \eta + \varepsilon y_1(\xi, \eta) + \cdots \tag{9.36}$$

を (*9. 1*) に代入するとともに, (*9. 1*) の特性曲線に対する条件式

$$-dX\, dY + \varepsilon[A\, dX^2 - B\, dX\, dY + c\, dY^2] = 0 \tag{9.37}$$

(1) G. B. Whitham: Proc. Roy. Soc., **201** (1950), 89; **203** (1950), 571. C. C. Lin: J. Math. Phys., **33** (1954), 117. P. A. Fox: J. Math. Phys., **34** (1955), 133.

から $(X, Y)\to(\xi, \eta)$ の変換を逐次近似していけばよろしい．単一波や進行波の場合には $X=\xi$ もしくは $Y=\eta$ としておいても差し支えない．また球面波の原点から遠い所での性質などをしらべる場合には，$\varepsilon$ として，定数でなく原点からの距離の逆ベキなどのような小さい変数をとるのが好都合のことがある．

4）双曲型以外の偏微分方程式に対する応用例としては，薄い物体を過ぎる二次元ポテンシアル流の近似解法の澱み点付近での発散の回避（Lighthill[18], [19]），平板を過ぎる粘性流の境界層近似の精度を前縁での発散を避けて高めた Kuo の仕事(1)などが有名である．

以上のように Lighthill の方法は非常に組織的で，各点における座標の縮小拡大が全く自動的に見いだされ，全領域にわたって単一の形で解をあらわせる利点はあるが，たとえば，$\varepsilon\to 0$ としたときに第二近似が二つ以上の特異点を場の中に持つようなときは必ずしもうまくいかない．このときは場をいくつかの部分にわかち，各部分で妥当な解をつぎ合せていくという，次に述べる境界層の方法の助けが必要となる．

## §10　境界層の方法

WKB 法，Poincaré-Lighthill-Kuo の方法は非常に組織的な方法であるが，その適用範囲が限られていて万能薬とはいいがたい．これに反して，それらの原型である境界層の方法は，それほど組織的とはいえないが，原始的なだけに広い適用範囲を持っている．その起こりとしての境界層の理論については流体力学の書物を見ていただくことにして，ここでは簡単な例題についてその特長を概観してみよう．

1）
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+Pe^{i\omega t} \tag{10.1}$$

の周期解を，$y=\pm b$ で $u=0$ の条件の下に見いだすこと．ただし $\nu\ll 1$ とする．これは物理的にいえば動粘性率 $\nu$ を持った粘性流体が溝 $|y|<b$ の中で，$Pe^{i\omega t}$ に比例して変化する圧力勾配によって行なう強制振動に相当する．

$$u=ve^{i\omega t} \tag{10.2}$$

とかけば (*10. 1*) は

(1)　Y. H. Kuo: J. Math. Phys., 32 (1953), 83.

$$\nu\frac{d^2v}{dy^2}-\kappa^2 v+P=0, \tag{10.3}$$

境界条件は

$$y=\pm b \text{ で } \quad v=0 \tag{10.4}$$

と書ける．ただし $\kappa=\sqrt{i\omega}$ は正の実部を持つとする．

もし $d^2v/dy^2$, $\kappa^2 v$, $P$ が同程度の量とすれば (10.3) の第一項は無視できて (このとき二階の微分方程式は零階，すなわち代数方程式に退化する)，

$$v_e=\frac{P}{\kappa^2} \tag{10.5}$$

と書けるが，これでは (10.4) を満足することができない．これは，もとの方程式が二階であって，$\nu d^2v/dy^2$ を無視できない場所が存在するためである．それが $y=\pm b$ の近くであることは (10.4) からも明らかである．すなわち $\nu$ が小さいとき (10.5) は $|y|<b$ ではよい近似を与えるが (壁の影響がなく外力とともに動く非粘性解)，$|y|\sim b$ で (10.4) の条件を満たすために，$v$ は急に 0 となり，$d^2v/dy^2$ は非常に大きく $\nu\, d^2v/dy^2$ を有限に保つ．$y\sim\pm b$ の近傍の領域を境界層と名づけよう．

$y\sim b$ の近傍の様子をしらべるには，いつものように変数変換

$$Y=\nu^{-\alpha}(b-y), \qquad \alpha>0 \tag{10.6}$$

を行なって $y\sim b$ の近くを拡大してやる．このとき (10.3) は

$$\nu^{1-2\alpha}\frac{d^2v}{dY^2}-\kappa^2 v+P=0 \tag{10.7}$$

と書ける．第一項が他の項と同程度であるようにするには $1-2\alpha=0$，すなわち

$$\alpha=\frac{1}{2} \tag{10.8}$$

と選んでやればよい．境界条件としては $y=b$ すなわち $Y=0$ で $v=0$ となる点は変わりないが，境界層の外部 $y\neq b$ が (10.6), (10.8) によって $Y\to\infty$ と考えられるべきであるので，もう一つの条件としては ($y=-b$ で $v=0$ の代りに) $Y\to\infty$ で $v_e$ と滑らかに接合するのを要求するのが先決であろう．

$$Y=0 \text{ で } \quad v=0, \tag{10.9}$$

$$Y\to\infty \text{ で } \quad v\to v_e=\frac{P}{\kappa^2} \tag{10.10}$$

を満足する (*10.7*) の解が

$$v_i = \frac{P}{\kappa^2}(1-e^{-\kappa Y}) \qquad (10.11)$$

となることは視察によって明らかである．($e^{\kappa Y}$ に比例する同次方程式の特解は (*10.10*) によってすてた.) これが境界層の内部の解である．境界層の外縁は，$v_e$ について見れば $y-b\to 0$, $v_i$ について見れば $Y\to\infty$ であって，そこで両者の接合がうまく行なわれていることに注意されたい．$y\sim -b$ に存在する境界層に対する解も

$$Y = \nu^{-1/2}(y+b) \qquad (10.12)$$

とおけば全く同様に求まる．

以上のことは (*10.3*), (*10.4*) の厳密解

$$v = \frac{P}{\kappa^2}\left[1-\frac{\cosh(\kappa y/\sqrt{\nu})}{\cosh(\kappa b/\sqrt{\nu})}\right] \qquad (10.13)$$

を $|y|<b$, $y\sim b$, $y\sim -b$ に対し $\nu\ll|\kappa b|^2$ として展開すれば直ちに出てくる．もっと一般的な問題，たとえば任意の断面形を持った管の場合（厳密な解のあるものは少ない）にも上の近似法はそのままあてはまる．実例として

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+Pe^{i\omega t} \qquad (10.14)$$

を滑らかな閉曲線 S 上で $u=0$ の条件の下に解くことを試みよう．これは $x$, $y$ 面に垂直な軸方向に圧力勾配のある管の中の流れである．(*10.2*) のおきかえをすれば

$$\nu\nabla^2 v-\kappa^2 v+P = 0 \qquad (10.15)$$

を S 上で $v=0$ の条件の下に解けばよい．これに相当する問題はすでに WKB 法の所でも取り扱ってある (§2.10).

境界層外部の解が (*10.5*) となることは自明である．S にごく近い境界層内の解を求めるために WKB 法のときと同様 S の法線 $s$（ここでは S から内向きにはかる）とその一定方向との傾き $\theta$ を独立変数とする直交曲線座標を用いれば (*10.15*) は

$$\nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-\frac{1}{R-s}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{R-s}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R-s}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right\}-\kappa^2 v+P = 0 \qquad (10.16)$$

と書ける．ここで $R(\theta)$ は S の曲率半径（S が内向きに凹のとき正とする），

$ds$, $(R-s)d\theta$ がそれぞれ $\theta, s$ を一定としたときの座標曲線の線素片である．

(10.6), (10.12) 同様

$$Y=\nu^{-1/2}s \tag{10.17}$$

とおき法線方向を拡大してやると，(10.16) は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}-\frac{\sqrt{\nu}}{R-\sqrt{\nu}Y}\frac{\partial v}{\partial Y}+\frac{\nu}{R-\sqrt{\nu}Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R-\sqrt{\nu}Y}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\kappa^2 v+P=0 \tag{10.18}$$

と書かれ，S に角がなく曲率 $1/R$ が普通大に止まれば，第二，第三項は無視できる．このとき (10.18) は (10.3) と全く同形であり，(10.5) と滑らかに接合する解として (10.11) が得られる．境界層の厚さはきわめて薄く，曲率の影響は第一近似としては無視されるわけである．管の中の流れはこのようにして第一近似では，(10.5) の示すように圧力勾配によって剛体のように移動する ($\kappa=\sqrt{i\omega}$ だから $\pi/2$ だけの位相のずれはある) 内部の芯と，境界での粘着条件を満足させるために存在するうすい境界層とから成り，境界層内部の場のそれに垂直な方向での空間的変化はきわめて大きい．なお (10.18) において解を $\sqrt{\nu}$ のベキ級数に展開していけば (2.10.41) と同様な結果となる．

2)　以上は簡単な場合について，近似の大体を説明した．要点を示すと

(i)　問題を適当に無次元化して，領域，非同次項，大部分の無次元のパラメタを普通大としたとき，最高階の微分の係数が非常に小さくなることを明らかにする．

(ii)　$\varepsilon=0$ とおいた方程式の解を求める．この方程式は原方程式に比べて階数が低く，境界条件のすべてを満足することは一般に不可能である．

(iii)　境界層の位置を推定するとともにその法線方向の長さを適当に拡大した座標 $Y$ を導入し，最高階の項と残りの主要項との大きさを同程度とした方程式すなわち境界層の方程式を作る．その $Y\to\infty$ (境界層外縁) における条件としては (ii) の解と滑らかに接続することを要求する．これが可能なことによって境界層の位置の推定の正しかったことを確認する．

以上が境界層近似の手法である．

(i) に相当することを 1) の例題では行なわなかったが，たとえば (10.3), (10.4) で $y=b\eta$ とおき，それを

$$\left(\frac{\nu}{\kappa^2 b^2}\right)\frac{d^2 v}{d\eta^2}-v+\frac{P}{\kappa^2}=0, \qquad \eta=\pm 1 \text{ で } v=0 \tag{10.19}$$

と書きかえ，$\varepsilon=\nu/(\kappa^2 b^2)$，$P/\kappa^2$ を無次元のパラメタ，$\eta$ を無次元の変数としておけば確かに見とおしがよかったわけである．

また考えられる境界層は，上の例にも見たように必ずしも一つとは限らない問題によっていろいろの場合が起る．このように領域をいくつかの部分に分かち，それぞれの領域で妥当な解を求めるとともにそれを適当につなぎ合わせて行く手法は，すでに WKB 法の所でも見た通りである．

3）以下簡単な例題として次の問題

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=P, \quad 0\leqq x\leqq 1, \quad u(0)=0, \quad u(1)=1. \tag{10.20}$$

を取り扱ってみよう．この解は

$$u_e=Px+1-P, \qquad \frac{du_e}{dx}=P, \quad u_e(1)=1, \tag{10.21}$$

$$u_i=A(1-e^{-\xi})+\varepsilon P\xi, \quad x=\varepsilon\xi, \quad \frac{d^2u_i}{d\xi^2}+\frac{du_i}{d\xi}=\varepsilon P, \quad u_i(0)=0. \tag{10.22}$$

で与えられる．境界層 ($x\sim 0$) の解 $u_i$ で $\varepsilon P\xi$ の項は無視しても差し支えない．$u_e$ と $u_i$ はそれぞれその右に書いた方程式の解で，定数 $A$ は，$u_e$ で $x\to 0$, $u_i$ で $\xi\to\infty$ としたものがつながるという条件から

$$A=1-P \tag{10.23}$$

と定まる．

以上の解では $\varepsilon=0$ の解に $x=1$ の条件を満足させたので $x=0$ に境界層があらわれたが，$x=0$ の条件を満足させ

$$u_e=Px \tag{10.24}$$

とおけばどうであろう．このときは境界層の位置は $x=1$ にしか考えられない．処方通り

$$1-x=\varepsilon\xi \tag{10.25}$$

とおけば，(10.22) のかわりに

$$\frac{d^2u_i}{d\xi^2}-\frac{du_i}{d\xi}=\varepsilon P, \qquad u_i|_{\xi=0}=1 \tag{10.26}$$

があらわれるが，その解

$$B(e^{\xi}-1)+1-\varepsilon P\xi \tag{10.27}$$

は $B\neq 0$ ならば $\xi\to\infty$ で発散し，$B=0$ とおいたものは $P\equiv 1$ でなければ (10.24) とつながらない．したがって $x=1$ に境界層を考えるのは不合理であった．以上の結論を (10.20) の厳密解

$$u=(1-P)\frac{1-\exp(-x/\varepsilon)}{1-\exp(-1/\varepsilon)}+Px \tag{10.28}$$

と比較して確かめられたい．$1-\exp(-1/\varepsilon)$ まで合わせることは漸近解の性質上むずかしいであろう．

4) (2.1) で $q_0>0$ の場合 $u_0(0)$ の値を求めること．(2.1) は非線形であり標準形とはいえないが，$x=0$ が境界層となることは想像がつく．

$\varepsilon=0$ としたときの解 $u_e(x)$ は (2.22), (2.23) で与えられている $u_0(x)$ に他ならない．$u_0$ は $x\to 0$ で

$$u_0\sim Ax^{-q_0} \tag{10.29}$$

となるために $x\to 0$ で無限に大きく，$\varepsilon u\ll x$ の仮定を破るのは明らかである．$x=0$ の近傍の解を求めるために変数のひきのばし

$$x=\varepsilon^{\alpha}X,\quad u=\varepsilon^{-\beta}U \tag{10.30}$$

を行なう．$X, U$ は普通大の量である．$u$ のスケールも変えるのは問題の非線型性によるもので，$u$ の大きさの程度が前もってわからない以上は当然である．$\alpha, \beta$ はあとから定まるが，$u_e$ から考えれば $x\sim 0$ では $u$ がかなり大きいわけだから，上の式で $\alpha>0$, $\beta>0$ と考えて差し支えない．(10.30) を (2.1) に代入すれば，$q, r$ の $x$ についての正則性から

$$(\varepsilon^{\alpha}X+\varepsilon^{1-\beta}U)\varepsilon^{-(\alpha+\beta)}\frac{dU}{dX}+[q_0+O(\varepsilon^{\alpha})]\varepsilon^{-\beta}U=r_0+O(\varepsilon^{\alpha}) \tag{10.31}$$

と書ける．主要項が同程度の大きさとなるためには

$$\alpha=1-\beta \tag{10.32}$$

とおけばよい．このとき (10.31) は

$$(X+U)\frac{dU}{dX}+q_0U+O[\max(\varepsilon^{\alpha}, \varepsilon^{\beta})]=0 \tag{10.33}$$

に帰着する．(10.33) は小さい項を無視すれば $U$ を独立変数に選ぶことによって容易に積分され，

$$X=-\frac{U}{q_0+1}+cU^{-\frac{1}{q_0}}\quad(c\text{ は定数})\tag{10.34}$$

を与える．あとは (*10.29*) と (*10.34*) を結びつけて未知の定数 $\alpha, \beta$ および $c$ を決定すればよい．境界層解 (*10.34*) で $X\to\infty$ とすれば，境界層の外縁で

$$U\sim\left(\frac{c}{X}\right)^{q_0},\tag{10.35}$$

これを (*10.30*) に代入して得られる

$$u\sim\varepsilon^{-\beta}\left(\frac{c\varepsilon^{\alpha}}{x}\right)^{q_0}=\varepsilon^{q_0\alpha-\beta}\left(\frac{c}{x}\right)^{q_0}\tag{10.36}$$

が外部解で $x\to0$ とした (*10.29*) とつながるには $c=A^{1/q_0}$, $\beta=q_0\alpha$, したがって (*10.32*) と連立させて

$$\alpha=\frac{1}{1+q_0},\quad \beta=\frac{q_0}{1+q_0},\quad c=A^{1/q_0}\tag{10.37}$$

ととればよい．

(*10.34*) で $X=0$ とおけば (*10.37*) を用いて

$$U(0)=\{(q_0+1)c\}^{\frac{q_0}{q_0+1}}=A^{\frac{1}{q_0+1}}(q_0+1)^{\frac{q_0}{q_0+1}},\tag{10.38}$$

したがって (*10.30*), (*10.37*) から

$$u(0)=A^{\frac{1}{q_0+1}}\left(\frac{\varepsilon}{q_0+1}\right)^{-\frac{q_0}{q_0+1}}.\tag{10.39}$$

これは (*3.13*) を (*2.23*) に代入したときの主項と完全に一致している．

以上のように，境界層の方法では場合に応じて適切な手段を考えねばならず，また逐次近似を進める段になると困難のおこることがあるが，それぞれの領域での解の形が非常に具体的で，物理的な洞察に適した方法といえる．要はいろいろの方法をその特長を生かしてうまく採用し，真実に近い解を見いだせばよいわけである．

# 第 4 章　境界値問題の差分法による近似解法

## §1　まえがき

1)　第4章および第5章において差分法による近似解法の大要を解説する．差分方程式による微分方程式の近似解法——以下これを単に差分法という——は“微分商を差分商でおきかえる”という素朴な着想を出発点とするものであり，近似解法として最も原始的なものの一つであるが，実質的な発展は比較的に新しい．その理由は原理はいかにも簡単に見えるにもかかわらず計算に手間がかかり，よい近似を得ようとするとたちまち多大の計算量が要求されることによる．計算手段の発達しない時代には偏微分方程式に応用して良い結果を出すなどはほとんど不可能であった．しかし，最近の高速計算機の発達は事態を一変せしめた．差分法は適用範囲の広い有力な近似解法となったのである．もちろん，高速計算機といっても万能ではなく，差分法自体も一層改良整備されることが必要ではあるが，いずれにしても差分法は今後ますます実用価値を増大するものと思われる．

2)　差分法の有効適切な応用のためには，理論的考察，特に収束性の吟味，誤差の評価が極めて大切であることは論をまたない．また，本書では具体的に触れなかったが，最近では数学の理論的な問題に差分法の手法が応用される傾向も見受けられる．このような観点から，以下の解説においても，差分法の理論，“数学的基礎づけ”に比較的多くの紙面を費している．それに際して採られた方法は函数解析（位相解析）のそれである．物理工学などの応用面に従事する人達の間で，いまだ十分なじまれていないように思われる函数解析の手法を敢えて採用したのは，原理的にはこの手法が完備した理論の確立に最も適していると確信されるからである．もっとも，函数解析的な取扱いといっても，そのうちの初歩的な概念，考え方を採用しただけであって，高級な定理を駆使したわけではない．通読に際して，読者の協力的な努力さえ得られれば，格別の予備知識は必要でないはずである．人によっては，取り敢えず線型代数での事情から類推しつつ納得してゆかれるのも一法であろう．

逆に，数学的厳密さ，詳細を徹底的に求められる読者にとっては，十分満足していただくには程遠い面もあろうが，それは筆者の未熟さに由来するだけでなく，紙面の制約，“意識した妥協”もあることと諒承を願う次第である．

また，近似を良くするための補助的な工夫も基本的なもののみを紹介するに止め，一切を網羅して差分法による数値計算の Hand Book として有用ならしめることは目標にしなかった．もし，このような Hand Book が必要ならば編末文献 [2], [5], [22], などが役立とう．

3)　第4章では具体例に関する限り，楕円型微分方程式の境界値問題を主とするが，§3, 4, 9, 13 に登場する基本的な概念，§14, 15 で述べられる一般的な定理は第5章で扱う放物型，双曲型微分方程式の初期値問題に対してもそのまま通用するものである．な

お §5.8 は独立に読まれて差し支えない.

4)　第4,5章の内容からさらにすすんで詳細を知ろうとする読者のために，数多くの文献の中から定評のある若干の成書を編末に挙げてある.

## §2　方法の例示

$h$ を十分小さな正数，$f(x)$ を微分可能な函数とすれば微分商の定義により

$$h^{-1}[f(x+h)-f(x)] \fallingdotseq f'(x) \tag{2.1}$$

としてよい．すなわち左辺の $h$ を差分間隔(difference interval)とする**前進差分商**は $h$ が十分小さければ微分商の近似値であると考えられる．このことは**後退差分商** $h^{-1}[f(x)-f(x-h)]$ についても同様である．またさらに $f(x) \in C^3$ ならば(1), $f(x+h), f(x-h)$ に TAYLOR の公式を適用して,

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x-h) &= 2hf'(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x+\theta_1 h)+\frac{h^3}{6}f'''(x-\theta_2 h) \\ &= 2hf'(x)+\frac{h^3}{3}f'''(x+\theta h); \qquad \text{ただし，} 0 \leqq \theta_1, \theta_2 \leqq 1, |\theta| \leqq 1 \end{aligned}$$

がわかるから

$$(2h)^{-1}[f(x+h)-f(x-h)] = f'(x)+R_1, \quad R_1 = O(h^2) \tag{2.2}$$

となる．一般に考えている変域での $|f^{(n)}(x)|$ の最大値を $M_n$ で表わすことにすれば $R_1$ に対し次の評価式を得る.

$$R_1 = \frac{h^2}{6}\vartheta M_3, \qquad |\vartheta| \leqq 1. \tag{2.3}$$

(2.2) の左辺は $f'(x)$ の近似値であるが，その近似の精度は十分滑かな函数については (2.1) によるものよりも良いと考えられる．いずれにしても，$x$ の近くの点での函数値 $f(x-h), f(x), f(x+h)$ の線型結合で $f'(x)$ の近似式を作ることができるわけである．このことは高階の微分商についても同じである．たとえば $f''(x)$ に対しては二階差分商（前進, 後退, 中央）をその近似式とみなすことができる．特に $f \in C^4$ ならば (2.2) を導いたと同様にして

$$h^{-2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)] = f''(x)+R_2, \quad R_2 = O(h^2) \tag{2.4}$$

が得られ，$R_2$ の評価は次式で与えられる.

$$R_2 = \frac{h^2}{12}\vartheta M_4, \qquad |\vartheta| \leqq 1. \tag{2.5}$$

---

(1)　$f(x) \in C^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は $n$ 階までの導函数がすべて考えている変域において有界連続なることを意味する.

差分法による近似解法，あるいは単に**差分法** (difference method, Differenzenverfahren) とよばれる方法は上の事情を利用し微分方程式を差分方程式でおきかえ，後者の解を前者の近似解とする近似解法である．この方法は順次見てゆくように，広く一般の偏微分方程式の各種の問題に適用することが可能であり，むしろその場合に他の方法に優った実用上の有効さを発揮するのであるけれども，さしあたり常微分方程式の簡単な境界値問題について大体の手順を明らかにしよう．

いま，区間 $G=\{x; a\leqq x\leqq b\}$ で境界値問題

$$u''(x)-q(x)u(x)=f(x), \qquad a<x<b, \tag{2.6}$$

$$u(a)+\sigma_1 u'(a)=\varphi_1, \quad u(b)+\sigma_2 u'(b)=\varphi_2 \tag{2.7}$$

の解 $u(x)$ が求めるべきものとする．ただし $q, f$ および $\sigma_1, \sigma_2, \varphi_1, \varphi_2$ はそれぞれ与えられた函数および定数である．この問題に差分法を適用するには，まず $G$ を幅 $h$ ($h=(b-a)/N$) の $N$ 個の小区間に分割し，$N+1$ 個の分点 $x_n=a+nh$ $(0\leqq n\leqq N)$ の集合を $G_h$ とする．次に $G_h$ の上で定義された函数 $u_h$ が次の (2.8), (2.9) を満足するとする[(1)]．ただし，$u_n=u_h(x_n)$, $q_n=q(x_n)$, $f_n=f(x_n)$ である．

$$h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]-q_n u_n=f_n \qquad (1\leqq n\leqq N-1), \tag{2.8}$$

$$u_0+\sigma_1 h^{-1}[u_1-u_0]=\varphi_1, \quad u_N+\sigma_2 h^{-1}[u_N-u_{N-1}]=\varphi_2. \tag{2.9}$$

(2.4) によれば (2.8) は微分方程式 (2.6) を "近似" する差分方程式であり，また (2.1) により (2.9) は境界条件 (2.7) を "近似" する境界条件である．したがって方程式 (2.8), (2.9) の解は $h$ が十分小さければ $u_h(x_n)\doteqdot u(x_n)$ の意味で $u(x)$ の近似解と考えられる．一方，(2.8), (2.9) は $N+1$ 個の未知数 $u_n=u_h(x_n)$ に対する $N+1$ 個の連立方程式であり，これを解くことは代数的な計算により可能である．このように差分法による近似解法は微分方程式の問題を近似的に有限個の未知数に関する連立方程式に帰着する方法の一つである．一般に上のようにして導かれた差分方程式は数値解法を余儀なくされるのであるが，以下微分方程式，差分方程式両方の解が正確に求められる若干の例を参考にあげておこう．

---

(1) この種の格子点上で定義された函数を格子点函数という．実質的には今の場合 $N+1$ 項からなる数列 $u_0, u_1, \cdots, u_N$ にほかならないが．

例題 1〕 (i)　$u''=6x,\ u(0)=0,\ u(1)=1.$

正しい解は $u=x^3$. 近似解 $u_h$ に対する方程式は, $h=1/N,\ u_h(nh)=u_n$ として

$$\left.\begin{array}{ll} h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]=6nh & (1\leqq n\leqq N-1), \\ u_0=0, \quad u_N=1. & \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

上の差分方程式は和分により解ける. すなわち, $v_n=u_{n+1}-u_n$ とおけば (2.10) より $v_n-v_{n-1}=6h^3n$. この式の両辺を $n$ に関して1から $n$ まで総和すれば

$$v_n-v_0=3h^3n(n+1). \quad よって \quad u_{n+1}-u_n=3h^3n(n+1)+v_0.$$

再び両辺を $n$ について0から $n-1$ まで総和し, $u_0=0$ を考慮すれば $u_n=h^3(n-1)n(n+1)+v_0n$. ここで $n=N$ とおけば $1=u_N=1-h^2+v_0N$ ($Nh=1$ だから). よって $v_0=h^3$. 結局

$$u_n=(nh)^3, \quad すなわち \quad u_h=x^3$$

となり微分方程式の解と一致する. これは境界条件のおきかえに誤差がなく, また三次函数に対しては (2.4) で $R_2=0$ となることから期待されることでもある.

(ii)　$u''=12x^2,\ u(0)=0,\ u(1)=1.$

正しい解は $u=x^4$. 近似解 $u_h$ に対する方程式は $u_h(nh)=u_n$ として

$$u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}=12h^4n^2 \quad (1\leqq n\leqq N-1), \quad u_0=1,\ u_N=1$$

となる. (i) の場合と同様にして解くと (代入により検算してもよい), $u_n=(nh)^4+h^3n(1-nh)$, すなわち

$$u_h=x^4+h^2x(1-x)$$

となり, 誤差は $h^2x(1-x)$ である. (2.4) の誤差が $O(h^2)$ であることが $u-u_h=O(h^2)$ に反映している.

例題 2〕 差分法は固有値問題にも適用される. ここで扱う例は後にしばしば引用する.

$$u''(x)=\lambda u(x), \quad u(0)=u(1)=0, \quad u\not\equiv 0. \tag{2.11}$$

正しい固有値, 固有函数は

$$u=u^{(k)}=C\cdot\sin k\pi x, \quad \lambda=\lambda_k=-k^2\pi^2 \quad (k=1,2,\cdots)$$

である. 固有値問題 (2.11) を次の差分方程式に対する固有値問題でおきかえる (ただし $h=1/N, u_n=u_h(nh)$).

$$\left.\begin{array}{ll} h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]=\rho u_n & (1\leqq n\leqq N-1), \\ u_0=u_N=0, \quad u_n\not\equiv 0. & \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

(2.12) で $u_0, u_N$ を消去してみると, 上の差分方程式の固有値問題は $N-1$ 成分のベクトル $\{u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}\}$ に作用する対称行列

$$A_h=h^{-2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

の固有値問題にほかならない. よって $N-1$ 個の固有値 $\rho_\kappa$ が存在する. $\rho_\kappa$ を大きさの順序で対応する $\lambda_k$ $(1\leqq k\leqq N-1)$ の近似値とみなすわけである. このように線型微分方程式の固有値問題に差分法を適用すれば有限次元の行列の固有値問題を解くことにな

る．さて (*2. 12*) を次のようにして解く．任意の $\rho$ に対して二次方程式

$$t^2-(2+\rho h^2)t+1=0 \qquad (2.13)$$

の二根を $\alpha, \beta$ とすれば $u_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n$ は (*2. 12*) の第一式を満足する．$u_0=0$ より $c_1+c_2=0$. これと $u_N=0$ を結びつけると $\alpha^N-\beta^N=0$ を得る．よって

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\sqrt[N]{1}=e^{i2k\pi/N} \qquad (k=1,2,\cdots,N-1). \qquad (2.14)$$

$k=0$ をとらないのは，そのとき $\alpha=\beta$, したがって $u_n\equiv 0$ となるからである．(*2. 14*) と $\alpha\beta=1$ とから

$$\alpha=\frac{1}{\beta}=e^{ik\pi/N}=e^{ik\pi h}. \qquad (2.15)$$

結局，$u_h=u_h^{(k)}(nh)=C\cdot\sin k\pi nh$ $(h=1/N,\ 1\leqq k\leqq N-1)$ が (*2. 12*) の解であることがわかる．$u_h^{(k)}$ に対応する固有値は (*2. 13*) で $\alpha+\beta=2+\rho h^2$ であることから

$$\rho=\rho_k=\frac{2}{h^2}(\cos k\pi h-1)=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2} \qquad (1\leqq k\leqq N-1) \qquad (2.16)$$

となる．誤差は $\rho_k-\lambda_k=\dfrac{h^2}{12}\pi^4k^4+O(h^4)=O(h^2)$ である．

注〕 差分算 (difference calculus) での記号を援用して

$$\left.\begin{aligned} &D_hu(x)=u(x+h)-u(x), \quad D_h'u(x)=u(x)-u(x-h),\\ &\delta_h^{(2)}u(x)\doteq u(x+h)-2u(x)+u(x-h)\end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

などの記法を用いることがある．$u_n=u(nh)$ ならば，

$$D_hu_n=u_{n+1}-u_n, \quad D_h'u_n=u_n-u_{n-1},$$
$$\delta_h^{(2)}u_n=u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}.$$

また $D_h, D_h'$ などの積も普通通り定める．たとえば $\delta_h^{(2)}u=D_hD_h'u=D_h'D_hu$. ときには添字 $h$ を省略し $\delta^{(2)}, D, D'$ とすることもある．

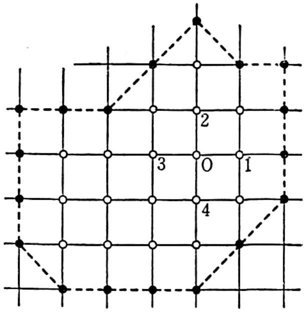
## §3 格子 (net, lattice, Gitter)

簡単のため二次元の場合について述べるが，より多次元および一次元の場合への類推は容易であろう．$h>0, k>0, a, b$ を定数とするとき直線群

$$x=x_m=a+mh, \quad y=y_n=b+nk \quad (m, n\ は整数) \qquad (3.1)$$

の作る図形を**長方形格子**という．点 $(a, b)$ は格子の**原点**，$h, k$ はそれぞれ $x$ 方向，$y$ 方向の**格子間隔**とよばれる．特に $h=k$ のときは**正方形格子**である．点 $P_{m,n}(x_m, y_n)$ を格子 (*3. 1*) の**格子点**という．任意の格子点 $P_{m,n}$ に対し，四点 $P_{m+1,n}$, $P_{m,n+1}$, $P_{m-1,n}$, $P_{m,n-1}$ を $P_{m,n}$ の**近傍（格子）点**とよぶことにする．$G_h$ を格子点の任意の集合とするとき，$P_{m,n}$ がその四つの近傍点と共に $G_h$ に属するならば $P_{m,n}$ を $G_h$ の**内点**，$G_h$ に属する格子点で内点でないものを $G_h$ の**境界点**といい，$G_h$ の内点の集合，境界点の集合をそれぞれ $G_h$ の**内部**，**境界**とよぶ．また $G_h$ に属する任意の二つの格子点 $P, Q$ に対し，$P=R_0, R_1, R_2, \cdots,$

$R_{n-1}$, $R_n=Q$, $R_i\in G_h$ をえらんで $R_{i-1}$ が, $R_i$ の近傍点 $(i=1,\cdots,n)$ であるようにすることができるならば（いわば $G_h$ が“連結”であれば), $G_h$ は**格子領域**であるということにする.



第 3.1 図　(・境界点, ∘ 内点)

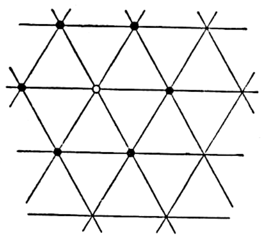
格子としては長方形格子が最も普通に使われるものであり，今後の議論もほとんどこれに限るのであるが，問題に応じては特殊な格子が利用されることもある.

例題 1〕　正三角形格子, $l,m,n$ を整数とするとき直線群

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}hl,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}hm,\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}hn$$

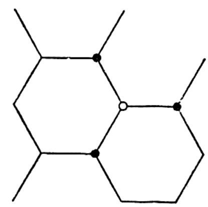
（ただし $h>0$, 定数）

は平面を一辺が $h$ である正三角形にわかつ．これらの直線の交点を格子点とする格子を格子間隔が $h$ である正三角形格子という．この場合任意の格子点の近傍はその点から $h$ の距離にある六つの格子点である.


第 3.2 図　(・は∘の近傍点)

例題 2〕　一辺が $h$ である正六角形を敷きつめた図形で定められる格子を格子間隔が $h$ である正六角形格子という．格子点は上の正六角形の頂点であり，任意の格子点の近傍点はその点から $h$ の距離にある三つの格子点である.

例題 3〕　$x$ 軸上で $x_n=\log n$ を座標とする点の集合は半直線 $x>0$ で定められた一次元の格子の格子点であると考えることができる．この場合格子間隔は一定ではない．多次元の場合でも，差分法によって問題の函数のある点における状態を詳しく知るために，その点の近くで細かくなっている格子を採用することがあるが，本書ではこのような格子間隔が一定でない格子は扱わない.


第 3.3 図　(・は∘の近傍点)

注 1〕　今後特に断らないときは格子としては長方形格子を考えるものとする．また差分法による近似解法を論ずるときには格子間隔を 0 に近づける操作を考える必要がある．このように種々の格子，すなわち格子の族を考えているときには $k,a,b$ は $h$ の函数であり，格子の族の元を指定するパラメタとして $h$ を用いることができるものと仮定する．すでに格子点の集合を表わすのに $G_{h,k}$ としないで $G_h$ としたのはこの趣旨による.

注 2〕　今後，格子に関連したことがらを考察しているときは，文字 $m,n,N$ につき特

に断らなくても

$m, n$ は整数を，　$N$ は自然数を

表わすものとする．

## §4　近似差分方程式の定義

1)　G をある領域，Γ をその境界とし，G と Γ との和集合 G+Γ で定義された函数 $u$ に対する微分方程式（境界条件は含まない）

$$L[u]=f \qquad (I)$$

を考える．これに対する‘近似差分方程式’なるものを定義するのがこの節での目標である．

$(I)$ に登場した $L$ は $u$ を $L[u]$ に対応させる微分演算子（作用素）であるが，$L[u]$ が意味を持つためには $u$ は適当な性質を備えていなくてはならない．たとえば，$L=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ であれば $u$ は（何らかの意味で）二階微分可能であることが必要である．このように $L$ の構造に由来して，また取り扱う問題に応じての便宜から $L[u]$ をある函数の集合 $U$ の元に限って考えるものとし，$u\in U$ ならば $L[u]\in F$ であるような，（函数を元とする）いま一つの集合を $F$ としておこう．すなわち $L$ を“$L$; $u\to L[u]$, $u\in U$, $L[u]\in F$”のように，いいかえれば $U$ から $F$ の中への写像（$L$: $U\to F$）とみなすわけである．$U, F$ の一般の元をそれぞれ $u, f$ で表わすことにしておく．$f\in F$ は G で定義されるのが普通であるが，$u\in U$ が十分滑らかであれば Γ での‘微分’を適当に解釈することにより G+Γ で定義されているものとすることもできる．

2)　上で考えた G+Γ に応じて次のような格子領域を定める．十分小さな正数 $h$ のおのおのに対して格子間隔が $h$ である格子を導入し，G+Γ に含まれる格子点全体の集合を $G_h$ で表わす．ただし，$h\to 0$ ならしめるときは他の格子間隔（$k$ など）も同時に 0 に近づき，したがって G の任意の点の近傍には $h$ を十分小さくとれば必ず $G_h$ の点が少くとも一つ入っているものと仮定する．さて，おのおのの $h$ に対し，$G_h$ で定義された格子点函数 $u_h$ に対する差分方程式

$$l_h[u_h]=f_h$$

を考える．

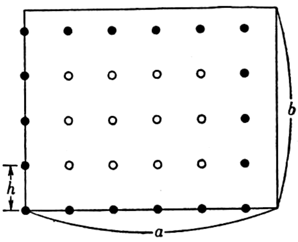
1) で $L$ について考えたと同様に差分演算子 $l_h$ を $G_h$ で定義された $u_h$ のある集合 $U_h$ から，$G_h{}^0$ で定義された $f_h$ のある集合 $F_h$ の中への写像と考える．一

般に $G_h{}^0 \subset G_h$ であるが $G_h{}^0 = G_h$ とは限らない．むしろ今後扱う具体例においては $G_h{}^0$ が $G_h$ の内部になっているのがしばしばである（次例参照）．

例題 1〕 §2 で考えた差分方程式 (2.8) の左辺により差分作用素 $l_h$ が定義されたものとすれば，上の意味での $G_h$ は $\{x_n; 0 \leqq n \leqq N\}$, $G_h{}^0$ は $\{x_n; 1 \leqq n \leqq N-1\}$ である[1]．

例題 2〕 $G+\Gamma$ を長方形 $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ とし，格子は $x = mh$, $y = nh$ ($h>0$, 定数) で定められるとする．$(mh, nh)$ を $P_{m,n}$ と書けば $G_h = \{P_{m,n}; 0 \leqq m \leqq [a/h], 0 \leqq n \leqq [b/h]$, [ ] は整数部分を表わす Gauss の記号$\}$.

$l_h[u_h] = h^{-2}[u_{m+1,n} + u_{m,n+1} + u_{m-1,n} + u_{m,n-1} - 4u_{m,n}]$, ただし $u_{m,n} = u_h(P_{m,n})$ をとれば $G_h{}^0 = \{P_{m,n}; 1 \leqq m \leqq [a/h]-1, 1 \leqq n \leqq [b/h]-1\}$.




第 4.1 図 $\circ \in G_h{}^0$, $\bullet \in \Gamma_h$

注 1〕 上の例題 2 で行なったように，$x = mh$, $y = nh$ で定められる格子で $l_h[u_h]$ の具体的表式を記すときには $P_{m,n}$ における式を記すものとする．すなわち $u_{m,n}$ に付した $m, n$ を格子についての流通座標とみなすわけである．またその際 $u_h(P_{m,n}) = u_{m,n}$ のような記号の説明を省略することがある．

3） われわれの目的は 1) で考えた $L$ に "近い" $l_h$ を作ることにある．異なった種類の演算子間の "近さ" を考えるには，もし同じ函数の集合に対して定義されている演算子同志ならば(演算子としての定義域が同じならば)，同じ元に作用させてみた結果の近さを考えればよい．いまは，$U$ と $U_h$ とは別物であるから，$L[u]$ $(u \in U)$ と比較する $l_h[u_h]$ の中の $u_h$ は何をとるかを定めなくてはならない．この問題を次のように処理する．$u \in U$ は $G+\Gamma$ で定義されているから $G_h$ 上でも定義されている．したがって $u$ を $G_h$ 上に限れば $G_h$ で定義された函数 $u|_{G_h}$ が得られる[2]．そこで任意の $u \in U$ に対し $u|_{G_h} \in U_h$ を要請する．これは $U$ に "比較して" $U_h$ をあまりせまくしすぎなければ成り立つことである．$U_h$ として $G_h$ で定義された函数全体をとれば大丈夫であることはもとより明らかである．かくして $L[u]$ の比較の相手は $l_h[u|_{G_h}]$ とすることができる．しかし，このままでは前者は連続変数の函数 $\in F$ であり，後者は $G_h{}^0$ で定義された格子点函数である．そこで再び任意の $f \in F$ を $G_h{}^0$ 上に限って得

(1) 以後もしばしば用いる記法であるが，ある条件 $R(x)$ を満足する $x$ の集合を $\{x; R(x)\}$ のようにかく．

(2) 一般に $A$ をある点集合，$B$ をその部分集合とするとき，$A$ で定義された函数 $u$ を $B$ に限ったものを $u|_B$ と書くことにする．すなわち $u|_B$ は $B$ の上で定義された函数であり，$u|_B$ の $B$ の任意の一点における函数値はその点での $u$ の値と等しい．例えば $A$ が実数全体，$B$ が整数全体とし，$u = u(x) = \sin \pi x$ なるときは，$u|_B$ の函数値は恒等的に 0 である．

られる格子点函数 $f|_{G_h^0}$ が $F_h$ に属することを要請する．これらの要請が満足されているときは任意の $u\in U$ に対し，$L[u]|_{G_h^0}$ と $l_h[u|_{G_h}]$ とを $F_h$ の元として比較するのが自然である．

次の段階では $F_h$ の二つの元の近さに意味を持たせなくてはならない．そこで，後の便宜を考え $F_h$ だけでなく，$U, F, U_h, F_h$ のすべてに**距離**を導入する．これらの函数を元とする集合が線型空間になっているならば**ノルム**を入れれば必要に答えたことになる．その場合 $U, F, U_h, F_h$ でのノルムをそれぞれ $\|u\|_U$, $\|f\|_F$, $\|u_h\|_{U_h}$, $\|f_h\|_{F_h}$ で表わすことにする．上のノルムは具体的には問題に応じて便利なものを選ぶわけであるが，以下の議論で最もよく採用するのは

$$\left.\begin{aligned}\|u\|_U &= \max|u|, & \|f\|_F &= \max|f|,\\ \|u_h\|_{U_h} &= \max|u_h|, & \|f_h\|_{F_h} &= \max|f_h|\end{aligned}\right\}\qquad(4.1)$$

である．ただし max はそれぞれの函数の定義範囲についてとる．ここで若干補助的な約束をしておく．

(i) 本来 max (最大) でなく sup (上限) とすべき場合も便宜上 max と書くことがある．

(ii) 混乱のおそれがないときは $u|_{G_h}, f|_{G_h^0}$ のかわりに，それぞれ $u, f$ と書く．たとえば $l_h[u|_{G_h}]$, $\|u|_{G_h}\|_{U_h}$ を $l_h[u]$, $\|u\|_{U_h}$ と略記する．また，$l_h[u_h]=f$ とかけば $l_h[u_h]=f|_{G_h^0}$ の意味である．

(iii) ノルムなどについて簡単に説明しておこう．例えば $U$ が区間 $0\leqq x\leqq 1$ で定義された連続函数 $u=u(x)$ の全体であるとする．この $U$ は線型空間（ベクトル空間）をなすと考えられる．実際，$U$ の任意の元（函数）$u, v$ に対してその同次線型結合 $\alpha u+\beta v$ も $U$ に属しているからである．このような線型空間ではその元 $u$（今の場合は函数）の長さ（大いさ）を表わすのにノルム $\|u\|$ が導入されることが多い．ただしノルム $\|u\|$ は次の性質を持っていなくてはならない．

(a) $\|u\|\geqq 0$. $\|u\|=0$ となるのは $u=0$ にかぎる．

(b) $\|\alpha u\|=|\alpha|\,\|u\|$.

(c) $\|u+v\|\leqq\|u\|+\|v\|$.

たとえば，上の $U$ について

$$\|u\|=\max_{0\leqq x\leqq 1}|u(x)|$$

とすれば，確かに (a), (b), (c) の性質が成り立っている．もちろん，一つの函数空間に対して種々の異なったノルムを考えることもできる．例えば，上の場合に

$$\|u\|=\int_0^1|u(x)|\,dx$$

としても，やはり (a), (b), (c) は成立している．取り扱いの目的に応じて便利なノルムを

採用するわけである.

次に,函数空間 $U$ が線型空間であり,ノルム $\|u\|$ が定義されているならば,そのノルムを用いて $U$ に距離を導入することができることを見よう. $U$ の二つの元 $u, v$ の距離を $\mathrm{dis}\,(u,v)=\|u-v\|$ で定義すれば, この距離は“距離”という語にふさわしい次の性質を持っている.

(A)　同一点間の距離は0であり,異なった二点間の距離は正である.

(B)　二点 $u, v$ 間の距離は $v, u$ 間の距離に等しい.

(C)　$u, v$ 間の距離と $v, w$ 間の距離との和は $u, w$ 間の距離より小さくない.

しかし, 函数空間での距離はノルムを用いてのみ定義されるわけではない. 例えば $U$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で定義され $u(0)=u(1)=1$ を満たす連続函数全体であるときは, $U$ にノルムを導入することがそもそも不可能である. それはノルムは本来線型空間に対してのみ考えられるのであるのに, 今度の $U$ は線型空間ではないからである. しかし, 距離は例えば $\mathrm{dis}\,(u,v)=\max\limits_{0 \leqq x \leqq 1}|u(x)-v(x)|$ として定義できる. (a), (b), (c) の成立することは明らかであろう.

ところで, 本書では, $U$ が線型空間ではなくても, 距離 $\mathrm{dis}\,(u,v)$ が定義されているときにはそれを $\|u-v\|$ と書くことにする. また, さらに, 距離の定義の具体式を示すのに $\|u\|=\max\limits_{0 \leqq x \leqq 1}|u(x)|$ のように書くことにしている. これらは $U$ が線型空間でない時には言訳なしにはすまないことであろう. ただ, 本書で具体的に取り扱う問題では函数空間が線型である場合が大部分であること, $\|\ \|$ を用いて議論する際はそれらを距離としてのみ用いることを心掛けたことにより, 上の便宜本位の記法が致命的な混乱を来たさないで読者の黙許を得ることを期待している.

さらに, 大ざっぱないい方をすれば, 格子を細かくすればするほど $u \in U$ と $u|_{G_h}$ とは近いものになってゆくとみなしてよい. $f$ と $f|_{G_h^0}$ についても同様. したがって, この事情をノルムに反映さすものとして次の条件を課す.

任意の $u \in U, f \in F$ に対し $h \to 0$ のとき

$$\|u\|_{U_h} \to \|u\|_U, \quad \|f\|_{F_h} \to \|f\|_F. \tag{4.2}$$

(4.2) はノルムのえらび方に対する制限であるが, $\|\ \|_U$ と $\|\ \|_{U_h}$, $\|\ \|_F$ と $\|\ \|_{F_h}$ を具体的に“互に類似”の仕方で定義すれば $u, f$ が適当に滑らかならばたいてい成り立つ.

例題 3]　$u, f$ が連続(一様)ならば (4.1) のノルムに対して (4.2) は成立.

例題 4]　$G=\{x\,;0<x<1\}$, $G_h=\{x_n\,;x_n=nh,\ 0 \leqq n \leqq N,\ h=1/N\}$ のとき, $u$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続ならば

$$\|u\|_U=\int_0^1|u|\,dx, \quad \|u\|_{U_h}=h\sum_{n=0}^{N}|u(x_n)|$$

として (4.2) の第一式は成立.

注 2〕 たとえば $U$ について，$u$ がそれに属する条件を明示せずノルムだけに言及することがある．その際は，$U$ はそのノルムが意味を持ち，かつそこでの取扱いに対して必要なだけ滑らかなすべての函数からなっているものと解釈してもらうことにする．

今後，$U, \cdots, F_h, \| \quad \|_U, \cdots, \| \quad \|_{F_h}$ を考えるときには上述の要請がすべて満たされているものとする．

4）準備がととのったので次の定義をする．

**定義 1**　任意の $u \in U$ に対し，$h \to 0$ のとき

$$\|L[u]-l_h[u]\|_{F_h} \to 0 \tag{4.3}$$

ならば，$U$ で $l_h$ は $L$ の**近似差分演算子**になっているという．

また，十分小さな $h$ に対し，すなわち，ある正数 $h_0$ に関して $0<h<h_0$ のとき

$$\|L[u]-l_h[u]\|_{F_h} \leqq h^\kappa M \qquad (\kappa>0) \tag{4.4}$$

が任意の $u \in U$ に関して成り立つならば，$l_h$ の $U$ での $L$ に対する**近似度**は $\kappa$ であるという．ただし $M$ は（$u$ によっても）$h$ によらない定数である．

注 3〕 $U$ がただ一つの $u$ からなるときは，$u$ に対し $l_h$ は $L$ の（近似度 $\kappa$ の）近似演算子になっているという．

注 4〕 詳しくは近似性，近似度についていう際にはノルムについて言及しなくてはならない．$u \in U$ が十分滑らかであり，$U$ が特に狭くなければたいていのノルムに関し，近似性，近似度は変りがないので，特に断らないことがある．

例題 5〕 $L[u]=u''(x)$，$l_h$ は§2 例題 1 の左辺で定義されるものをとる．このとき
$U$ として $C^2$ をとれば，$l_h$ は $L$ の近似演算子になる．
$U$　〃　$C^3$　〃　，$l_h$ は近似度 1 で $L$ を近似する．
$U$　〃　$C^4$　〃　，$l_h$ は近似度 2 で $L$ を近似する．
ただし，ノルムは (*4.1*) による．

**定義 2**　$U$ で $l_h$ が $L$ の（近似度 $\kappa$ の）近似差分演算子であるとき

$$l_h[u_h]=f_h, \quad \text{ただし} \quad f_h=f|_{G_h}. \tag{III}$$

を微分方程式 (*I*) の $U$ での（近似度 $\kappa$ の）近似差分方程式という．

注 5〕 (*II*) とせず (*III*) としたのは，後の都合のためである．(*III*) を $l_h[u_h]=f$ と略記することもある．

問題〕 $G_h$ を例題 4 と同じとする．次の各項につき (*4.2*) の第一式が成り立つ条件を考えよ．ただし，$u_n=u_h(x_n)$．

（i）　$\|u\|_U^2=\int_0^1 u^2(x)dx, \quad \|u_h\|_{U_h}^2=h\sum_{n=1}^{N} u_n^2.$

（ii）　$\|u\|_U=\max_x|u(x)|+\max_x|u'(x)|, \quad \|u_h\|_{U_h}=\max_n|u_n|+\max_n\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{h}\right|.$

## §5　近似差分演算子の構成（常微分）

1)　$L$ を $x$ を自変数とする常微分演算子, G を一次元の有限区間とし, $L$ の近似差分演算子 $l_h$ を構成する方法を述べる．格子は $x = x_n = nh$ ($h$ 正定数, $n$ 整数) で定められるものをとり, $U$ は考える範囲で十分滑らかな任意の函数の集合, $F = \{L[u]; u \in U\}$, $U_h = \{u|_{G_h}, u \in U\}$, $F_h = \{l_h[u_h], u_h \in U_h\}$ とする．ノルムは大体 (*4. 1*) によるとするが, 得られた結果はたいていのノルムに対して通用する．

さて, すでに §2 で見たように $L$ が各階微分 $d^p/dx^p$ である場合を片づければ直ちに一般の $L$ に対して $l_h$ を作ることができる．たとえば, $L[u] = F(x, u', u'')$ で $F(x, \xi, \eta)$ が $\xi, \eta$ に関し連続微分可能ならば, §2の結果により

$$l_h[u_h] = F(x_h, h^{-1}D_h u_h, h^{-2}\delta_h{}^{(2)}u_h)$$

は $L$ の近似差分演算子である．したがって以下には $d^p/dx^p$ の近似差分演算子の作り方のみを述べる．

2)　ここで考察するのは任意の格子点 $\mathrm{P}_n(x_n)$ での $u^{(p)}(x_n) \equiv u_n{}^{(p)}$ を適当な有限個の格子点 $\mathrm{P}_{n+\nu}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) での $u$ の値 $u_{n+\nu}$ の線型結合で近似する，すなわち $n$ によらない定数 $c_\nu$ を用いて

$$h^{-p}\sum_\nu c_\nu u_{n+\nu} \doteqdot u_n{}^{(p)}$$

ならしめることである．($c_\nu$ を $n$ によらないとしたから,) 一般性を失わずに $n=0$ にとり, 問題をより正確に述べると次のようになる．有限個の点 $\mathrm{P}_\nu(\nu h)$, 自然数 $p, \kappa$ が指定されたとき十分滑らかな任意の $u$ に対し

$$A_h[u]_0 \equiv h^{-p}\sum_\nu c_\nu u_\nu = u_0{}^{(p)} + R, \qquad R = O(h^\kappa) \tag{5. 1}$$

なるように $c_\nu$ を定めよ．この問題の解は $\mathrm{P}_\nu$ の個数を $l$ とするとき $l \geqq p+\kappa$ ならば解が存在し，特に等号の場合は一義的である．実際 (*5. 1*) の $u_\nu = u(\nu h)$ を Taylor の公式により $\nu h$ で展開し，両辺で $h$ の各次数について係数を比較すると，$c_\nu$ に対する条件として,

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\nu c_\nu \nu^\rho = 0 \qquad (0 \leqq \rho \leqq p+\kappa-1, \rho \neq p), \\ &\sum_\nu c_\nu \nu^p = p\,! \end{aligned}\right\} \tag{5. 2}$$

が得られる．$l = p+\kappa$ ならば (*5. 2*) を $c_\nu$ についての連立方程式とみなしたとき係数の行列式は Vandermonde の行列式 (I, 28 頁) となり，したがって 0

ではない．応用上の見地からは差分方程式の構造が簡単になることが望ましいので，$p, \kappa$ を指定されたとき，$l$ はできるだけ小さく，また $P_\nu$ は $P_0$ にできるだけ近くとる．(5.2) を解いて $c_\nu$ を見出した後，$R$ を評価するには，$u_\nu$ の展開において $(h\nu)^{p+\kappa}$ を乗数にもつ項を剰余項とする展開を用いて評価すればよい．$M_{p+\kappa} = \max|u^{(p+\kappa)}(x)|$ とすれば

$$|R| \leqq \frac{h^\kappa}{(p+\kappa)!}\left(\sum_\nu |c_\nu \nu^{p+\kappa}|\right)\cdot M_{p+\kappa} \tag{5.3}$$

が得られる．

注〕 $c_\nu$ を決定する問題は $P_\nu$ の配置がいわゆる数値微分の公式の適用を可能としているならば，公式を対照することにより直ちに解かれる．またそのような場合，数値微分の誤差の公式から (5.3) よりもよい $R$ の評価が得られることがある．ただし近似差分方程式を作る目的のためには本質的な優劣はない．

例題 1〕 $\{\nu\} = \{0, 1, 2\}$, $p = 1$, $\kappa = 2$. $c_0, c_1, c_2$ に対する方程式は (5.2) により

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + 2c_2 = 1, \quad c_1 + 4c_2 = 0.$$

これを解けば $c_0 = -3/2$, $c_1 = 2$, $c_2 = -1/2$. よって，

$$\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} = u_0' + R, \qquad R = O(h^2). \tag{5.4}$$

(5.3) によれば $|R| \leqq h^2 M_3$ となるが，実は数値微分の公式によれば次の評価を得る．

$$R = \frac{h^2}{3}\vartheta M_3, \qquad |\vartheta| \leqq 1. \tag{5.5}$$

(5.4), (5.5) とともに，これらと同様にして得られる

$$\frac{u_{-2} - 4u_{-1} + 3u_0}{2h} = u_0' + R, \quad R = \frac{h^2}{3}\vartheta M_3, \quad |\vartheta| \leqq 1 \tag{5.6}$$

は後に引用される．

例題 2〕 $\{\nu\} = \{-1, 0, 1\}, p = 2, \kappa = 1$. (5.2) により

$$c_{-1} + c_0 + c_1 = 0, \quad -c_1 + c_1 = 0, \quad c_1 + c_2 = 2.$$

これを解けば $c_1 = c_{-1} = 1$, $c_0 = -2$ となり，(5.3) を考慮すると $u \in C^3$ ならば既知の関係

$$h^{-2}[u_1 - 2u_0 + u_{-1}] = u_0'' + 3^{-1}h\vartheta M_3, \quad |\vartheta| \leqq 1$$

が得られる．(5.3) の評価式は $u \in C^{p+\kappa}$ を仮定したものであったが，今の場合 $u \in C^4$ を仮定すると §2 で見たように $h^{-2}[u_1 - 2u_0 + u_{-1}] = u_0'' + (12)^{-1}h^2\vartheta M_4$ が得られる．この種の事態は $\{\nu\}$ が 0 に関し対称であるときにおこる．

最後に若干の場合について結果のみを列挙する．ただし $u^{(p)} = \cdots + O(h^\kappa)$ である式では $u \in C^{p+\kappa}$ とする．

$$\begin{aligned} u_0' &= (2h)^{-1}[-u_{-1} + u_1] + O(h^2) \\ &= (12h)^{-1}[u_{-2} - 8u_{-1} + 8u_1 - u_2] + O(h^4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h^{-1}[-u_0+u_1]+O(h)\\
&= (2h)^{-1}[-3u_0+4u_1-u_2]+O(h^2)\\
&= (12h)^{-1}[-3u_{-1}-10u_0+18u_1-6u_2+u_3]+O(h^4),\\
u_0'' &= h^{-2}[u_{-1}-2u_0+u_1]+O(h^2)\\
&= (12h^2)^{-1}[-u_{-2}+16u_{-1}-30u_0+16u_1-u_2]+O(h^4)\\
&= h^{-2}[2u_0-5u_1+4u_2-u_3]+O(h^2),\\
u_0''' &= (2h^3)^{-1}[-u_{-2}+2u_{-1}-2u_1+u_2]+O(h^2)\\
&= (8h^3)^{-1}[u_{-3}-8u_{-2}+13u_{-1}-13u_1+8u_2-u_3]+O(h^4)\\
&= (2h^3)^{-1}[-3u_{-1}+10u_0-12u_1+6u_2-u_3]+O(h^2),\\
u_0^{(4)} &= h^{-4}[u_{-2}-4u_{-1}+6u_0-4u_1+u_2]+O(h^2).
\end{aligned}
$$

注意〕 たとえばGで定義された函数 $u$ に対し $u=O(h^\kappa)$ の意味は十分小さな $h$ に対し，$h$ およびGの点によらない定数 $M$ が存在して $|u|\leqq h^\kappa M$ が成り立つこととする．

## §6　近似差分演算子の構成（偏微分）

1）　$L$ が $x, y$ を自変数とする偏微分演算子，G がある領域であるとし，$P_{m,n}(a+mh, b+nk)$ を格子点とする長方形格子をとる．$U, \cdots, F_h$ およびノルムは前節に準ずる．今度も近似差分方程式は各階偏微分商の近似式がわかれば直ちに書き下すことができる．ただ $h\to 0$ のときは $k$ は $h$ と同じ order で0に近づくものとする．$k$ の $h$ に対する order を定めておかないと形式的に同じ差分演算子がある微分演算子を近似するものになったりならなかったりする．

例題〕 $L[u]\equiv \partial u/\partial y-\partial u/\partial x$ とする．$(u_{m+1,n}+u_{m-1,n})/2=u_{m,n}+O(h)$ を考慮して

$$l_h[u]=k^{-1}[u_{m,n+1}-(u_{m+1,n}+u_{m-1,n})/2]-(2h)^{-1}[u_{m+1,n}-u_{m-1,n}]$$

とおく．$u$ を十分滑らかな函数とすれば Taylor 展開を用いて

$$R\equiv L[u]-l_h[u]=-\frac{k}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{h^2}{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\cdots$$

が得られる．これから，$h\to 0$ のとき $k/h=c$（定数）ならば $R=O(h)$ であり，$k/h^2=C$（定数）ならば一般に $R$ は0に近づかないことが判る．

注〕 後で扱う放物型，双曲型の問題では安定性の条件から格子間隔の間に成り立つべき条件が要請される．そこでは必ずしも $k/h=$ 一定 のように格子間隔の order は同じではない．本章では楕円型のみを扱うので $k/h=$ 一定，特に $k=h$ の場合を考えて用が足りる．

2）　基本的な微分演算子，特にラプラシアン $\nabla^2$ などについて述べる．

$$M_{p,x}=\max_{x,y}\left|\frac{\partial^p u}{\partial x^p}\right|,\quad M_{q,y}=\max_{x,y}\left|\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right|$$

とおき，また $M_n$ で $u$ の $n$ 階のすべての偏導函数の絶対値の上界を表わす．さて $x, y$ の一方のみについての偏導函数を近似するのには常微分の場合の結果が

そのまま利用できる．たとえば $P_{0,0}(x, y)$ において

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{h}[u_{1,0}-u_{0,0}]+\frac{h}{2}\vartheta M_{2,x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{k}[u_{0,1}-u_{0,0}]+\frac{k}{2}\vartheta M_{2,y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2h}[u_{1,0}-u_{-1,0}]+\frac{h^2}{3}\vartheta M_{3,x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}[u_{-1,0}-2u_{0,0}+u_{1,0}]+\frac{h^2}{12}\vartheta M_{4,x}$$

などが得られる．ただし $\vartheta$ は $|\vartheta|\leqq 1$ なる量を一般に表わす．したがってこれらの線型結合，たとえば $\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ に対し

$$h^{-2}[u_{1,0}-2u_{0,0}+u_{-1,0}]+k^{-2}[u_{0,1}-2u_{0,0}+u_{0,-1}]=\nabla^2 u+R,$$

ただし

$$R=O(h^2+k^2)=\frac{h^2}{12}\vartheta M_{4,x}+\frac{k^2}{12}\vartheta M_{4,y}$$

が得られる．特に正方形格子 $h=k$ の場合は

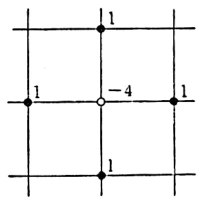
$$\Diamond_h u_{0,0}=u_{1,0}+u_{-1,0}+u_{0,1}+u_{0,-1}-4u_{0,0} \tag{6.1}$$

で $\Diamond_h u$ を定義すれば（第 6.1 図参照）

$$\nabla^2 u=h^{-2}\Diamond_h u+R, \tag{6.2}$$

$$|R|\leqq h^2[M_{4,x}+M_{4,y}]/12\leqq h^2 M_4/6 \tag{6.3}$$

が得られる．



第 6.1 図

$x, y$ 両方についての偏微分商を近似するのには前節 2) の方法に従うこともできる．ただしその際，常微分の場合とは異なってその上の値を採り入れる格子点の配置が適当でなければ解は存在しない．たとえば直線 $y=$ 一定 上の格子点での値を用いて $\partial u/\partial y, \partial^2 u/\partial x\partial y$ を近似するのは不可能である．また一般に微分の階数 $p$ と近似度 $\kappa$ を指定されたとき関連する格子点の個数は $p+\kappa-1$ より大きい．むしろ次のようにするのが便利であろう．（以下正方形格子に限る．）たとえば $x, y$ それぞれについての微分商の近似式から発見的に

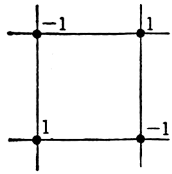
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\approx\frac{1}{h}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{1,0}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{0,0}\right]\approx\frac{1}{h}\left[\frac{u_{1,1}-u_{1,0}}{h}-\frac{u_{0,1}-u_{0,0}}{h}\right]$$

$$\approx h^{-2}[u_{1,1}+u_{0,0}-u_{1,0}-u_{0,1}]\equiv A_h[u]$$

が得られる．つぎに，あらためて $A_h[u]$ の各項を $P_{0,0}$ のまわりで Taylor 展開して近似性を確かめ，近似度，誤差を見出すのである．実際

$$A_h[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{h}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right)+\cdots$$

であるから近似度1の近似であることがわかる．一般に$L$が二つの演算子$L_1, L_2$の積（演算子としての）であるとき，$L_1, L_2$それぞれの近似演算子$l_{h1}, l_{h2}$が与えられたならば，$l_{h1}$と$l_{h2}$との積を$L$の近似演算子にとれることがしばしばである．たとえば，重調和演算子



第 6.2 図

$$\nabla^4 u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \tag{6.4}$$

を考える．(6.2)により$\nabla^2 u\approx h^{-2}\Diamond_h u$であるから$\nabla^4 u\approx h^{-4}\Diamond_h{}^2 u$となることが期待される．

$$\begin{aligned}\Diamond_h{}^2 u_{0,0}&=\Diamond_h u_{1,0}+\Diamond_h u_{-1,0}+\Diamond_h u_{0,1}+\Diamond_h u_{0,-1}-4\Diamond_h u_{0,0}\\&=20u_{0,0}-8(u_{1,0}+u_{0,1}+u_{-1,0}+u_{0,-1})\\&\quad+2(u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1}+u_{1,-1})+(u_{2,0}+u_{0,2}+u_{-2,0}+u_{0,-2})\end{aligned} \tag{6.5}$$

であるが，右辺の$u_{m,n}$を$P_{0,0}$のまわりでTaylor展開してみると

$$h^{-4}\Diamond_h{}^2 u=\nabla^4 u+R, \tag{6.6}$$

$$R=\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4}+\frac{\partial^6}{\partial y^6}\right)u+\cdots=O(h^2) \tag{6.7}$$

が得られる．剰余項を持ったTaylor展開により$R$を評価した結果は

$$R=\frac{h^2}{9}\vartheta M_6,\qquad |\vartheta|\leqq 1 \tag{6.8}$$

となる．

## §7　微分方程式の解に対する近似度

1)　差分法による近似解法の数値的な結果の精度をよくするには格子を細かくするのが一つの方法である．しかし格子をあまりに細かくすれば$G_h$に含まれる格子点が多くなり，差分方程式を代数方程式とみなしたとき未知数が多くなりすぎて計算に必要な労力が過大となる．格子間隔は一定とすれば近似度の高い差分方程式を採用することが望ましい．しかし前二節の方法により近似度の高い差分演算子$l_h$を作ると$G_h$の一点における$l_h[u_h]$の表式が複雑になるのが一般である．これに対しこの節および次節で述べる方法は近似すべき微分方程式を満足する函数に対し，比較的簡単な構造を持ちながら近似度の高い差分演算子を作る方法である．

2) その中の函数について近似度を考える函数族 $U$ を

$$L[u]=f \tag{I}$$

を満足する $u$ のみからなるものとする. $f$ は固定して考えるが境界条件を課していないから上のような $u$ は一般に無数にある. 前二節では $U$ は十分滑らかな任意の函数の集合であったが, 今度は $L, f$ の具体的性質を反映するように $U$ を制限したわけである. さて $U$ を上のように定めたときの近似度を**微分方程式の解に対する近似度**という.

Laplace 方程式 $\nabla^2 u=0$, Poisson 方程式 $\nabla^2 u=f$ について例示しよう.

まず

$$Lu\equiv\nabla^2 u=0 \tag{7.1}$$

を満足する十分滑らかな函数の集合を $U$ とする. すなわち $U$ は調和函数からなる. (6.1) で定義した $\diamondsuit_h u$ の点 $(x,y)$ における値を Taylor 展開で表示すると

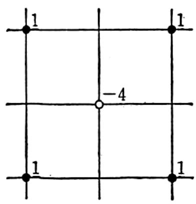
$$\diamondsuit_h u=2\left[\frac{h^2}{2!}\nabla^2 u+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{h^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+\cdots\right] \tag{7.2}$$

が得られる. 一方

$$\square_h u_{0,0}=u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1}+u_{1,-1}-4u_{0,0} \tag{7.3}$$

で $\square_h$ を定義すれば (第 7.1 図), 再び Taylor 展開により

$$\square_h u=4\left[\frac{h^2}{2!}\nabla^2 u+\frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)\right.$$
$$+\frac{h^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)$$
$$\left.+\cdots\right] \tag{7.4}$$



第 7.1 図

を得る. ここで定数 $a, b$ を $a\diamondsuit_h u+b\square_h u$ において $h^2$ を係数とする項が $\nabla^2 u$ に等しく, $h^4$ を係数とする項が $\nabla^4 u$ に比例するように定める. それには

$$2\frac{h^2}{2!}a+4\frac{h^2}{2!}b=1,\qquad 2\left(\frac{2a}{4!}+4\frac{b}{4!}\right)=4\frac{6}{4!}b$$

を解けばよい. すなわち $a=2/3h^2$, $b=1/6h^2$ となる. これを用いて

$$l_h[u]=\frac{1}{6h^2}(4\diamondsuit_h u+\square_{hh}u) \tag{7.5}$$

とおけば, (7.2), (7.4) から (もっと高次の項もとり) 簡単な計算により

$$\left.\begin{aligned} l_h[u] &= \nabla^2 u + \frac{2}{4!}h^2\nabla^4 u + \frac{2}{6!}h^4\left(\nabla^6 u + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\nabla^2 u\right) + R, \\ R &= \frac{2}{3}\frac{h^6}{8!}\left[3\nabla^8 u + 16\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\nabla^4 u + 20\frac{\partial^8 u}{\partial x^4\partial y^4}\right] + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

となることがわかる．したがって $u\in U$, すなわち $\nabla^2 u=0$ ならば（さらに $u\in C^8$),

$$l_h[u] - \nabla^2 u = \frac{40}{3}\frac{1}{8!}h^6\frac{\partial^8 u}{\partial x^4\partial y^4} + \cdots = O(h^6)$$

となり，$l_h$ の $\nabla^2$ に対する近似度は 6 である．$\nabla^2 u=0$ を仮定せず，単に $u$ は十分滑らかであるとすれば近似度は 2 にすぎない．

次に

$$L[u] \equiv \nabla^2 u = f \qquad (f\ は一定) \tag{7.7}$$

を考え，$U$ は $\nabla^2 u = f$ を満足する $u$ のみからなるとする．$U$ は線型空間ではない．$l_h$ を (7.5) で定義されたものとし，$u\in U$ とすれば (7.6) に $\nabla^2 u = f$ を用いて，次式を得る．

$$l_h[u] = \nabla^2 u + \frac{2}{4!}h^2\nabla^2 f + \frac{2}{6!}h^4\left(\nabla^4 f + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}f\right) + O(h^6),$$

ただし $f\in C^6$ とする．$f$ は与えられた函数であるから $\nabla^2 f, \nabla^4 f$ などは既知とみなしてよい．そこで

$$l_h'[u] = l_h[u] - \frac{2}{4!}h^2\nabla^2 f - \frac{2}{6!}h^4\left(\nabla^4 f + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right) \tag{7.8}$$

で $l_h'$ を定義すれば，$u\in U$ に対し

$$l_h'[u] - \nabla^2 u = O(h^6)$$

となり $l_h'$ の $\nabla^2$ に対する近似度は 6 である．$l_h'$ は同次線型ではないことに注意しておこう．

$\nabla^2 f, \nabla^4 f$ の計算が面倒である場合，あるいは格子点上での $f$ の値のみを用いることが望ましい場合には (7.8) の右辺の第三項を省略し，$\nabla^2 f$ を $h^{-2}\diamondsuit_h f$ でおきかえる．(6.2) より $h^2\nabla^2 f = \diamondsuit_h f + O(h^4)$ が成り立つから，

$$l_h''[u] = l_h[u] - \frac{2}{4!}\diamondsuit_h f \tag{7.9}$$

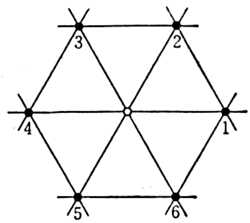
に対して $l_h''[u] - \nabla^2 u = O(h^4)$, $u\in U$ が得られ，$l_h''$ の $\nabla^2$ に対する近似度は 4 となる．$l_h''$ を用いた近似方程式

$$l_h''[u_h] = f|_{G_h} \tag{7.10}$$

を格子点 $P_{0,0}$ について具体的に書いておこう．$u_h(P_{m,n})$ を $u_{m,n}$ と書き，左辺に含まれる $f_{m,n}$ を右辺に移項し，最後に $2h^2$ を乗じて分母を払えば次式を得る．

$$\begin{aligned}&2(u_{1,1}+u_{-1,-1}+u_{1,-1}+u_{-1,1})+8(u_{1,0}+u_{-1,0}+u_{0,1}+u_{0,-1})-40u_{0,0}\\&\quad = h^2[8f_{0,0}+(f_{1,0}+f_{-1,0}+f_{0,1}+f_{0,-1})].\end{aligned} \tag{7.11}$$

3)　**正三角形格子での $\nabla^2 u$ の近似**　格子間隔が $h$ である正三角形格子（§3 例題 2）の任意の格子点 $P_0$ での $\nabla^2 u$ の値を $P_0$ およびその六つの近傍点 $P_1, P_2, \cdots, P_6$ での $u$ の値を用いて近似しよう．



第 7.2 図

$P_0$ から $P_k$ $(k=1,\cdots,6)$ に向う単位ベクトルの成分を $(\alpha_k, \beta_k)$ とすれば

$$u_k - u_0 = h\left(\alpha_k\frac{\partial}{\partial x}+\beta_k\frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\alpha_k\frac{\partial}{\partial x}+\beta_k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u+\cdots$$

である．この式を $k$ に関して 1 から 6 まで加えると

$$\sum_k \alpha_k = \sum_k \beta_k = \sum_k \alpha_k\beta_k = 0, \quad \sum_k {\alpha_k}^2 = \sum_k {\beta_k}^2 = 3$$

などを用いて

$$\sum_{k=1}^{6} u_k - 6u_0 = \frac{3}{2!}h^2\nabla^2 u + \frac{9}{4}\frac{h^4}{4!}\nabla^4 u + \frac{h^6}{6!}\left(\frac{33}{16}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\cdots\right)+\cdots$$

が得られる．よって正三角形格子上の差分演算子 $l_h$ を

$$l_h[u]_0 = \frac{2}{3h^2}\left(\sum_{k=1}^{6} u_k - 6u_0\right) \tag{7.12}$$

とすれば

$$l_h[u] = \nabla^2 u + h^2\nabla^4 u/16 + O(h^4)$$

となる．これから $u \in C^4$ ならば $l_h$ は $\nabla^2$ の近似度 2 の近似演算子であり，$u \in C^6$，$\nabla^2 u = 0$ ならば $l_h$ の $\nabla^2$ に対する近似度は 4 となることがわかる．

## §8　多点近似法

1)　この節で述べる方法は Collatz により**多点近似法** (Mehrstellenverfahren) と名づけられた方法である．この方法を $\nabla^2 u = f$ に適用すると (7.11) と同じ差分方程式が得られる．まず常微分方程式

$$u'' - qu = f \tag{8.1}$$

の場合について説明しよう．格子間隔を $h$, 任意の格子点 $P_0$ の座標を $x$, その左右の格子点をそれぞれ $P_{-1}, P_1$ とする．さて $u$ を十分滑らかな任意の函数とし，$u, x$ によらない定数 $a_{-1}, a_0, a_1, A_{-1}, A_0, A_1$ を

$$\sum_{k=-1}^{1}\{a_k u_k + A_k u_k''\} = O(h^4) \tag{8.2}$$

が成り立つように決定することを問題とする．ただし $u_k'' = u''(P_k)$.

$u_k, u_k''$ の $P_0$ のまわりでの Taylor 展開

$$u_k = \sum_{\rho=0}\frac{(kh)^\rho}{\rho!}u_0^{(\rho)}, \quad u_k'' = \sum_{\rho=0}\frac{(kh)^\rho}{\rho!}u_0^{(\rho+2)}$$

を (8.2) の左辺に代入すると

$$\sum_{\rho=0}^{1}\frac{h^\rho}{\rho!}u_0^{(\rho)}\sum_{k=-1}^{1}a_k k^\rho + \sum_{\rho=2}\frac{h^{\rho-2}}{\rho!}u_0^{(\rho)}\sum_{k=-1}^{1}\{h^2 a_k k^\rho + \rho(\rho-1)A_k k^{\rho-2}\}$$

となる．$h^\rho$ $(\rho=0,\cdots,3)$ の係数が任意の $u_0^{(\rho)}$ $(\rho=0,1,\cdots)$ に対して 0 となる条件は連立方程式

$$\left.\begin{aligned}
&a_{-1}+a_0+a_1=0, \quad -a_{-1}+a_1=0,\\
&h^2(a_{-1}+a_1)+2(A_{-1}+A_0+A_1)=0,\\
&h^2(-a_{-1}+a_1)+6(-A_{-1}+A_1)=0,\\
&h^2(a_{-1}+a_1)+12(A_{-1}+A_1)=0,\\
&h^2(-a_{-1}+a_1)+20(-A_{-1}+A_1)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

(8.3) は同次であるが，第二式と第四式から第六式が導かれる故 $a_k, A_k$ のうち一つを任意として解が存在する．実際 $a_1 = 1/h^2$ として解くと

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{h^2}, \quad a_0 = -\frac{2}{h^2}, \quad A_1 = A_{-1} = -\frac{1}{12}, \quad A_0 = -\frac{10}{12}$$

が得られる．これを (8.2) に代入すると

$$h^{-2}[u_{-1}-2u_0+u_1]-(12)^{-1}[u_{-1}''+10u_0''+u_1''] = O(h^4). \tag{8.4}$$

一方，$u$ が (8.1) を満足すれば $u_k'' = q_k u_k + f_k$ であるからこれと (8.4) の左辺を 0 とおいた式から $u_k''$ を消去すれば (8.1) の近似方程式が $O(h^4)$ を誤差として得られることになる．いいかえれば

$$l_h[u]_0 = h^{-2}[u_{-1}-2u_0+u_1]-(12)^{-1}[q_{-1}u_{-1}+f_{-1}+10q_0u_0+10f_0+q_1u_1+f_1] \tag{8.5}$$

で $l_h$ を定義し，$U$ として (8.1) を満足する $u$ からなる集合をとり，$L[u]=$

$u''-qu-f$ とおけば $l_h$ は $L$ の $U$ での近似度 4 の近似差分演算子になる．ただしその際 $f$ は固定して考えている．$\{k\}$ を適当にえらべば，(8.2) で $u''$ の代りに任意の階数の微分商 $u^{(p)}$ が用いられ，右辺が $O(h^{\kappa})$ となっている式の $a_k$，$A_k$ を上と同様にして決定できる．たとえば

$$\left.\begin{aligned}&h^{-1}[u_1-u_{-1}]-3^{-1}[u'_{-1}+4u_0'+u_1']=O(h^4),\\&h^{-3}[u_2-2u_1+2u_{-1}-u_{-2}]-2^{-1}[u_1'''+2u_0'''+u'''_{-1}]=O(h^4)\end{aligned}\right\}\quad(8.6)$$

などが得られる．これらを用意しておけば任意の微分方程式に対して上と同じ取扱いをすることが可能である．たとえば $pu''+qu'+ru=f$ に対しては (8.4), (8.6) の左辺を 0 とした式と $p_ku_k''+q_ku_k'+r_ku_k=f_k$ $(k=-1,0,1)$ とから $u_k'', u_k'$ を消去してえられる方程式を近似差分方程式の格子点 $P_0$ での式と解釈すればよい．

2) 偏微分の場合に移り $\nabla^2u=f$ に多点近似法を適用してみよう．(8.2) に相当して，格子点 $P_{m,n}$ で

$$a\nabla^2u+bS_h^{(1)}[\nabla^2u]+cu+dS_h^{(1)}[u]+eS_h^{(2)}[u]=O(h^4)$$

が成り立つように $a, b, c, d, e$ を定める．ただし

$$\left.\begin{aligned}&S_h^{(1)}[u]_{m,n}=u_{m+1,n}+u_{m-1,n}+u_{m,n+1}+u_{m,n-1},\\&S_h^{(2)}[u]_{m,n}=u_{m+1,n+1}+u_{m-1,n+1}+u_{m-1,n-1}+u_{m+1,n-1}.\end{aligned}\right\}\quad(8.7)$$

(8.3) を導いたときと同様に Taylor 展開を利用して $a, b, c, d, e$ に対する連立方程式を導き，それを解けば

$$8h^2\nabla^2u+h^2S_h^{(1)}[\nabla^2u]+40u-8S_h^{(1)}[u]-2S_h^{(2)}[u]=O(h^6)\quad(8.8)$$

が得られる．($h^2$ で分母を払った.) (8.8) の左辺を 0 とおき $\nabla^2u_{m,n}=f_{m,n}$ を代入すると

$$8h^2f+h^2S_h^{(1)}[f]+40u-8S_h^{(1)}[u]-2S_h^{(2)}[u]=0$$

が得られる．この式が (7.11) と同じものであることは容易にわかる．Collatz (編末文献 [2]) には $\nabla^2u$, $\nabla^4u$ に関して (8.8) と同じ役割の種々の公式が与えられている．

例題〕 多点近似法を固有値問題 $u''=\lambda u, u(0)=u(1)=0$ に適用する．$x_n=nh$ $(n=1,\cdots,N-1, h=1/N)$ を格子点とする．(8.5) を参照すれば近似固有値問題は

$$\left.\begin{aligned}&h^{-2}\delta^{(2)}u_n=\rho\frac{1}{12}(u_{n+1}+10u_n+u_{n-1})\qquad(1\leqq n\leqq N-1),\\&u_0=u_N=0,\quad ただし\quad u_n=u_h(x_n).\end{aligned}\right\}\quad(8.9)$$

*(8.9)* は§2例題2と全く同様に解かれる．固有（格子点）函数は $u_h^{(k)}=C\cdot\sin k\pi x$ であり，それに対する固有値は

$$\rho_k=\frac{12}{h^2}\frac{\cos k\pi h-1}{\cos k\pi h+5} \qquad (k=1,\cdots,N-1)$$

である．$\rho_k-\lambda_k=O(h^4)$ $(\lambda_k=-k^2\pi^2)$ であり，§2例題2の結果よりも良い近似値が得られている．

## §9　近似境界条件，近似境界値問題の定義

1)　微分方程式に関する境界値問題では領域 G で成り立つべき微分方程式

$$L[u]=f \tag{I}$$

のほかに G の境界 $\Gamma$ の若干の部分（全体であることもある）$\Gamma_i(i=1,2,\cdots,s)$ で成り立つべき境界条件

$$\gamma_i[u]=\varphi_i \qquad (i=1,\cdots,s) \tag{II}$$

が課せられる．*(I)* の近似差分方程式に関してはすでに述べた．ここでは *(II)* を近似する（差分方程式に対する）境界条件について考える．後章で扱う初期値問題の初期条件も時間 $t$ を自変数の一つとする空間の領域での境界条件と考えればこの節で議論の対象になる．$\Gamma_i,\Gamma_j$ は $i\neq j$ であっても点集合として同じこともある．たとえば $\Gamma$ 全体で $u|_\Gamma=\varphi_1$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\varphi_2$ という境界条件が課せられているときは $\Gamma_1,\Gamma_2$ はともに $\Gamma$ である．

*(II)* の左辺の $\gamma_i$ は G+$\Gamma$ で定義された函数 $u$ を $\Gamma_i$ で定義された函数 $\gamma_i[u]$ にうつす演算子で，ふつうは $L$ より低い階数の微分演算子である．$\gamma_i$ に"近い"差分演算子の定義をする準備として下記の $U,\Phi_i,U_h,\Phi_{hi}$ およびその中でのノルムの導入をする趣旨は§4の議論を復習してもらえば改めて説明するまでもあるまい．また，便宜的な言葉づかい，記法に対して§4で提出した規約はここでも同種の事柄に対して有効であるとしておく．$U$ を $\gamma_i[u]$ $(i=1,\cdots,s)$ が意味をもつ G+$\Gamma$ で定義された函数 $u$ のある集合，$\Phi_i$ を $u\in U$ ならば $\gamma_i[u]\in\Phi_i$ であるような $\Gamma_i$ 上で定義された函数の集合とする．さらに $U,\Phi_i$ にはそれぞれノルム $\|\ \ \|_U$, $\|\ \ \|_{\Phi_i}$ が定義されているとする．§4の場合と同様に後の議論でしばしば採用するノルムは

$$\|u\|_U=\max_{G+\Gamma}|u|,\quad \|\varphi_i\|_{\Phi_i}=\max_{\Gamma_i}|\varphi_i| \tag{9.1}$$

である．

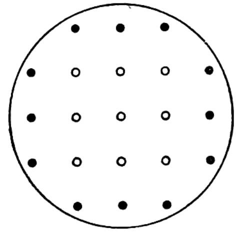
注 1]　*(II)* で $s=1$ であるときは添字 $i$ を省略するものとする．

2) Gに対して格子を導入し，$G_h$などの定義は§4, 2)と同様とする．$G_h$で定義された$u_h$に対する境界条件が$(II)$に“近い”ものであるようにするにはどうすればよいか．まず例について考えてみよう．

例題 1〕 Gを区間$(0,1)$とし$x_n=nh\ (n=0,\cdots,N)$を格子点とする．$x_0=0$における境界条件を考える．

$\gamma[u]\equiv u(0)=a$（$a$は定数）ならば格子点函数$u_h$に対する類似の境界条件は$r_h[u_h]\equiv u_h(x_0)=a$とすべきであろう．また$\gamma[u]\equiv u'(0)=a$であれば，これを近似する境界条件として$r_h[u_h]\equiv h^{-1}[u_h(x_1)-u_h(x_0)]=a$を採ってもよいと考えられる．何故なら$h\to 0$のとき任意の$x=0$で微分可能な$u$に対し$r_h[u]\to\gamma[u]$となるからである．これと同じ理由で$G_h$の境界点のうちGの境界Γ上にある点では，$\gamma_i[u]$を形式的に近似している差分演算子$r_{hi}$を作り$r_{hi}[u_h]=\varphi_i$とすればよいことが推察できる．

例題 2〕 Gを円$x^2+y^2<1$とし$x=mh, y=nh$で定められる正方形格子をとる．境界条件$\gamma[u]\equiv u|_\Gamma=\varphi$を考える．$G_h$の境界$\Gamma_h$の点は今度は特別の場合のほかΓの上にはない．したがって$\Gamma_h$で$\varphi$は定義されていないわけである．そこで$\varphi$の値を次の方法で$\Gamma_h$上に移す．$\Gamma_h$上の任意の点を$P_h$, $P_h$に最も近いΓ上の点をPとする．さて$\Gamma_h$上の函数$\varphi_h$を“$\varphi_h(P_h)=\varphi(P)$”で定義する．一般にこの規則によりΓ上の函数$\varphi$から作られる$\Gamma_h$上の函数を$[\varphi]_h$で表わすことにする．このとき$u_h$に対する境界条件として$r_h[u_h]\equiv u_h|_{\Gamma_h}=[\varphi]_h$をとれば，これは$\gamma[u]=\varphi$の近似となっていると考えてよい．何故なら$u$をG+Γで連続な任意の函数とするとき$h\to 0$につれて$[\gamma[u]]_h\to\gamma[u]$となるからである．この例でわかるように$\Gamma_h$がΓに含まれないときはΓ上の函数を$\Gamma_h$に移す操作が必要である．



第 9.1 図 $\bullet\in\Gamma_h$

上の例で述べた考えを一般化する．$G_h$の境界$\Gamma_h$の若干の部分を$\Gamma_{hi}\ (i=1,2,\cdots,s)$とし，（差分）演算子$r_{hi}$は$G_h$で定義された$u_h$を$G_h$の境界$\Gamma_{hi}$で定義された函数$r_{hi}[u_h]$に写すとする．$U_h$を$r_{hi}[u_h]$が意味を持つような，$G_h$で定義された$u_h$のある集合とし，$\Phi_{hi}$を$u_h\in U_h$ならば$r_{hi}[u_h]\in\Phi_{hi}$であるような$\Gamma_{hi}$上の函数の集合とする．$u\in U$であるとき$r_{hi}[u]$の意味は§4の$l_h[u]$と同様に解釈される．また$U_h, \Phi_{hi}$にそれぞれ$\|\ \ \|_{U_h}$, $\|\ \ \|_{\Phi_{hi}}$で表わされるノルムを定義する．一方，$[\ \ ]_{hi}$を任意の$\varphi_i\in\Phi_i$を$[\varphi_i]_{hi}\in\Phi_{hi}$に対応させるある演算子とする．ただしノルムおよび$[\ \ ]_{hi}$に対し次の条件を要請する．

$h\to 0$のとき

任意の$u\in U$に対し $\quad \|u\|_{U_h}\to\|u\|_U,$ (9.2)

任意の $\varphi_i \in \Phi_i$ に対し　$\|[\varphi_i]_{hi}\|_{\Phi_{hi}} \to \|\varphi_i\|_{\Phi_i}$　$(i=1, \cdots, s)$.　　(9.3)

(9.2) は (4.2) と同じ条件であり $\|\ \ \|_U$, $\|\ \ \|_{U_h}$ の定義が類似のものであれば成り立つ．たとえば

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{G_h} |u_h| \tag{9.4}$$

とすれば $u$ が連続ならばこれと (9.1) に対し (9.2) は満足される．(9.3) は大ざっぱにいえば $h\to 0$ とともに $\Gamma_{hi}$ が $\Gamma_i$ に近づき $[\ \ \ ]_{hi}$ が"連続的"な操作であり，両辺のノルムが類似のものであれば成り立つ．もちろん具体的な問題については $[\ \ \ ]_{hi}$ の定義に応じて (9.3) を確かめる必要がある．以上を前提として次の定義をする．

**定義 1**　任意の $u \in U$ に対し $h\to 0$ のとき

$$\|[\gamma_i[u]]_{hi} - r_{hi}[u]\|_{\Phi_{hi}} \to 0 \tag{9.5}$$

ならば，$u_h \in U_h$ に対する境界条件 $r_{hi}[u_h] = [\varphi_i]_{hi}$ を $\gamma_i[u] = \varphi_i$ の $U$ での**近似境界条件**という．また任意の $u \in U$ に対して $0<h<h_0$ のとき

$$\|[\gamma_i[u]]_{hi} - r_{hi}[u]\|_{\Phi_{hi}} < h^\kappa M_i \qquad (\kappa>0) \tag{9.6}$$

が成り立つような $h_0>0$ が存在するとき境界条件の**近似度**は $\kappa$ であるという．ただし $M_i$ は $u$ によっても $h$ にはよらない定数である．

注 2〕 $\Gamma_{hi} \subseteqq \Gamma_i$ のときは $[\varphi_i]_{hi} = \varphi_i|_{\Gamma_{hi}}$ にとる．

注 3〕 (9.6) の左辺が 0 のときは**近似は正確**であるという．これはたとえば $\Gamma_{hi} \subseteqq \Gamma_i$ で境界条件が第一種のときおこる．

3)　**定義 2**　微分方程式の境界値問題

$$L[u] = f, \qquad (I) \qquad\qquad \gamma_i[u] = \varphi_i \quad (i=1, \cdots, s) \qquad (II)$$

に対し，差分方程式の境界値問題

$$l_h[u_h] = f_h, \qquad (III) \qquad\qquad r_{hi}[u_h] = \varphi_{hi} \quad (i=1, \cdots, s), \qquad (IV)$$

ただし，

$$f_h = f|_{G_h^0}, \quad \varphi_{hi} = [\varphi_i]_{hi}$$

が $U$ での**近似境界値問題**であるといわれるのは，(III) が §4 の定義の意味で (I) の $U$ での近似差分方程式であり，(IV) がこの節の定義の意味で（すべての $i$ に関し）(II) の $U$ での近似境界条件になっているときである．

差分法による近似解法は近似境界値問題の解をもとの境界値問題の近似解とみなす方法である．

## §10 近似境界条件の構成（常微分）

1) 領域 G を $x$ 軸上の区間 $(a,b)$ とする．$x_n=a+nh$ $(h=(b-a)/N$, $n=0,\cdots,N)$ を格子点にとれば $G_h$ の境界はもとの領域の境界 $x=a, x=b$ と一致する．したがってこの場合 $[\quad]_{hi}$ なる操作は不用である．すなわち $[\varphi_i]_{hi}=\varphi_i$．左の境界点につき述べる．ノルムは絶対値の最大をとる．

(i) $u(a)=\varphi$ の近似境界条件は $u_h(x_0)=\varphi$，近似は正確である．

(ii) $u'(a)=\varphi$ の近似境界条件は左辺の微分商を近似する差分商でおきかえればよい．ただし $u_h(x_n), n\geqq 0$，を用いるものを使う．

$h^{-1}[u_h(x_1)-u_h(x_0)]=\varphi$, $u\in C^2$，とすれば近似度は 1．

$(2h)^{-1}[-3u_h(x_0)+4u_h(x_1)-u_h(x_2)]=\varphi$, $u\in C^3$，とすれば近似度は 2 である．右端の境界点 $b$ における条件 $u'(b)=\varphi$ を扱うときは $u'(b)$ を $b$ より左にある $x_n$ での $u_h$ の値を用いて近似する式を使えば全く同様である．

(iii) $u''(a)=\varphi$ に対して $h^{-2}[u_h(x_0)-2u_h(x_1)+u_h(x_2)]=\varphi$ をとれば近似度は 1．$(u\in C^3)$

(iv) $u'(a)+\sigma u(a)=\varphi$ に対しても，またより一般の境界条件に対しても，近似境界条件の作り方は上のことから明らかであろう．

2) 上の (ii) では $u'(a)=\varphi$ を近似するのに三つの格子点 $x_0, x_1, x_2$ の値を使って近似度 2 としている．**多点近似法**に相当する取扱いとして次のようにしてもよい．たとえば上の境界条件が微分方程式 $u''-qu=f$ につけられた境界条件であるとすると，$G_h$ をひろげて $x_{-1}=a-h$ を $G_h$ にとり入れる．そうして $u'(a)=\varphi$ を

$$[u_h(x_1)-u_h(x_{-1})]/2h=\varphi \tag{10.1}$$

でおきかえ，一方 $x_0$ において微分方程式を近似する関係

$$h^{-2}[u_h(x_1)-2u_h(x_0)+u_h(x_{-1})]-q_0u_h(0)=f_0 \tag{10.2}$$

を課す．(*10.1*), (*10.2*) は $u$ が十分滑らかな函数であるとすると近似度は 2 である．実際 (*10.1*), (*10.2*) から $u_h(x_{-1})$ を消去すると

$$r_h[u_h]\equiv\frac{u_h(x_1)-u_h(x_0)}{h}-\frac{h}{2}[q_0u_h(x_0)+f_0]=\varphi \tag{10.3}$$

となる．(*10.3*) の $r_h[u_h]$ は $U$ として微分方程式を満足し，かつ十分滑らかな $u$ の集合をとれば前節の意味で近似度 2 となっていることがわかる．

この方法は実用性の高い方法であり偏微分方程式の場合にも適用可能であるが，立ち入った議論は省略する．ただこの取扱いは $u$ が境界でも微分方程式を満足し，かつ十分滑らかであることを近似の基礎とするものであり，無反省に乱用すればかえって大きな誤差を招く原因となり得ることを注意しておく．

## §11　近似境界条件の構成（偏微分）

G を $xy$ 平面の領域として格子は $x_m = a+mh, y_n = b+nh$ によって定められるものとする．格子点 $(x_m, y_n)$ における格子点函数 $u_h$ の値を $u_{m,n}$ と書く．境界条件 $(IV)$ の $\Gamma_i$ が全体の境界 $\Gamma$ となっている場合を述べるが，一般の場合への類推は容易であろう．$\Gamma$ は十分滑らかと仮定する．

1）$\Gamma$ 上の函数 $\varphi$ に $\Gamma_h$ 上の函数 $[\varphi]_h$ を対応させる操作 $[\quad]_h$ は以下次の (i), (ii) のいずれかをとるものとする．$P_h$ を $\Gamma_h$ 上の任意の点とし $P_h$ における $[\varphi]_h$ の値を $[\varphi]_h(P_h)$ と書く．

（i）$[\varphi]_h(P_h) =$ "$P_h$ に最も近い点 $\Gamma$ 上の点での $\varphi$ の値."

（ii）$[\varphi]_h(P_h) =$ "$\Gamma$ と格子を作る直線群との交点のうち $P_h$ に最も近い点における $\varphi$ の値."

いずれにしても $P_h \in \Gamma$ ならば $[\varphi]_h(P_h) = \varphi(P_h)$，特に $\Gamma_h \subset \Gamma$ ならば $[\varphi]_h = \varphi$ である．また $\varphi$ および $\Gamma$ が十分滑らかであればふつうのノルムに対して (9.3) は成り立つ．

2）**第一種境界条件**　$\gamma[u] \equiv u|_\Gamma = \varphi.$　　(11.1)

$[\quad]_h$ を 1) で定められたものとし $r_h[u_h] \equiv u_h|_{\Gamma_h}$ とする．すなわち

$$u_h|_{\Gamma_h} = [\varphi]_h \tag{11.2}$$

とすれば $u \in C^1$ ならば絶対値の最大値をノルムとして (11.2) の (11.1) に対する近似度は 1 となる．実際 $|\mathrm{grad}\, u| \leqq M$ とすれば

$$|[\gamma[u]]_h - r_h[u]| \leqq hM. \tag{11.3}$$

場合によっては $\Gamma$ の近くで格子点をふやし，その格子領域の境界点がすべて $\Gamma$ の上にあるようにする工夫も採用される．それに伴って差分方程式も補正される必要がおこる．微分方程式が $\nabla^2 u = f$ である場合について説明しよう．格子を作る直線群と $\Gamma$ との交点の集合を $S_h$ とする．（$\Gamma$ の一部が線分になっており，その線分と格子を作る直線の一つとが重なるときは，その線分に直交する直線との交点をとる．）$G_h + S_h = \overline{G}_h$ とすれば $\overline{G}_h$ の境界点は $S_h$ である．したがって $u|_\Gamma = \varphi$ なる境界条件は $u_h|_{S_h} = \varphi$ で正確に近似される．一方 $\nabla^2 u = f$ を近似する差分方程式は $G_h$ の内点についてはもとのままである．すなわち $h^{-2}\Diamond_h u_h = f$ をとる．$\overline{G}_h$ から $S_h$ および $G_h$ の内部 $G_h{}^i$ を引きさった集合 $S_h'$ に属する任意の点を $P_0(x, y)$ とする．$P_0$ では新しく $\nabla^2 u = f$ の近似方程式を作らねばならない．$P_0$ に最も近い $\overline{G}_h$ の四つの格子点を $P_\alpha(x+\alpha h, y)$, $P_{\alpha'}(x-\alpha' h, y)$, $P_\beta(x, y+\beta h)$, $P_{\beta'}(x, y-\beta' h)$ とする．$0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' \leqq h$ は明らかである．いま $u \in C^3$ とすると Taylor 展開により

$$u_\alpha=u_0+\alpha h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\alpha h)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(h^3),$$
$$u_{\alpha'}=u_0-\alpha' h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\alpha' h)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(h^3).$$

この二式から $\partial u/\partial x$ を消去すれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{h^2}\left[\frac{u_\alpha}{\alpha(\alpha+\alpha')}-\frac{u_0}{\alpha\alpha'}+\frac{u_{\alpha'}}{\alpha'(\alpha+\alpha')}\right]+O(h),$$

全く同様に

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{h^2}\left[\frac{u_\beta}{\beta(\beta+\beta')}-\frac{u_0}{\beta\beta'}+\frac{u_{\beta'}}{\beta'(\beta+\beta')}\right]+O(h),$$

よって

$$l_h[u]_0=\frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{\alpha+\alpha'}\left(\frac{u_\alpha}{\alpha}+\frac{u_{\alpha'}}{\alpha'}\right)+\frac{1}{\beta+\beta'}\left(\frac{u_\beta}{\beta}+\frac{u_{\beta'}}{\beta'}\right)-\left(\frac{1}{\alpha\alpha'}+\frac{1}{\beta\beta'}\right)u_0\right]$$

とおけば $l_h[u]_0=f_0$ は $\mathrm{P}_0$ で $\nabla^2 u=f$ を '近似度' 1 で近似している

注〕 上の取扱いから格子間隔が定数でない場合の近似差分方程式の作り方が推察できよう.

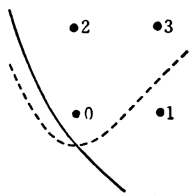
3）**第二種境界条件**　n を $\Gamma$ の内向き法線, $\partial/\partial n$ を n の方向に沿っての微分とし

$$\gamma[u]\equiv\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi \tag{11.4}$$

を考える. この近似境界条件 $r_h[u_h]=[\varphi]_h$ を作る. $[\varphi]_h$ は 1）で述べたようにとる. n の方向余弦を $\alpha,\beta$ とすれば $\alpha,\beta$ は $\Gamma$ 上で（法線が存在する点で）定義された函数である. 有限個の角点をのぞき $\alpha,\beta$ は弧長に対して十分滑らかな函数とする. 角点では $\alpha,\beta$ の値を $\Gamma$ にそって両側からその点に近づいたときの平均値と定義する. さて $\alpha,\beta$ を用いると

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{11.5}$$

この右辺を $\Gamma_h$ 上の任意の点 $\mathrm{P}_0$ で近似するには $\alpha,\beta$ をそれぞれ 1）で述べた $[\quad]_h$ を用いて $[\alpha]_h,[\beta]_h$ でおきかえ, $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ を $\mathrm{P}_0$ の近傍点のうち $\mathrm{G}_h$ に属する点における函数値を用いて近似すればよい.



第 11.1 図

たとえば第 11.1 図のような $\mathrm{P}_0\in\Gamma_h$ に対しては

$$r_h[u_h]_0=[\alpha]_h\frac{u_1-u_0}{h}+[\beta]_h\frac{u_2-u_0}{h}$$

とする. ただし $u_i=u_h(\mathrm{P}_i)(i=0,1,2)$. またもし図の点線が $\Gamma$ であるとする

と $P_0$ の両側の近傍点が $G_h$ に属していないが，このような場合には $u\in C^2$ ならば $(\partial u/\partial x)_0=(\partial u/\partial x)_2+O(h)$ であることを考慮して $(\partial u/\partial x)_0$ を $h^{-1}(u_3-u_2)$ でおきかえる．

4)　その他第三種境界条件 $(\partial u/\partial n)-\sigma u=\varphi$ などの境界条件の近似の仕方も上述のことから明らかであろう．

## §12　近似境界値問題の解の存在

1)　微分方程式の境界値問題を近似する差分方程式の境界値問題

$$\left.\begin{array}{ll} l_h[u_h]=f_h, & ただし\quad f_h=f|_{G_h^0}, \\ r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}, & ただし\quad \varphi_{hi}=[\varphi]_{hi} \quad (1\leqq i\leqq s) \end{array}\right\} \tag{12.1}$$

の解が存在するかどうかは $l_h, r_{hi}, f_h, \varphi_{hi}$ の具体的な性質がわからなければ答えられない．多くの場合もとの微分方程式の解が存在するための条件と類似の条件を仮定すれば解 $u_h$ の存在を証明できる．特に $l_h, r_{hi}$ が同次線型であるときは (12.1) は $G_h$ に含まれる格子点での $u_h$ の値を未知数とする連立一次方程式である．したがって G が有界であるときには[1]有限次元の連立一次方程式の理論から (12.1) の解が任意の $f_h, \varphi_{hi}$ に対して存在するための条件は非同次項 $f_h, \varphi_{hi}$ を 0 としたときの解が $u_h\equiv 0$ のみであることとなる．またそのとき解は一義的である．解の一義性と解の存在とが本質的に同じであるのは微分方程式の場合と著しく異なることである．

2)　G を $x$ 軸上の区間 $(a,b)$ とする．境界値問題

$$L[u]=u''-qu=f, \qquad ただし\quad q\geqq 0, \tag{12.2}$$

$$u(a)=\alpha, \quad u(b)=\beta \tag{12.3}$$

を近似する境界値問題

$$l_h[u_h]=h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]-q_nu_n=f_n \quad (1\leqq n\leqq N-1), \tag{12.4}$$

$$u_0=\alpha, \quad u_N=\beta \tag{12.5}$$

を考える．ただし $x_n=a+nh$ $(Nh=b-a,\ n=0,\cdots,N)$ を格子点とし，$u_n$ は $u_h(x_n)$ を表わす．(12.4), (12.5) の解が存在することを示すのに 1) に従って $f_n\equiv 0$, $\alpha=\beta=0$ から $u_n\equiv 0$ を導く．よって

$$u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}-h^2q_nu_n=0 \qquad (1\leqq n\leqq N-1), \tag{12.4'}$$

$$u_0=u_N=0 \tag{12.5'}$$

(1)　連立方程式として未知数の個数と方程式の個数とが一致するものとする．

とする．さて任意の $u_n, v_n$ $(0\leqq n\leqq N)$ について

$$\sum_{n=1}^{N-1} v_n\delta^{(2)}u_n = v_N D'u_N - v_0 Du_0 - \sum_{n=0}^{N-1} Dv_n\cdot Du_n \tag{12.6}$$

が成り立つ．($\delta^{(2)}, D', D$ については §2 注をみよ．)(*12.6*) は部分積分に対応する関係であり直接検証することは容易である．(*12.4'*) に $u_n$ を乗じ $n$ について 1 から $N-1$ まで加え，(*12.6*), (*12.5'*) を考慮すれば

$$\sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)^2 + h^2\sum_{n=1}^{N-1} q_n u_n{}^2 = 0 \tag{12.7}$$

が得られる．$q\geqq 0$ により (*12.7*) の各項は $\geqq 0$ であり，したがって，0 でなくてはならない．$u_{n+1}=u_n$ $(0\leqq n\leqq N-1)$ であるから $u_n=$一定．再び (*12.5'*) により $u_n\equiv 0$ となる．

次に (*12.3*) の代りに

$$u'(a)-\sigma_1 u(a)=\alpha,\quad u'(b)+\sigma_2 u(b)=\beta,\qquad \text{ただし}\quad \sigma_1,\sigma_2\geqq 0$$

が微分方程式の境界条件であり，これを

$$\left.\begin{aligned}&(2h)^{-1}[-3u_0+4u_1-u_2]-\sigma_1 u_0=\alpha,\\ &(2h)^{-1}[3u_N-4u_{N-1}+u_{N-2}]+\sigma_2 u_N=\beta\end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

でおきかえたとする．(*12.4*), (*12.8*) の解が存在することを示すには (*12.8*) で $\alpha=\beta=0$ とした

$$\left.\begin{aligned}&3u_0-4u_1+u_2+2h\sigma_1 u_0=0,\\ &3u_N-4u_{N-1}+u_{N-2}+2h\sigma_2 u_N=0\end{aligned}\right\} \tag{12.9}$$

と (*12.4'*) とから $u_n\equiv 0$ を出せばよい．(*12.4'*) で $n=1$ とした式と (*12.9*) の第一式とから $u_2$ を消去すると $u_1=u_0(1+\sigma_1 h)\Big/\left(1-\frac{1}{2}q_1h^2\right)$．これを用いて

$$u_1-u_0=u_0\left(\sigma_1 h+\frac{1}{2}q_1h^2\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}q_1h^2\right)\equiv Au_0 \tag{12.10}$$

とすれば，$q_1h^2<2$ のとき $A\geqq 0$ を得る．同様にして

$$u_N-u_{N-1}=-u_N\left(\sigma_2 h+\frac{1}{2}q_{N-1}h^2\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}q_{N-1}h^2\right)\equiv -Bu_N \tag{12.11}$$

とすれば $q_{N-1}h^2<2$ のとき $B\geqq 0$ がわかる．そこで (*12.4'*) に $u_n$ を乗じ $n$ について 1 から $N-1$ まで加え (*12.6*), (*12.10*), (*12.11*) を考慮すれば

$$\sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)^2+h^2\sum_{n=1}^{N-1}q_nu_n{}^2+Au_0{}^2+Bu_N{}^2=0 \tag{12.12}$$

となる．$\max(q_1h^2, q_{N-1}h^2)<2$ ならば $A\geqq 0$, $B\geqq 0$, また $q\geqq 0$ であるから (12.12) の左辺の各項は $\geqq 0$ であり，したがって 0 でなければならない．$u_{n+1}=u_n$ $(0\leqq n\leqq N-1)$ より $u_n\equiv C$ (定数) であることがわかるが $C\neq 0$ ならば $q_n\equiv 0$, $A=B=0$. (12.10), (12.11) より $A=B=0$, $q_1=q_{N-1}=0$ ならば $\sigma_1=\sigma_2=0$. 結局

$$q_n\equiv 0 \quad (1\leqq n\leqq N-1), \qquad \sigma_1=\sigma_2=0 \tag{12.13}$$

の場合以外は $u_n\equiv 0$ である．

問題〕 (12.13) の場合に (12.4), (12.8) の解が存在するために $\alpha, \beta, f_n$ の満たすべき条件を述べよ．

最後に (12.2), (12.3) に対して (8.5) による多点近似法を適用した場合の解の存在を吟味しよう．$f\equiv 0$ とすると (8.5) は

$$\delta^{(2)}\left(u-\frac{h^2}{12}qu\right)_n-h^2q_nu_n=0 \qquad (1\leqq n\leqq N-1) \tag{12.14}$$

と書ける．これと $u_0=u_N=0$ とから $u_n\equiv 0$ を導く．(12.14) に $u_n-(12)^{-1}h^2q_nu_n$ をかけてから和をとり，前と同様にすると

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left\{D\left(u-\frac{h^2}{12}qu\right)_n\right\}^2+h^2\sum_{n=1}^{N-1}q_n\left(1-\frac{h^2}{12}q_n\right)u_n{}^2=0$$

が導かれる．さらに $h^2q_n<12$ $(1\leqq n\leqq N-1)$ を仮定すると前と同じ論法により $u_n\equiv 0$ が示される．

3)　楕円型微分演算子

$$L[u]=A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}-qu \tag{12.15}$$

の境界値問題

$$L[u]=f, \quad \gamma[u]\equiv u|_\Gamma=\varphi \tag{12.16}$$

を考える．$A, C, D, E, q$ は G (有界) で定義された函数で，

$$A>0, \quad C>0, \quad q\geqq 0 \tag{12.17}$$

と仮定する．$\mathrm{P}_{m,n}(a+mh, b+nh)$ を格子点とする正方形格子をとり，

$$\partial u/\partial x \approx (u_{m+1,n}-u_{m-1,n})/2h,$$
$$\partial^2u/\partial x^2 \approx (u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n})/h^2$$

などのおきかえにより $L[u]$ の近似作用素 $l_h$ を作る．

$$\left.\begin{aligned}&B^{(0)}=2\left(A+C+\frac{h^2}{2}q\right), \quad B^{(1)}=A+\frac{h}{2}D, \quad B^{(2)}=C+\frac{h}{2}E,\\&B^{(3)}=A-\frac{h}{2}D, \quad B^{(4)}=C-\frac{h}{2}E\end{aligned}\right\} \tag{12.18}$$

とおき，$u_{m,n}=u_h(\mathrm{P}_{m,n})$, $B_{m,n}^{(i)}=B^{(i)}(\mathrm{P}_{m,n})$ $(0\leqq i\leqq 4)$ と書くことにすれば

$$l_h[u_h]\equiv B_{m,n}^{(1)}u_{m+1,n}+B_{m,n}^{(2)}u_{m,n+1}+B_{m,n}^{(3)}u_{m-1,n}+B_{m,n}^{(4)}u_{m,n-1}-B_{m,n}^{(0)}u_{m,n} \tag{12.19}$$

となる．近似境界値問題 $l_h[u_h]=f_h$, $u_h|_{\Gamma_h}=\varphi_h$ の解が存在することを見るために $f_h\equiv 0, \varphi_h\equiv 0$ から $u_h\equiv 0$ が導かれるかどうかを調べる．次の補題を説明しよう．

**補題** (*12.17*) および $|hD|<2A$, $|hE|\leqq 2C$ ならば $l_h[u_h]=0$ を満たす任意の $u_h$ は $\mathrm{G}_h$ の内部 $\mathrm{G}_h{}^i$ で正の最大値をとることも，負の最小値をとることもない．ただし $u_h\equiv$定数 となる場合をのぞく．

（証明） $u_h$ のかわりに $-u_h$ を考えれば負の最小値に関する主張は正の最大値に関する主張に帰着する．よって後者のみを考える．帰謬法による．$u_h$ が定数ではなく，$\mathrm{G}_h{}^i$ で正の最大値 $M$ をとるとする．このとき “$\mathrm{P}_{m,n}\in\mathrm{G}_h{}^i$, $u_h(\mathrm{P}_{m,n})=M$, $\mathrm{P}_{m,n}$ の四つの近傍点のうち少くとも一点で $u_h$ の値は $M$ より小さい” ような点 $\mathrm{P}_{m,n}$ が存在する．(でないと $u_h\equiv M$ となる．) (*12.18*) により

$$B^{(0)}=B^{(1)}+B^{(2)}+B^{(3)}+B^{(4)}+h^2q,$$

また一方仮定により $B^{(i)}>0$ であるから

$$l_h[u_h]_{m,n}<B^{(1)}M+\cdots+B^{(4)}M-B^{(0)}M=-h^2q_{m,n}M\leqq 0.$$

かくして $l_h[u_h]_{m,n}<0$ となるが，これは $l_h[u_h]=0$ と矛盾する． （証終）

上の補題は $l_h[u_h]=0$ ならば $|u_h|$ の最大値は $\Gamma_h$ で到達されることを意味する．いまは $\Gamma_h$ 上で $u_h\equiv 0$ とするのであるから望む結果 $u_h\equiv 0$ ($\mathrm{G}_h$ で) が得られる．

一般に楕円型微分方程式の境界値問題の近似境界値問題の解の存在は 1) でのように定符号の二次形式の吟味に帰着するか，2) でのように‘最大値の原理’を利用して証明されることが多い．

**問題〕** (*12.4*), (*12.5*) の解の存在を 3) の論法により示せ．

## §13 適正さ．安定性

1) 近似境界値問題の解 $u_h$ が，$h\to 0$ につれて，もとの微分方程式の境界値問題の解 $u$ に収束するか否かは理論的にも応用上にも重要である．この収束性を論ずるのに微分方程式の解の存在を仮定しない流儀もある．むしろ逆に $u_h$ の収束性から $u$ の存在を証明する方法も見受けられる．しかし本書では紙面の都合と応用数学としての趣旨から，収束性を議論するときには微分方程式の解

の存在を仮定する立場をとる．以下で収束性の研究の中核となるのは“適正さ”の概念である．この概念を導入することにより統一的な記述が可能となり，得られた結果は後章で扱う初期値問題をも包括する一般性をもっている．

なお，§4, §9 でやや大げさすぎる準備をしたのはこの節の議論を可能にするためであった．そこでの概念，記号，仮定をそのままうけつぐ．

2）**適正さの定義**　差分方程式の境界値問題

$$l_h[u_h]=f_h, \tag{III}$$

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi} \qquad (i=1,\cdots,s) \tag{IV}$$

を考える．もし十分小さな $h$ については (*III*), (*IV*) の解 $u_h$ が任意の $f_h\in F_h$, $\varphi_{hi}\in\Phi_{hi}$ に対して存在し，かつ $f_h$, $\varphi_{hi}$ に対して連続（$h$ について一様）に依存するとき (*III*), (*IV*) は**適正 (correct)** であるという．すなわち，

**定義 1**　次の条件 (i), (ii) が満足されるとき (*III*), (*IV*) は適正であるという．

（i）ある $h_0>0$ が存在し，$0<h<h_0$ ならば解 $u_h\in U_h$ が任意の $f_h\in F_h$, $\varphi_{hi}\in\Phi_{hi}$ に対して存在する．

（ii）任意の $\varepsilon>0$ に対して次の条件を満足する $h$ によらない正数 $\delta$ が存在する．

$$u_h\in U_h,\ \ l_h[u_h]=f_h,\ \ r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi},\ \ f_h\in F_h,\ \ \varphi_{hi}\in\Phi_{hi};$$
$$\tilde{u}_h\in U_h,\quad l_h[\tilde{u}_h]=\tilde{f}_h,\quad r_{hi}[\tilde{u}_h]=\tilde{\varphi}_{hi},\quad \tilde{f}_h\in F_h,\quad \tilde{\varphi}_{hi}\in\Phi_{hi};$$
$$\|\tilde{f}_h-f_h\|_{F_h}<\delta,\quad \|\tilde{\varphi}_{hi}-\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}<\delta \qquad (1\leqq i\leqq s) \tag{13.1}$$

ならば $0<h<h_0$ のとき

$$\|\tilde{u}_h-u_h\|_{U_h}<\varepsilon. \tag{13.2}$$

注意〕　正確には適正さについていうときには格子点函数の集合 $U_h, F_h, \Phi_{hi}$，その中で定義されたノルムを指示しなければならない．実際同じ問題がノルムの定め方により適正であったり，なかったりすることがある．具体的な問題を扱うときにはその際採用する函数の集合，ノルムに応じて (*13.1*), (*13.2*) の条件を検証するわけである．

$l_h, r_{hi}$ が線型ならばよく知られているように[(1)]連続性と有界性とは同値であ

(1)（証明）$T$ をノルム空間 $\mathfrak{X}$ 全体で定義された線型演算子とする，まず $T$ が有界である，すなわち $\|Tu\|\leqq C\|u\|$ が任意の $u\in\mathfrak{X}$ に対して成立するような定数 $C$ が存在すると仮定する．このとき，$\|Tu_n-Tu_0\|\leqq C\|u_n-u_0\|$ により，$u_n\to u_0$ につれて $Tu_n\to Tu_0$ となること，すなわち，$T$ が連続であることが得られる．逆に，$T$ が連続であると仮定すれば，特に $u=0$ における連続性により，任意の正数 $\varepsilon$ に対して，$\|u\|\leqq\delta$ なる限り $\|Tu\|\leqq\varepsilon$ が成立するような正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$ が存在する．よって，任意の $v\in\mathfrak{X}$, $(v\neq 0)$ に対して $u=\delta v/\|v\|$ とおけば $\|u\|=\delta$ であるから $\|Tu\|\leqq\varepsilon$. これより $\|Tv\|\leqq(\varepsilon/\delta)\|v\|$ となり $T$ の有界性が得られる．

る．したがって線型の場合は定義の条件 (ii) を次の (ii′) でおきかえてよい．

(ii′) $0<h<h_0$ のとき $u_h, h$ によらない定数 $N, N_i$ が存在し

$$\| u_h \|_{U_h} \leqq N \| f_h \|_{F_h} + \sum_{i=1}^{s} N_i \| \varphi_{hi} \|_{\Phi_{hi}} \tag{13.3}$$

が成り立つ．

さらに領域Gが有界で $l_h, r_{hi}$ が線型ならば有限次元の連立一次方程式の理論を適用することができて，(13.3) で $f_h=0, \varphi_{hi}=0$ とすれば $u_h=0$ となることにより，(ii′) から (i) も導かれる．またすでに (13.3) からわかることであるが，線型の問題に対しては (ii) の条件で $\tilde{f}, \tilde{\varphi}_{hi}, \tilde{u}_h$ を 0 としてよい．すなわち $\|f_h\|_{F_h}<\delta$, $\|\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}<\delta$ のとき $\|u_h\|<\varepsilon$ がいえればよい．

例題〕 微分方程式の境界 (初期) 値問題

$$u'(x)=f(x), \quad u(0)=\varphi$$

は $x_n=nh$ $(n=0,1,\cdots,h>0)$ を格子点とするとき

$$\left.\begin{array}{ll} l_h[u_h] \equiv (u_{n+1}-u_n)/h = f_n & (n=0,1,\cdots), \\ r_h[u_h] \equiv u_0 = \varphi, & \text{ただし} \quad u_n = u_h(x_n), \ f_n = f(x_n) \end{array}\right\} \tag{13.4}$$

で近似される．$G_h$ として $0 \leqq x \leqq 1$ に含まれる格子点の集合をとることにすれば $n$ の範囲は $0 \leqq nh \leqq 1$ から定まる．さて (13.4) の解は明らかに

$$u_n = \varphi + \sum_{k=0}^{n-1} hf_k \tag{13.5}$$

となる．したがって $|\varphi|<\delta$, $\max_n |f_n|<\delta$ とすれば $|u_n|<\delta+nh\delta$. よって $nh \leqq 1$ だから $|u_n|<2\delta$. 上の結果から $U_h, F_h$ を $G_h$ で定義されたすべての函数の集合，$\Phi_h$ を $\{x_0\}$ で定義されたすべての函数の集合とし，ノルムは絶対値の最大値をとるとすれば適正さが得られる．

$G_h$ として半直線 $0 \leqq x$ に含まれる格子点をとりノルムとして上記のものをとれば (13.4) は適正ではない．たとえば $f_n \equiv 1$ とすると (13.5) から $u_n=\varphi+nh$, すなわち $u_h=\varphi+x$ となり $x\to\infty$ のとき $u_h\to\infty$ となるからである．しかし $\|u_h\|_{U_h}$ のノルムだけを

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_n \frac{|u_n|}{1+x_n}$$

に変更すれば，$\|f\|_{F_h}<\delta$, $\|\varphi\|_{\Phi_h}<\delta$ のとき $\|u_h\|<\delta$ が得られて (13.4) は適正となる．

注〕 たとえば，$F_h$ を定める条件を断らなければ，$F_h$ は $G_h{}^0$ で定義されたすべての函数の集合であるとみなすことにする．$U_h, \Phi_{hi}$ についても同様．

3) **安定性の定義** 適正さの概念に近い概念として次の安定性がある．安定性それ自身について具体的に議論するのは後章の初期値問題を扱うときであるが，適正さに対する補助の概念として導入しておく．

$(III)$, $(IV)$ の解が境界条件の右辺 $\varphi_{hi}$ $(i=1, \cdots, s)$ を固定したとき，差分方程式の右辺 $f_h$ に連続（$h$ について一様）に依存するならば $(III)$, $(IV)$ は方程式に関して安定であるという．また $(IV)$ のうち若干個のものを考えてそれ以外の境界条件および方程式の右辺を固定したとき，$(III)$, $(IV)$ の解が固定していない境界条件に連続（$h$ について一様）に依存するならば $(III)$, $(IV)$ は後者（右辺を固定しない）境界条件に関して安定であるという．すなわち

**定義 2**　次の条件 (i), (ii) が成り立つとき $(III)$, $(IV)$ は**方程式に関して安定**である．

(i)　定義1の (i) に同じ．

(ii)　定義1の (ii) で $\tilde{\varphi}_{hi}=\varphi_{hi}$ $(i=1, \cdots, s)$ としたとき $\|f_h-\tilde{f}_h\|_{F_h}<\delta$ ならば $\|\tilde{u}_h-u_h\|_{U_h}<\varepsilon$ が成り立つ．

**定義 3**　$(III)$, $(IV)$ が，例えば最初の $p$ 個の**境界条件**

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi} \qquad (1\leqq i\leqq p) \tag{13.6}$$

**について安定**であるというのは次の条件 (i), (ii) が成立することである．

(i)　定義1の (i) に同じ．

(ii)　定義 1 の (ii) で $\tilde{f}_h=f_h, \tilde{\varphi}_{hi}=\varphi_{hi}$ $(p+1\leqq i\leqq s)$ とするとき $\|\tilde{\varphi}_{hi}-\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}<\delta$ $(1\leqq i\leqq p)$ ならば，$\|\tilde{u}_h-u_h\|_{U_h}<\varepsilon$ が成り立つ．

$l_h$, $r_h$ が線型であれば適正さの場合と同様に連続性を有界性でおきかえてよい．すなわち解の存在は仮定するとして定義2, 3 はそれぞれ次のことに帰着する．

(ii′)　方程式に関して安定であるとは，

$$l_h[u_h]=f_h, \quad r_{hi}[u_h]=0 \qquad (i=1, \cdots, s)$$

の解に対し

$$\|u_h\|_{U_h}\leqq N\|f_h\|_{F_h} \tag{13.7}$$

が成り立つような $u_h$, $h$ $(0<h<h_0)$ によらない定数 $N$ が存在する．

(ii″)　境界条件 (13.6) に関して安定であるとは

$$l_h[u_h]=0,$$

$$r_{hi}[u_h]=0 \quad (p+1\leqq i\leqq s), \quad r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi} \quad (1\leqq i\leqq p)$$

の解 $u_h$ に対し

$$\|u_h\|_{U_h} \leqq \sum_{1\leqq i\leqq p} N_i \|\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}} \qquad (13.8)$$

が成り立つような $u_h$, $h$ $(0<h<h_0)$ によらない定数 $N_i$ $(1\leqq i\leqq p)$ が存在する．

(*III*), (*IV*) が適正であるならば方程式についても，任意の境界条件についても安定である．この逆は $l_h$, $r_{hi}$ が線型であれば正しい．すなわち

**定理** $l_h$, $r_{hi}$ $(i=1, \cdots, s)$ が線型であり，(*III*), (*IV*) が方程式についても，境界条件のおのおのについても安定であれば (*III*), (*IV*) は適正である．

証明の詳細は読者の演習に委せるが，線型の場合には (*III*), (*IV*) の解が方程式を同次にしたときの解と境界条件を同次にしたときの解との重ね合せであることを考慮し，(*13.7*), (*13.8*) から (*13.3*) を導くのが方針である．

## §14 収束性．誤差評価に関する定理

微分方程式の境界値問題 (*I*), (*II*)

$$L[u]=f, \qquad (I) \qquad\qquad \gamma_i[u]=\varphi_i \qquad (i=1, \cdots, s) \qquad (II)$$

の解と，その近似境界値問題

$$L_h[u_h]=f, \qquad (III) \qquad\qquad r_{hi}[u_h]=[\varphi_i]_{hi} \qquad (i=1, \cdots, s) \qquad (IV)$$

の解との関係について，次の定理は差分法による近似解法の理論的根拠を与えるものである．

**定理 1** 次の条件 (i)～(iii) が満足されるならば，$h\to 0$ のとき (*III*), (*IV*) の解 $u_h$ は (*I*), (*II*) の解 $u$ に

$$\|u-u_h\|_{U_h}\to 0 \qquad (14.1)$$

の意味で収束する．

( i ) (*I*), (*II*) の解 $u$ が存在し，$u\in U$.

( ii ) $U$ において (*III*), (*IV*) は §4, §9 の定義に従って (*I*), (*II*) の近似方程式，近似境界条件である．

(iii) $U_h$ に関して (*III*), (*IV*) は適正である．

ただし，$U$, $U_h$ およびその他の必要な函数族，またそれらの中で定義されたノルムは §4, §9 の仮定を満足するものとする．

(証明) $[\varphi_i]_{hi}=\varphi_{hi}$, $l_h[u]=\tilde{f}$, $r_{hi}[u]=\tilde{\varphi}_{hi}$ とおく．一方格子点上では $f=l_h[u_h]=L[u]$. また $\varphi_{hi}=[\gamma_i[u]]_{hi}$ である．さて $0<h<h_0$ とする．

(ii) の仮定から $h\to 0$ のとき，

$$\tilde{f}-f=l_h[u]-L[u]\to 0 \qquad (\|\ \|_{F_h} \text{につき}),$$

$$\tilde{\varphi}_{hi}-\varphi_{hi}=r_{hi}[u]-[\gamma_i[u]]_{hi}\to 0 \qquad (\| \quad \|_{\Phi_{hi}} \text{ につき}).$$

よって $h$ を十分小さくすれば，$\delta$ を (*13. 1*) でのものとして，

$$\|\tilde{f}-f\|_{F_h}<\delta, \quad \|\tilde{\varphi}_{hi}-\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}<\delta$$

となる．適正さの仮定から $\|u-u_h\|_{U_h}<\varepsilon$ が得られる．　　　　　（証終）

**系**　$l_h$, $r_{hi}$ $(i=1,\cdots,s)$ が線型であり，$i=p+1,\cdots,s$ については (*IV*) の境界条件が (*II*) の境界条件の正確な近似境界条件になっているならば，定理1の条件 (iii) のかわりに (iii′) “(*III*), (*IV*) は方程式および境界条件 ($i=1,\cdots,p$) のおのおのについて安定である．”

としてもよい．

誤差の評価に関しては次の定理が成り立つ．

**定理 2**　定理 1 の仮定に加えて，$l_h$, $r_{hi}$ $(1\leqq i\leqq s)$ が線型であり，(*III*), (*IV*) の (*I*), (*II*) に対する近似度がともに $\kappa$ であるならば

$$\|u-u_h\|_{U_h}\leqq h^{\kappa}\left(MN+\sum_{i=1}^{s}M_iN_i\right) \tag{14. 2}$$

である．ただし $N, N_i$ は (*13. 3*) におけるもの，$M, M_i$ はそれぞれ (*4. 4*), (*9. 6*) におけるものである．

(証明)　$v_h=u_h-u$ とおく．$l_h[u_h]=f=L[u]$ により

$$l_h[v_h]=f-l_h[u]=L[u]-l_h[u].$$

また $r_{hi}[u_h]=[\varphi_i]_{hi}=[\gamma_i[u]]_{hi}$ により

$$r_{hi}[v_h]=[\varphi_i]_{hi}-r_{hi}[u]=[\gamma_i[u]]_{hi}-r_{hi}[u].$$

よって (*4. 4*), (*9. 6*) から

$$\|l_h[v_h]\|_{F_h}\leqq h^{\kappa}M, \quad \|r_{hi}[v_h]\|_{\Phi_{hi}}\leqq h^{\kappa}M_i$$

となる．上の不等式を (*13. 3*) で $u_h$, $f_h$, $\varphi_{hi}$ のかわりにそれぞれ $v_h$, $l_h[v_h]$, $r_{hi}[v_h]$ を用いた不等式に結びつければ (*14. 2*) が得られる．　　　　　（証終）

不等式 (*14. 2*) は右辺の定数が既知ならば誤差 $u-u_h$ の限界を与えるものである．しかし実際には $M, M_i$ は問題の解 $u$ の高階微分商の上界であることがふつうで，もとの境界値問題が解かれていないならば（解けるならば差分法で近似する必要はない!），その値を評価するのは困難である．実用上は $u$ の高階微分商のかわりに差分方程式の解 $u_h$ の対応する差分商を考察し，$M, M_i$ の値の“見当”をつけることが多い．そのようにして得られた評価式は少なくとも

論理的には根拠がないわけである．誤差の $h$ についての order だけならば，求める解が十分滑らかであるとすれば $M, M_i$ の存在さえわかれば (*14.2*) から断定することができる．

注〕 定理1から逆に $(I), (II)$ の解 $u$ に対して次の定理で述べられる事柄がわかる．証明は省略する．

**定理 3** 線型の $L, \gamma_i, l_h, r_{hi}$ については定理1と同じ条件のもとに

$$\|u\|_U \leqq N\|f\|_F + \sum_{i=1}^{s} N_i \|\varphi_i\|_{\Phi_i} \tag{14.3}$$

が成り立つ．たたし $N, N_i$ は (*13.3*) におけるものとする．

**定理 4** $(I), (II)$ に対して定理 1 の条件を満足するような差分方程式の境界値問題 $(III), (IV)$ を構成することが可能ならば $(I), (II)$ の解は $U$ で一義的である．

さらに $\Phi_i$ から $\Phi_{hi}$ への作用素 $[\quad]_{hi}$ が $0<h<h_0$ のとき $h$ について同等に連続ならば $(I), (II)$ の解は $f, \varphi_i$ に連続に依存する．すなわち境界値問題 $(I), (II)$ は適正である．

## §15 誤差の漸近形

§2の例題1の (ii) をみると誤差は $u_h - u = h^2 x(1-x)$ となっている．前節定理2により，そこでの仮定のもとに

$$u_h - u = h^\kappa w + o(h^\kappa) \qquad (h \to 0) \tag{15.1}$$

となることが期待されるが果してそうであるか．次の定理はこれに答えるものである．

**定理 1** 次の条件 (i)〜(iv) が満足されるならば (iv) で定義する $w$ について，$h \to 0$ のとき

$$\|h^{-\kappa}(u_h - u) - w\|_{U_h} \to 0 \tag{15.2}$$

の意味で，$h^{-\kappa}(u_h - u) \to w$ である．ただし $u, u_h$ はそれぞれ $(I), (II)$; $(III), (IV)$ の解とする．

( i ) $(III), (IV)$ は線型である．

( ii ) §14 定理1の仮定が満足される．

(iii) $(I), (II)$ の解 $u$ に対して

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} h^{-\kappa}(L[u] - l_h[u]) = \psi, \\ &\lim_{h\to 0} h^{-\kappa}([\gamma_i[u]]_{hi} - r_{hi}[u]) = \psi_i \qquad (i = 1, \cdots, s) \end{aligned}\right\} \tag{15.3}$$

が存在し，$\psi \in F, \psi_i \in \Phi_i$ となる．ただし (*15.3*) の収束は

$$\|h^{-\kappa}(L[u] - l_h[u]) - \psi\|_{F_h} \to 0,$$

$$\|h^{-\kappa}([\gamma_i[u]]_{hi}-r_{hi}[u])-[\psi_i]_{hi}\|_{\Phi_{hi}}\to 0$$

の意味である．

(iv) $L[w]=\psi,\ \gamma_i[w]=\psi_i\ (i=1,\cdots,s)$ の解 $w$ が存在し $U$ に属する．

(証明) $l_h[u]=\tilde{f},\ r_{hi}[u]=\tilde{\varphi}_{hi}$ とする．(*15.3*) により

$$h^{-\kappa}(f-\tilde{f})=\psi+\alpha_h,\quad h^{-\kappa}(\varphi_{hi}-\tilde{\varphi}_{hi})=[\psi_i]_{hi}+\alpha_{hi},$$

(ただし $\varphi_{hi}=[\varphi_i]_{hi},\ i=1,\cdots,s$) とおけば，$h\to 0$ のとき

$$\|\alpha_h\|_{F_h}\to 0,\quad \|\alpha_{hi}\|_{\Phi_{hi}}\to 0\qquad (i=1,\cdots,s),$$

一方，$w\in U$ と近似性の定義から

$$l_h[w]=\psi+\beta_h,\quad r_{hi}[w]=[\psi_i]_{hi}+\beta_{hi}$$

とすれば，$h\to 0$ のとき

$$\|\beta_h\|_{F_h}\to 0,\quad \|\beta_{hi}\|_{\Phi_{hi}}\to 0\qquad (i=1,\cdots,s).$$

$l_h$ が線型であるから

$$l_h[h^{-\kappa}(u_h-u)-w]=h^{-\kappa}(f-\tilde{f})-l_h[w]=\alpha_h-\beta_h,$$

同様に

$$r_{hi}[h^{-\kappa}(u_h-u)-w]=\alpha_{hi}-\beta_{hi}\qquad (i=1,\cdots,s).$$

$h\to 0$ のとき上の各式の右辺は 0 に近づく．よって適正さの仮定より $h^{-\kappa}(u_h-u)-w\to 0$ である． (証終)

注意 1〕 (iii), (iv) は $u$ が十分滑らかであり，$\kappa$ が $l_h, r_{hi}$ の近似度であればふつう成り立つ条件である．$w, \psi, \psi_i$ の厳密な形は $u$ が求められなければ見出すことは困難である．$u$ がわかってから $\psi, \psi_i$ を求めるには $l_h[u], r_{hi}[u]$ を $h$ の級数に Taylor 展開すればよい．

例題 1〕 §2, 例題1の (ii) についてみると $u=x^4$, したがって $l_h[u]=[(x+h)^4-2x^4+(x-h)^4]/h^2=12x^4+2h^2$, よって $\kappa=2$ とすれば $h^{-\kappa}(L[u]-l_h[u])=-2$. すなわち $\psi=-2$ となる．境界条件の近似は正確であるから $\psi_i=0$. $w$ は $L[w]\equiv w''=-2, w(0)=w(1)=0$ の解であるから $w=x(1-x)$.

注意 2〕 定理1の条件のもとに (*15.1*) の $w$ の存在が示された．$w$ は $h$ によらないことも明らかである．このことを実用上次のように利用する．まず近似境界値問題を $h=h_1$ に対して解き，解 $u_{h1}\equiv u_1$ を得たとする．次に格子を細かくし $h=h_2$ として解き $u_{h_2}\equiv u_2$ を得たとする．$h_1=ch_2\ (c>1)$ とおこう．また $G_{h_1}\subset G_{h_2}$ と仮定する．定理1の結果が適用できるならば

$$u_1=u+h_1{}^{\kappa}w+o(h_1{}^{\kappa}),\quad u_2=u+h_2{}^{\kappa}w+o(h_2{}^{\kappa}). \tag{15.4}$$

この二式から $w$ を消去すると

$$u=u_2+\frac{u_2-u_1}{c^{\kappa}-1}+o(h_2{}^{\kappa})$$

となる．よって $o(h_2{}^{\kappa})$ の誤差をもつ近似式として

$$u\approx u_2+\frac{u_2-u_1}{c^{\kappa}-1} \tag{15.5}$$

が得られる．$w\neq 0$ ならば $u$ の近似として $u_2$ を使えば誤差は $O(h_2{}^{\kappa})$ であり，(*15.5*) の

誤差は $o(h_2{}^\kappa)$ であるから，漸近的には (*15.5*) の方が良い近似値といってよい．$w=0$ ならば $u\approx u_2$ と (*15.5*) はともに誤差 $o(h_2{}^\kappa)$ となり漸近的にも優劣は断定できない．

## §16　収束性．誤差の吟味の例

1)　§2, §12 で扱った Schrödinger 型の境界値問題につき，収束の証明，誤差評価など §14, §15 の結果を具体例に適用する方法を例示する．

区間 (0, 1) での境界値問題

$$L[u]\equiv u''-qu=f,\qquad 0<x<1, \tag{16.1}$$

$$u(0)=u(1)=0 \tag{16.2}$$

を考える．ただし $q, f$ は与えられた函数であり，

$$q\geqq 0 \tag{16.3}$$

とする．上の問題に対する近似境界値問題は $x_n=nh$ ($h=1/N$, $0\leqq n\leqq N$) を格子点とすれば，すでに見たように

$$\left.\begin{aligned}&l_h[h_h]=h^{-2}[u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}]-q_nu_n=f_n,\\&u_0=u_N=0,\quad \text{ただし}\quad u_n=u_h(x_n)\end{aligned}\right\} \tag{16.4}$$

としてよい．(*16.4*) で $u_0, u_N$ を消去して考えると $l_h$ は $N-1$ 次元のベクトル $\{u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}\}$ をやはり $N-1$ 次元のベクトル $\{f_1, \cdots, f_{N-1}\}$ にうつす変換 $T_h$ を表わす．そこで $\{x_n; 1\leqq n\leqq N-1\}$ で定義されたすべての函数のつくるベクトル空間 $E_h$ を考え，$F_h$ は $E_h$ であり，$U_h$ は $\{0, u_1, \cdots, u_{N-1}, 0\}$ を $\{u_1, \cdots, u_{N-1}\}$ と同一視するという了解のもとにやはり $E_h$ であるとする．$E_h$ の中（したがって $U_h, F_h$ の中）にノルム $\|\ \ \|_h$ を

$$\|u_h\|_h{}^2=h\sum_{n=1}^{N-1}u_n{}^2,\qquad \|f\|_h{}^2=h\sum_{n=1}^{N-1}f_n{}^2 \tag{16.5}$$

により定義する．$E_h$ での内積 $(\ \ ,\ \ )_h$ は $\|\ \ \|_h$ に応じて，$(u, v)_h=h\sum_{n=1}^{N-1}u_nv_n$, $u\in E_h, v\in E_h$ とする．$U$ としては (*16.2*) を満たす十分滑らかな任意の函数の集合をとり $F=\{L[u]; u\in U\}$ とする．(*16.5*) に準じて $U, F$ の中のノルムは

$$\|u\|_U^2=\int_0^1 u^2dx,\qquad \|f\|_F^2=\int_0^1 f^2dx \tag{16.6}$$

とする．(*16.5*), (*16.6*) に対し §4 の条件が成り立つことは容易にわかる．また境界条件の近似は正確であるから，(*16.4*) が方程式に関して安定であることを示せば §14 定理1系により収束性が保証される．この証明には $E_h$ の中の対称な変換 $T_h$ の性質を調べることから出発する．いま $A_h$ を §2 例題2で定

義した行列とし，$Q_h$ を対角線要素が $q_n$ $(1 \leqq n \leqq N-1)$ である対角線行列とすれば $T_h = A_h - Q_h$ であり，(16.4) は次の形に書ける．

$$T_h u_h \equiv A_h u_h - Q_h u_h = f. \tag{16.7}$$

よって $T_h^{-1}$ が $h$ について一様有界であることを示せば

$$\|u_h\|_h \leqq \|T_h^{-1}\|_h \cdot \|f\|_h$$

から望む結果が得られる．

$v$ を $E_h$ の任意の元とすると $q_n \geqq 0$ により，

$$(T_h v, v)_h = (A_h v, v)_h - (Q_h v, v)_h \leqq (A_h v, v)_h.$$

$A_h$ の固有値は(2.16)によれば，すべて負であり，そのうち最大(絶対値最小)のものを $\rho_1(h)$ とすれば

$$\rho_1(h) = -2(1-\cos \pi h)/h^2, \tag{16.8}$$

かつ，$(A_h v, v)_h \leqq \rho_1(h)(v, v)_h$ となる．一方，1 より小さな正数 $h_0$ をとれば，$0 < h < h_0$ で (16.8) の右辺は $h$ の増加函数であるから $\rho_1(h) \leqq \rho_1(h_0)$.

よって $c_0 = -\rho_1(h_0)$ とおけば $c_0 > 0$, および

$$(T_h v, v)_h \leqq -c_0(v, v)_h \leqq 0. \tag{16.9}$$

よく知られているように (16.9) は

$$\|T_h^{-1}\|_h \leqq c_0^{-1} \tag{16.10}$$

を意味する[(1)]．結局，$0 < h < h_0$ のとき

$$\|u_h\|_h \leqq c_0^{-1} \|f\|_h \tag{16.11}$$

が得られた．したがって $u_h$ は §14 定理1系により

$$h \sum_{n=1}^{N-1} [u(x_n) - u_h(x_n)]^2 \to 0 \qquad (h \to 0)$$

の意味で収束する．

もし $u \in U \subset C^4$ ならば (2.5) により

---

(1) (証明) $A$ を内積が定義された有限次元空間 $\mathfrak{X}$ の線型変換とし，任意の $u \in \mathfrak{X}$ に対して，

$$|(Au, u)| \geqq \gamma(u, u) \tag{a}$$

が成り立てば $\|A^{-1}\| \leqq 1/\gamma$ なることをいえばよい．ただし $\gamma$ は正数．$Au = 0$ ならば (a) より $u = 0$. よって $A^{-1} \equiv B$ が存在する．任意の $v \in \mathfrak{X}$ に対して $u = Bv$ とおき (a) に代入すれば $|(v, Bv)| \geqq \gamma \|Bv\|^2$. 一方，$\|Bv\| \cdot \|v\| \geqq |(v, Bv)|$. ∴ $\|v\| \geqq \gamma \|Bv\|$. よって $\|A^{-1}\| = \|B\| \leqq 1/\gamma$.

ちなみに線型変換 $A$ のノルム $\|A\|$ は，任意の $u \in \mathfrak{X}$ に対して $\|Au\| \leqq c\|u\|$ が成立するような定数 $c$ の下限 (上の場合のように $\mathfrak{X}$ が有限次元ならば実は最小値) として定義される．すなわち (今の場合は sup は max としてよい)，$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$.

$$\|L[u]-l_h[u]\|_h \leqq h^2M_4/12, \quad M_4 = \max|u^{(4)}|$$

であるから §14 定理 2 により次の不等式が成り立つ．

$$\|u-u_h\|_h \leqq h^2c_0^{-1}M_4/12. \tag{16.12}$$

(*16.12*) の評価は $c_0$ が大きいほど精度が高いが，たとえば $h_0=1/2$ とすれば $c_0=2\cdot 2^2(1-0)=8$ となり，

$$\|u-u_h\|_h \leqq h^2M_4/96 \tag{16.13}$$

となる．

2) 1) で取り扱った問題を別のノルムを採用して考察してみる．準備として次の補題を証明する．

**補題 1** 任意の $u_h$ につき $l_h[u_h]\leqq 0$, $u_h(0)=u_h(1)=0$ ならば $u_h(x_n) \geqq 0$ $(0\leqq n\leqq N)$．ただし (*16.3*) は仮定する．

(証明) $u_h(x_n)=u_n$ と書く．$u_n\equiv$ 定数 ならば $u_n\equiv 0$ となるから命題は成り立つ．$u_n$ が定数でないときは帰謬法により証明する．$u_n$ が負になるとすれば負の最小値 $M$ $(M<0)$ が存在する．また $u_n$ は定数でないとしたから次のような $n$ が存在する．

"$u_n=M$, $u_{n+1}$, $u_{n-1}$ の少なくも一方は $>M$, $1\leqq n\leqq N-1$".

この $n$ については，

$$l_h[u_h]_n = h^{-2}[u_{n+1}-2M+u_{n-1}]-q_nM > h^{-2}[M-2M+M]-q_nM = -q_nM \geqq 0,$$

すなわち $l_h[u_h]_n>0$ が得られて矛盾となる． (証終)

**補題 2** $l_h[v_h]\leqq -|l_h[u_h]|$, $v_0=v_N=u_0=u_N=0$ ならば $v_n\geqq|u_n|$ $(0\leqq n\leqq N)$．ただし $u_n=u_h(x_n)$, $v_n=v_h(x_n)$．同じく (*16.3*) は仮定する．

(証明) 仮定により，$l_h[v_h]\leqq -l_h[u_h]$, かつ $l_h[v_h]\leqq l_h[u_h]$．したがって $l_h[v_h+u_h]\leqq 0$, $l_h[v_h-u_h]\leqq 0$．よって $v_h+u_h$, $v_h-u_h$ のおのおのに補題 1 を適用すれば $v_h+u_h\geqq 0$, かつ $v_h-u_h\geqq 0$ がすべての格子点で成り立つことがわかる．これより直ちに補題の結論を得る．

さて (*16.4*) の考察にもどる．$U, F, U_h, F_h$ として 1) でのものと同じものを採るがノルムは

$$\|u\|_U = \max_x |u(x)|, \qquad \|f\|_F = \max_x |f(x)|,$$

$$\|u\|_{U_h} = \max_n |u(x_n)|, \qquad \|f\|_{F_h} = \max_n |f(x_n)|$$

で定義する．$U, F$ が十分滑らかな函数からなるとすれば §4 の仮定は満足されている．さて

$$\rho_h(x) = \|f\|_{F_h}(1-x)x/2 \qquad (16.14)$$

とおけば $\rho_h(x) \in U$, $\rho_h(x) \geqq 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ であり，かつ二次函数に対しては二階差分商と二階微分商とは一致するから，$l_h[\rho_h] = -\|f\|_{F_h} - q_n \rho_h \leqq -\|f\|_{F_h} \leqq -|l_h[u_h]|$. よって補題2により $|u_h| \leqq \rho_h$. 両辺の最大値をとれば

$$\|u_h\|_{U_h} \leqq \frac{1}{8}\|f\|_{F_h}. \qquad (16.15)$$

(*16. 15*) より§14 定理1系により，

$$\max_n |u(x_n) - u_h(x_n)| \to 0 \qquad (h \to 0)$$

の意味で $u_h \to u$ が示された．さらに $u \in C^4$ とすれば (*16. 15*), §14 定理2および

$$\|L[u] - l_h[u]\|_{F_h} \leqq h^2 M_4/12, \qquad M_4 = \max|u^{(4)}|$$

により

$$\|u - u_h\|_{U_h} \leqq h^2 M_4/96 \qquad (16.16)$$

が得られる．これは形式的に (*16. 13*) と一致する．

問題〕 (*16. 16*) から (*16. 13*) が導かれることを示せ．

また $U, U_h$ のノルムを

$$\|u\|_U = \max_x \frac{2|u(x)|}{x(1-x)}, \qquad \|u_h\|_{U_h} = \max_n \frac{2|u_h(x_n)|}{x_n(1-x_n)}$$

で定義すれば $|u_h| \leqq \rho_h$ より $\|u_h\|_{U_h} \leqq \|f\|_{F_h}$ が得られる．これより次の評価式が導かれる．

$$\|u - u_h\|_{U_h} \leqq h^2 M_4/12. \qquad (16.17)$$

(*16. 17*) は $\|\ \ \|_{U_h}$ の定義により (*16. 16*) より正確な

$$|u(x) - u_h(x)| \leqq h^2 x(1-x) M_4/24 \qquad (16.18)$$

を意味している．

3) 偏微分方程式の境界値問題では一般に格子領域 $G_h$ の境界 $\Gamma_h$ がもとの境界 $\Gamma$ の上にはない．したがって第一種境界条件に対しても一般に近似境界条件の近似は正確でない．したがって収束性を証明するには方程式についての安定性のみでは不十分であり，境界条件についての安定性も示す必要がある．Poisson の方程式に関する境界値問題を例にとって示そう．すなわち

$$L[u] \equiv \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \qquad \gamma[u] \equiv u|_\Gamma = \varphi \qquad (16.19)$$

を考える．ただし $\Gamma$ でかこまれる領域 G は有界であると，すなわち，ある正数 $a$ に対して円 $x^2+y^2\leqq a^2$ の中に含まれると仮定する．さて $x=mh,\ y=nh$ で定められる正方形格子をとり，§6, §11 の結果を参照すると上の境界値問題に対する近似境界値問題は

$$l_h[u_h]\equiv h^{-2}\diamondsuit_h u_h=f, \tag{16.20}$$

$$r_h[u_h]\equiv u_h|_{\Gamma_h}=\varphi_h,\quad \varphi_h=[\varphi]_h \tag{16.21}$$

となる．ただし $\diamondsuit_h$ は (*6.1*) で定義された差分演算子であり，$G_h$ で定義された格子点函数を $G_h$ の内部 $G_h{}^i$ で定義された函数にうつすものである．すなわち §2 の意味での $G_h{}^0$ は今の場合 $G_h{}^i$ となっている．$[\ \ ]_h$ は §11 の (ii) で定義したものとする．(*16.20*), (*16.21*) が絶対値の最大値をノルムに採ったとき適正であることを示すには，2) の場合と同様に次の補題が準備となる．

**補題 3** $G_h$ で定義された任意の $u_h$ につき，$G_h{}^0$ で $l_h[u_h]\leqq 0$，$\Gamma_h$ で $u_h\geqq 0$ ならば，$G_h$ で $u_h\geqq 0$.

証明は補題 2 の証明とほとんど平行に行うことができる．$u_h$ が $G_h$ で定数である場合をのぞき $G_h{}^0$ で $u_h$ は負の最小値をとれない，すなわち負となれないことが示されるのである．

**補題 4** $G_h$ で定義された任意の $u_h, v_h$ につき，$G_h{}^0$ で $l_h[v_h]\leqq -|l_h[u_h]|$，$\Gamma_h$ で $v_h\geqq |u_h|$ ならば，$G_h$ で $v_h\geqq |u_h|$.

補題 3 から補題 4 を導く論法は補題 1 から補題 2 を導いた論法と全く同様である．

注〕 上の補題で述べられた事柄は $\nabla^2 u\leqq 0$ $(\nabla^2 u\geqq 0)$ を満たす優(劣)調和函数 $u(x,y)$ について‘最小 (大) 値の原理’とよばれる事柄に対応するものである．また実際，$l_h[u_h]\leqq 0$ $(l_h[u_h]\geqq 0)$ を満足する格子点函数 $u_h$ を**優 (劣) 調和格子点函数**ということがある．

さて $U$ として $G+\Gamma$ で定義された十分滑らかな任意の函数の集合をとり，$F$, $\Phi$, $U_h$, $F_h$, $\Phi_h$ は §4, §9 の条件を満たすものとする．たとえば，$U_h$ は $G_h$ で定義されたすべての格子点函数 $u_h$ からなっている．これらの函数族の中のノルムを，函数値の絶対値の最大値で定義する．補題 4 を利用するために次の函数を導入する．

$$\rho_h(x,y)=\|\varphi_h\|_{\Phi_h}+\frac{1}{4}\|f\|_{F_h}(a^2-x^2-y^2). \tag{16.22}$$

$\rho_h$ は次の性質をもっている．まず，$\Gamma_h\subset G_h\subset G+\Gamma$ により $\Gamma_h$ は円 $x^2+y^2\leqq a^2$ に含まれるから

$$\rho_h|_{\Gamma_h} \geqq \|\varphi_h\|_{\Phi_h} \geqq |\varphi_h| = |u_h||_{\Gamma_h}. \tag{16.23}$$

二次函数 $a^2-x^2-y^2$ に対しては $h^{-2}\Diamond_h$ は $\nabla^2$ と一致するから

$$l_h[\rho_h] = -\|f\|_{F_h} \leqq -|l_h[u_h]|. \tag{16.24}$$

よって補題4の $v_h, u_h$ としてそれぞれ $\rho_h$, (*16. 20*), (*16. 21*) の解 $u_h$ をとることができる．その結果は

$$|u_h| \leqq \rho_h \leqq \|\varphi_h\|_{\Phi_h} + \frac{a^2}{4}\|f\|_{F_h} \tag{16.25}$$

となる．左辺の最大値をとれば適正さを示す不等式

$$\|u_h\|_{U_h} \leqq \|\varphi_h\|_{\Phi_h} + a^2\|f\|_{F_h}/4 \tag{16.26}$$

が導かれる．よって，$\max_{G_h}|u-u_h| \to 0$ $(h\to 0)$ の意味で $u_h \to u$ が示された．

さらに定数 $M_1, M_4$ に対して

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqq M_1,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq M_1,\quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| \leqq M_4,\quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right| \leqq M_4$$

であるとすれば (*6. 3*) および $[\quad]_h$ の定義から，

$$\|L[u]-l_h[u]\|_{F_h} \leqq h^2M_4/6, \qquad \|[\gamma[u]]_h - r_h[u]\|_{\Phi_h} \leqq hM_1.$$

よって §14 定理2と (*16. 26*) により

$$|u-u_h| \leqq \|u-u_h\|_{U_h} \leqq hM_1 + \frac{h^2}{24}a^2M_4 \tag{16.27}$$

が誤差評価の式として得られる．2) の後半でしたようにノルムを若干変更して

$$|u-u_h| \leqq hM_1 + \frac{h^2}{24}M_4(a^2-x^2-y^2)$$

を導くことは読者の演習にまかせる．

4)　二階の定数係数でない楕円型微分方程式の境界値問題についても本質的には 1), 3) の論法と同じ論法で収束性が証明される．たとえば §12, 3) で考察した問題

$$L[u] \equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} - qu = f,$$

$$u|_\Gamma = \varphi$$

に対して近似境界値問題を (*12. 19*) で定義した $l_h$ を用いて $l_h[u_h]=f$, $u_h|_{\Gamma_h} = [\varphi]_h$ とすれば，次の条件 (i)～(ii) のもとに適正さ，したがってまた，$u_h \to u$ が示される：

(i) $A>0,\ C>0,\ q\geqq 0.$

(ii) $A+C\geqq M_0,\ |D|\leqq M_1A,\ |E|\leqq M_2C$ となるような正の定数 $M_0, M_1, M_2$ が存在する.

実際, $h$ が十分小さいならば上の $l_h$ に対して補題 4 を証明することができる (§12, 補題参照).

より高階の微分方程式の問題, たとえば $\nabla^4 u=f,\ u|_\Gamma=\varphi_1,\ \partial u/\partial n=\varphi_2$ に対しても §6, §9 で述べた近似方程式, 近似境界条件を採用すれば近似境界値問題が適正であり, 近似解 $u_h$ が $u$ に収束することが証明される.

また, 楕円型偏微分方程式の問題については一般に正方形格子と限らず, 長方形格子を用いても, すべての格子間隔が 0 に近づくならば近似解が求める解に収束する. このことは, たとえば 3) の問題についてみれば, 補題 3, 4 が $l_h$ のかわりに ($h, k$ を $x, y$ 方向の格子間隔として)

$$l_{h,k}[u]=\frac{u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n}}{h^2}+\frac{u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1}}{k^2}$$

で定義される $l_{h,k}$ を用いてもやはり成り立つことからも推察されるであろう.

5) (16.12), (16.18), (16.27) などで与えられる誤差 $u-u_h$ の評価式は解 $u$ の高階導函数の上界を含んでいる. 誤差の評価式がこのような "未知" の量を含まない形で得られるのはごく特別の場合である. このような場合の一例は Wasow によって研究された長方形の領域での Dirichlet の問題である. この問題は境界値が長方形の一辺以外では 0 である特別の場合に帰着され, かつ近似方程式を $h^{-2}\Diamond_h u_h=0$ とすれば, 微分方程式の解 $u$, 近似解 $u_h$ がともに (それぞれ無限項, 有限項) 類似の級数の形で解析的に得られる. その級数の係数を比較するのが大体の方針である. 特に一辺の長さが $A$ である正方形についての結果は

$$|u-u_h|\leqq h^2(1.4Q_2+0.43AQ_3)$$

となる. ここに $Q_2$ は境界値 $\varphi$ の四つの頂点での二階微分商の絶対値の上界, $Q_3$ は $\varphi$ の三階導函数の絶対値の境界全体での上界である. ただし $\varphi$ の微分は定点から境界に沿って測った距離による微分である.

## §17 固有値問題

1) すでに §2, 例題 2, §8, 例題でみたように差分法による近似解法は固有値問題にも適用できる. 簡単のために微分方程式の固有値問題

$$L[u]=\lambda u,\quad \gamma_i[u]=0\qquad (i=1,\cdots,s)\tag{17.1}$$

で $L, \gamma_i$ が線型, 固有値が

$$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_k\leqq\cdots\tag{17.2}$$

であるとする．$l_h$ が $L$ の近似差分演算子，$r_{hi}[u_h]=0$ が $\gamma_i[u]=0$ の近似境界条件のとき，差分方程式の固有値問題

$$l_h[u_h]=\rho u_h, \tag{17.3}$$

$$r_{hi}[u_h]=0 \qquad (i=1,\cdots,s) \tag{17.4}$$

を解き固有値 $\rho_1\leqq\rho_2\leqq\cdots$ が得られたならば $\rho_k$ を $\lambda_k$ の近似値とみなすのである．もっとも，G が有界ならば固有値 $\rho_k$ の個数は有限個である．(*17.3*) は §4 の意味で $G_h{}^0$ で成り立つ関係であり，(*17.4*) を用いて $G_h{}^0$ 以外の点での $u_h$ を (*17.3*) の左辺から消去すると (*17.3*), (*17.4*) は，$G_h{}^0$ の各点における $u_h$ の値を各成分とするベクトル $X=\{u_h(P), P\in G_h{}^0\}$ からなるベクトル空間 $E_h$ での線型変換 (行列) $T_h$ の固有値問題として次の形に書ける．

$$T_hX=\rho X. \tag{17.5}$$

たとえば §2, 例題 2 の $A_h$ はそこでの $l_h$ に対し上の意味での $T_h$ になっている．したがって (重複度を考慮して) 固有値 $\rho_k$ の個数は $G_h{}^0$ に属する点の個数だけある．(G は有界とする.)

多くの場合，たとえば $L$ が $\nabla^2$, $l_h=h^{-2}\diamondsuit_h$ などの場合について $h\to 0$ にしたがって $\rho_k\to\lambda_k$ となることが知られている．ただ実用上の目的からは上の収束の速さは一般におそいので，境界の形が複雑で Ritz の方法などが適用できない場合にのみ差分法は固有値問題に応用される．

例題 1〕 $L$ を $\nabla^2$, G, Γ をそれぞれ正方形 $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ の内部および境界とする．$x=mh$, $y=nh$ $(h=1/N,\ 0\leqq m,n\leqq N)$ で定められる格子をとる．境界条件が $u|_\Gamma=0$ ならば近似固有値問題は

$$h^{-2}\diamondsuit_h u_h\equiv h^{-2}(u_{m+1,n}+u_{m-1,n}+u_{m,n+1}+u_{m,n-1}-4u_{m,n})=\rho u_{m,n},$$
$$\text{ただし}\quad 1\leqq m,n\leqq N-1,\ u_{m,n}=u_h(mh,nh). \tag{17.6}$$

および

$$u_{0,n}=u_{N,n}=0,\quad u_{m,0}=u_{m,N}=0 \tag{17.7}$$

となる．この問題は微分方程式の場合と同様に変数分離によって解かれる．すなわち $u_{m,n}=v(m)\cdot w(n)$ とおけば $v, w$ のおのおのについて §2, 例題 2 の問題に帰着される．結果は

$$\left.\begin{aligned}&\rho_{k,l}=\rho_k+\rho_l\qquad(1\leqq k,l\leqq N-1),\\ \text{ただし}\quad&\rho_n=h^{-2}2(\cos n\pi h-1)\qquad(1\leqq n\leqq N-1)\end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

となる．また $\rho_{k,l}$ に対応する格子点上での固有函数は $u_h^{(k,l)}=C\cdot\sin k\pi x\cdot\sin l\pi y$ で与えられる．

2) (*17.3*) の $l_h$ が形式的に対称であるとしても，すなわち，$P, Q \in G_h^0$ のとき $l_h[u_h]$ の P における式の中の $u_h(Q)$ の係数と $l_h[u_h]$ の Q における式の中の $u_h(P)$ の係数とが等しいとしても境界条件 (*17.4*) 次第で (*17.5*) の $T_h$ が対称にならないことがある．$E_h$ でのノルムを

$$\|X\|^2 = \sum_{G_h^0} u_h^2 \tag{17.9}$$

で定義し，内積もこれに応じて定めると $T_h$ が対称ならば固有値問題 (*17.5*) は $(T_hX, X)/\|X\|^2$ の変分問題に帰着される (C §1.5 参照)．

例題 2〕 $L[u] \equiv -u''(x) = \lambda u,\ u'(0) = u'(1) = 0.$

$x_n = nh$ $(h = 1/N, 0 \leqq n \leqq 1)$ の格子をとり $L[u]$ の近似差分演算子として $l_h[u_h] = -h^{-2}\delta^{(2)}u_h$ をとる．すなわち $u_h(x_n) = u_n$ とかけば，$x_n$ で $l_h[u_n] = (-u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1})$．近似境界条件を

$$(u_1 - u_0)/h = 0, \quad (u_N - u_{N-1})/h = 0 \tag{17.10}$$

にとれば $u_0 = u_1$, $u_N = u_{N-1}$．これを用いて $l_h[u_h]$ を表わす式から $u_0, u_N$ を消去すれば

$$l_h[u_h]_1 = (u_1 - u_2)/h^2, \quad l_h[u_h]_{N-1} = (-u_{N-2} + u_{N-1})/h^2.$$

よって $X = \{u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}\}$ に対する (*17.5*) の意味の変換 $T_h$ は次の行列で表わされる．

$$h^{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \ddots & 2 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

もし $u'(0) = 0$ を近似するものとして §10 にもとづき

$$(-3u_0 + 4u_1 - u_2)/2h = 0$$

をとり，これを用いて $u_0$ を消去すれば

$$l_h[u_h]_1 = 2(u_1 - u_2)/3h^2$$

となる．$T_h$ を表わす行列は

$$h^{-2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{である．}$$

注〕 $L$ が $\nabla^2$ であるような特別の場合については，上述の変分原理と，微分方程式の変分原理との関係を利用して $L$ の固有値の上下界を与えるような差分方程式の固有値問題の構成の仕方が研究されている．その一つを簡単のために $L[u] = -u'' = \lambda u$ の場合を例にとって紹介しておく．ただし領域，格子などは例題 2 と同じとし，境界条件は $u(0) = u(1) = 0$ にとる．最小の固有値 $\lambda_1$ だけを考察する．さて，境界条件を満足する

任意の $u \neq 0$ に対して

$$\frac{-\int_0^1 u''u\,dx}{\int_0^1 u^2dx} \equiv \frac{\int_0^1 u'^2dx}{\int_0^1 u^2dx} \geqq \lambda_1. \tag{17.11}$$

いま $u_n$ $(u_0=u_N=0)$ が格子点 $x_n$ で与えられたとする．これから $0\leqq x\leqq 1$ で定義された函数 $\bar{u}(x)$ を，$x_n\leqq x\leqq x_{n+1}$ では

$$\bar{u}(x) = u_n+(x-x_n)(u_{n+1}-u_n)/h \qquad (n=0,1,\cdots,N-1)$$

のように作る．すなわち $\bar{u}(x)$ のグラフは $(x_n, u_n)$ を結ぶ折線グラフである．簡単な計算により

$$\int_0^1[\bar{u}']^2dx = h\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(u_{n+1}-u_n)^2}{h^2}, \qquad \int_0^1\bar{u}^2dx = \frac{h}{3}\sum_{n=0}^{N-1}\{2u_n{}^2+u_nu_{n+1}\}$$

がわかる．(*17.11*) の $u$ を $\bar{u}$ でおきかえると

$$\frac{\sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)^2/h^2}{3^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}(2u_n{}^2+u_n\cdot u_{n+1})} \geqq \lambda_1. \tag{17.12}$$

左辺を最小にするように $u_n$ $(1\leqq n\leqq N-1)$ を定める問題は

$$\frac{-u_{n+1}+2u_n-u_{n-1}}{h^2} = \rho\frac{u_{n+1}+4u_n+u_{n-1}}{6} \qquad (1\leqq n\leqq N-1),$$

$$u_0 = u_N = 0$$

に帰着する．これは今まで扱ったものと若干異なった種類のものであるが一種の差分方程式の固有値問題である．固有値 $\rho$ のうち最小のものを $\rho_1$ とすれば $\rho_1\geqq\lambda_1$ である．すなわち任意の $h$ に対して $\rho_1$は $\lambda_1$ の上界を与える．多次元の $\nabla^2u=\lambda u$ についても本質的には同様の取扱いをすることができる．

## §18　数値解法

ある定まった $h$ に対して近似境界値問題

$$l_h[u_h]=f, \qquad r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi} \qquad (i=1,\cdots,s)$$

を解くのは代数的な問題であり，連立方程式を解く種々の方法が用いられる．特に線型の場合には消去法，逐次代入法が便利である．これらについて方針だけを簡単に説明する．

1）**消去法**　計算の途中の段階では若干個の格子点での $u_h$ の値をパラメタとし，各点での $u_h$ をこれらのパラメタで表わす．最後にこれらのパラメタの値を決定するのである．

例題 1〕 $l_h[u_h]\equiv h^{-2}\delta^{(2)}u_n-q_nu_n=f_n \qquad (1\leqq n\leqq N-1),$

$$u_0=a, \quad u_N=b,$$

ただし $u_n=u_h(nh)$，$\delta^{(2)}u_n=u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}$．$l_h[u_h]=f_n$ より，$u_{n+1}$ を $u_n, u_{n-1}$ で

表わせば

$$u_{n+1}=2u_n-u_{n-1}+h^2(q_nu_n+f_n). \qquad (18.1)$$

さて $u_1=\alpha$ とおけば (18.1) をくりかえし用いることにより $u_n$ を $\alpha$ を用いて表わすことができる．たとえば

$$u_2=2\alpha-a+h^2(q_1\alpha+f_1)$$

である．その結果は

$$u_n=A_n+B_n\alpha \qquad (0\leqq n\leqq N) \qquad (18.2)$$

の形となる．ただし $A_n, B_n$ は $a, h, q_n, f_n$ によるが $\alpha$ によらない量である．$\alpha$ を決定するのには $u_N=b$ を用いて $b=A_N+B_N\alpha$ から求めればよい．

数値的には次のようにする．$\alpha=0$, $\alpha=1$ として上の手順を実行すれば $u_n^{(0)}=A_n$, $u_n^{(1)}=A_n+B_n$ が数値的に得られる．定数 $c_0, c_1$ を $c_0+c_1=1, c_0u_N^{(0)}+c_1u_N^{(1)}=b$ から決定すれば $u_n=c_0u_n^{(0)}+c_1u_n^{(1)}$ が求める解となる．その理由は重ね合せの原理から明らかであろう．

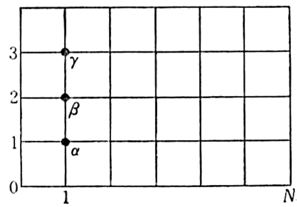
例題 2〕 第18.1図のような格子につき

$$h^{-2}\Diamond_hu_h=f$$

を解く場合も同様である．ただし境界の格子点で $u_h$ の値が与えられたとする．

$h^{-2}\Diamond_hu_h=f$ より，$u_{m+1,n}$ をそれより左にある格子点での値で表わすことができる．($u_h(mh, nh)=u_{m,n}$ とする．)

$$u_{m+1,n}=4u_{m,n}-u_{m,n+1}-u_{m,n-1}$$
$$-u_{m-1,n}+h^2f_{m,n}. \qquad (18.3)$$




第 18.1 図

したがって $u_{1,1}=\alpha$, $u_{1,2}=\beta$, $u_{1,3}=\gamma$ とおけば境界値と $\alpha,\beta,\gamma$ を用いて左から順に $u_{m,n}$ の値を作ってゆくことができる．結果は

$$u_{m,n}=A_{m,n}\alpha+B_{m,n}\beta+C_{m,n}\gamma+D_{m,n} \qquad (18.4)$$

の形になる．$A_{m,n},\cdots,D_{m,n}$ は数値的に見出される定数である．$\alpha,\beta,\gamma$ の値は右端の境界で

$$u_{N,n}=\text{境界値}$$

として得られる $\alpha,\beta,\gamma$ についての連立方程式を解けば求まるわけである．$\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$; $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$; $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$; $\alpha=\beta=\gamma=0$ として上の手順によって得られる四つの解 $u_{m,n}^{(A)}, u_{m,n}^{(B)}, u_{m,n}^{(C)}, u_{m,n}^{(D)}$ を重ね合せて（重ね合せの係数はその和が1であることと，右端での境界条件からきまる)，$u_{m,n}$ を決定する方法は前例を参照すれば明らかと思う．

**2）逐次代入法 (iteration)** 与えられた差分方程式を連立一次方程式とみなして，逐次代入法を適用する．たとえば境界条件を満足する適当な $u_h^{(0)}$ から出発し

$$u_h^{(m)}=u_h^{(m-1)}+\tau(l_h[u_h^{(m-1)}]-f) \qquad (\tau\text{ 定数}), \qquad (18.5)$$

$$r_{hi}[u_h^{(m)}]=\varphi_{hi}\qquad (i=1,\cdots,s) \tag{18.6}$$

により順次 $u_h^{(m)}$ を決定してゆく．(*18.5*) で $G_h{}^0$ での $u_h^{(m)}$ が定まれば $G_h-G_h{}^0$ での $u_h^{(m)}$ は (*18.6*) を解いて見出されることになる．上の形の逐次代入は，その $h$ に対する

$$l_h[u_h]=\rho u_h,\quad r_{hi}[u_h]=0\qquad (i=1,\cdots,s)$$

の固有値を一般に $\rho$ で表わすとき，$|1+\tau\rho|<1$ がすべての固有値に対して成り立つとき，またそのときのみ任意の $u_h^{(0)}, f$ に対して $u_h^{(m)}\to u_h$ ($m\to\infty$) となる．またその際 $\max|1+\tau\rho|$ が小さいほど収束が速いことが知られている．たとえば §17 例題1の領域，格子について

$$h^{-2}\diamondsuit_h u_h=f,\quad u_h|_\Gamma=\varphi_h$$

を解く問題に対しては

$$\rho=\rho_{k,l}=-\frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2}h+\sin^2\frac{l\pi}{2}h\right)\qquad (1\leqq k,\ l\leqq N-1)$$

より

$$-\frac{8}{h^2}<-\frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi}{2}h\leqq\rho\leqq-\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2}h<0$$

であるから，$0<\tau\leqq h^2/4$ ならば収束する．$u_h^{(m)}(ih,jh)$ を $u_{i,j}^{(m)}$ と書き，$\tau=h^2/4$ にとると (*18.5*) は周知の形

$$u_{i,j}^{(m)}=\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{(m-1)}+u_{i-1,j}^{(m-1)}+u_{i,j+1}^{(m-1)}+u_{i,j-1}^{(m-1)}\right)-\frac{h^2}{4}f_{i,j}$$

をとる．

$u_h^{(0)}$ は収束性の見地からは任意でよいが，よい結果を早く得るために，粗い格子で解いた近似値から補間法によって構成することがよく行なわれる．

(*18.5*) の形の逐次代入は普通の近似境界値問題についてはあまり収束が速くない．より収束の速い逐次代入の形が種々研究されているが[1]ここでは割愛する．

---

(1)　例えば D. Young, Iterative methods for solving partial difference equations of elliptictype, Trans. Amer. Math. Soc., **76**, 92～111 (1954).

# 第 5 章　初期値問題の差分法による近似解法

## §1　予備．規約

本章では放物型，双曲型微分方程式の初期値問題に対する差分法の応用を論じる．初期条件を時間 $t$ を一つの自変数とする領域の境界での境界条件と解釈すれば**前章で一般的に導いた近似差分方程式，近似境界条件，適正さ，安定性などの基本概念，収束性の定理はそのまま通用する**．したがって，上の事項については新たに説明することは略し，具体例で必要に応じて復習するにとどめる．ただ，楕円型の場合との著しい相異は適正さ，安定性が格子の性質，たとえば格子間隔の比などに本質的に影響されることである．この事情をごく基本的な初期値問題に対しては，かなり詳しく述べたつもりであるが，時間に関して高階の微分方程式，連立微分方程式の初期値問題の考察には立入る余裕がない．

1)　以下簡単のために空間座標は $x$ だけとし，時間を $t$ で表わす．また $x, t$ を変数とする函数は $u(x, t)$ と書くことにする．函数記号の中の二つの変数のうち最後のものを $t$ にあてることに定めるわけである．

また，たとえば $u(x, 0)=\varphi_1$, $u_t(x, 0)=\varphi_2$ のようないわゆる初期条件は前章の結果を適用するときは境界条件の一種と考えるのであるが，今後は習慣通り初期条件とよび，$u(0, t)=\varphi_3$ のような境界条件と区別する．このことは対応する近似境界条件についても同様と約束する．すなわち'近似初期条件''差分方程式に対する初期条件'のようないいかたをする．

2)　格子はつねに $t=m\tau$, $x=nh$ $(m, n$ は整数$)$ を採用することにする．$\tau=h$ とは限らない．また格子点 $(nh, m\tau)$ における $u_h$ の値を $u_{n,m}$ と書く．G に対する $G_h, \Gamma_h$ などの定義は前章の通りとするが，$G_h$ の点のうち $t=m\tau$ である格子点全体の集合を $S_m$ で表わし，$S_m$ の点を**第 $m$ 段の格子点**とよぶ．

## §2　近似初期値問題の具体例

G を $t>0, 0<x<1$ なる領域とし $\Gamma$ をその境界とする．$h=1/N$ にとる．したがって $\Gamma_h\subset\Gamma$ である．

1)
$$L[u]\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f, \tag{2.1}$$

$$u(x, 0)=\varphi_1(x),\quad u(0, t)=\varphi_2(t),\quad u(1, t)=\varphi_3(t) \tag{2.2}$$

について考える．近似初期条件，近似境界条件は

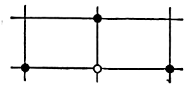
$$\left.\begin{aligned} &u_{n,0}=\varphi_1(nh) \quad (0\leqq n\leqq N),\\ &u_{0,m}=\varphi_2(m\tau), \quad u_{N,m}=\varphi_3(m\tau) \quad (0\leqq m) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

であり，これらの近似は正確である．(*2.1*) を近似する方程式は種々のものがある．

(i)　$l_h[u_h]=f$, ただし

$$l_h[u_h]\equiv(u_{n,m+1}-u_{n,m})/\tau-(u_{n+m,1}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2$$

(第 2.1 図参照).　(*2.4*)



第 2.1 図

$u$ が十分滑らかならば，$\sigma=\tau/h^2$ として

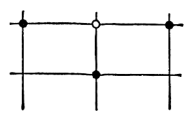
$$L[u]-l_h[u]=h^2\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+h^4\left(\frac{1}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}-\frac{\sigma}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)+o(h^4).$$

これから，$h\to 0$ のとき $\sigma=$ 一定 とすると，近似度は 2 であることがわかる．また $f\equiv 0$ であるならば，$u$ として $L[u]=0$ **を満足する十分滑らかな函数をとれば,** $\sigma=1/6$ に対して $L[u]-l_h[u]=O(h^4)$ が得られる．$\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial x^2$ から $\partial^2 u/\partial t^2=\partial^4 u/\partial x^4$ が導かれるからである．この $\sigma$ に対しては §4.7 の意味で $l_h$ の微分方程式の解についての近似度は 4 になる．

$l_h[u_h]=f$ から $S_m$ 上での $u_h$ を直ちに $S_{m-1}$ 上での $u_h$ を用いて表わすことができる．すなわち，

$$u_{n,m+1}=\sigma u_{n+1,m}+(1-2\sigma)u_{n,m}+\sigma u_{n-1,m}+\tau f_{n,m}. \tag{2.5}$$

$u_{n,0}$ は初期条件として与えられているから，あとは境界条件と (*2.5*) により順次 $S_1, S_2, \cdots$ 上での $u_h$ の値が見出される．したがって (*2.3*), (*2.4*) の解が任意の $\varphi_i$ $(i=1,2,3)$, $f$ に対して一義的に存在することがわかる．一般に $l_h[u_h]=f$ から $S_m$ 上での $u_h$ をそれより下の段 $S_{m-1}, S_{m-2}, \cdots, S_{m-q}$ 上の $u_h$ を用いて書き表わすことができるならば，その差分方程式は陽 (explicit) であるといい，そうでない場合は陰 (implicit) であるという．陽な差分方程式を解くことはきわめて容易である．



第 2.2 図

(ii)　$l_h[u_h]=f$, ただし　(*2.6*)

$$l_h[u_h]\equiv(u_{n,m}-u_{n,m-1})/\tau-(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2$$ (第 2.2 図参照)

$\sigma=\tau/h^2$ とおき，$h\to 0$ のとき $\sigma$ 一定とすれば，近似度は 2 である．(*2.6*) は陰な方程式で，$S_{m-1}$ 上での $u_h$ が求められたときには $S_m$ 上の $u_h$ は $n$ につ

いての差分方程式

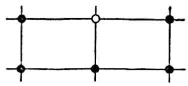
$$(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2-u_{n,m}/\tau=-f_{n,m}-u_{n,m-1}/\tau$$

を解いて求められる．ただし $u_{0,m}=\varphi_2(m\tau)$, $u_{N,m}=\varphi_3(m\tau)$ を境界条件とみなす．これから $u_{n,m}$ が一義的に定まることは§4.12の2)から明らか．そこでの $q,f$ の役割を $1/\tau>0$, $-f_{n,m}-u_{n,m-1}/\tau$ がはたしているからである．

(iii) $l_h[u_h]=f$, ただし $\delta_h^{(2)}$ は $n$ にだけ作用するものとして

$$l_h[u_h]\equiv(u_{n,m+1}-u_{n,m})/\tau-(\delta^{(2)}u_{n,m+1}+\delta^{(2)}u_{n,m})/2h^2. \tag{2.7}$$

[1]

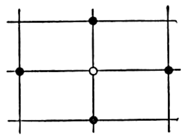


第 2.3 図

これは(ii)と同じく陰な方程式であるがやはり解は一義的に存在する．その理由は(ii)の場合と同様である．

(iv) $l_h[u_h]=f$, ただし

$$l_h[u_h]\equiv(u_{n,m+1}-u_{n,m-1})/2\tau-(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2, \tag{2.8}$$



第 2.4 図

(2.8)は陽な方程式の一種である．ただし $S_m$ 上の値を求めるのに $S_{m-1}$, $S_{m-2}$ 二段での値が必要である．初期値は $S_0$ の上でしか与えられていないから $S_1$ 上の値をまず(i)~(iii)のいずれかの方法で求めておき，あとは(2.8)を利用して上方の段にすすむ．

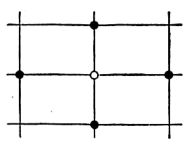
2)
$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f, \tag{2.9}$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad \partial u(x,0)/\partial t=\varphi_2(x), \tag{2.10}$$

$$u(0,t)=\varphi_3(t),\quad u(1,t)=\varphi_4(t). \tag{2.11}$$

(2.9)を近似する方程式として

$$(u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1})/\tau^2-(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2=f_{n,m} \tag{2.12}$$



第 2.5 図

をとる．$r=\tau/h$ とおき，$h\to0$ のとき $r$ 一定とすれば上の方程式の近似度は2である．(2.12)から $u_{n,m+1}$ を $S_m$, $S_{m-1}$ 上での $u_h$ を用いて表わすことができる．すなわち(2.12)は陽な方程式である．

---

(1) (2.7)と等しいとおくものは $f_{n,m}$ よりも $(f_{n,m+1}+f_{n,m})/2$ が自然であろう．

初期条件は $u_{n,0}=\varphi_1(nh)$, $(u_{n,1}-u_{n,0})/\tau=\varphi_2$ で近似される．$u_{n,1}=\varphi_1(nh)+\tau\varphi_2(nh)$ となるから初期条件により $S_0, S_1$ 上の値が定まり，あとは (2. 12) と境界条件

$$u_{0,m}=\varphi_3(m\tau), \quad u_{N,m}=\varphi_4(m\tau)$$

によって順次 $S_2, S_3, \cdots$ での値が求められる．

注 1〕 有界でない領域で定義された函数が十分滑らかであるというときは，函数および各階導函数の有界であることも含まれているとする．

注 2〕 上でノルムは函数値の絶対値の最大をとる．今後もノルムについて何もいってなければ，この意味に解釈してもらう．

## §3　収束性の吟味の一例

**初期値問題では形式的に同じ近似差分方程式，近似初期条件を採用しても，格子間隔 $h, \tau$ の間の $h, \tau\to 0$ に際しての，関係によりその差分方程式が適正，安定であったり，そうでなかったりする**(1)．よって，適正さによって収束が保証されるためには $h, \tau$ の間に適当な条件が課せられなくてはならない．この種の事情を一般に調べることは後まわしとしここでは波動方程式の場合につき例示する．

半平面 $t\geqq 0$, $-\infty<x<\infty$ での初期値問題

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f, \tag{3. 1}$$

$$\gamma_1[u]\equiv u(x,0)=\varphi_1(x), \quad \gamma_2[u]\equiv u_t(x,0)=\varphi_2(x) \tag{3. 2}$$

を次の差分方程式で近似したとする．

$$\begin{aligned} l_h[u_h]&\equiv(u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1})/\tau^2-(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2 \\ &=f_{n,m};\quad \text{ただし}\quad u_{n,m}=u_h(nh,m\tau), \end{aligned} \tag{3. 3}$$

および

$$r_{h1}[u_h]\equiv u_{n,0}=\varphi_1(nh), \quad r_{h2}[u_h]\equiv(u_{n,1}-u_{n,0})/\tau=\varphi_2(nh). \tag{3. 4}$$

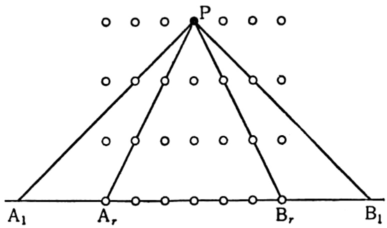
$r=\tau/h$ とおき，$h\to 0$ のとき $r$ は一定であるとする．(3. 1), (3. 2) の解 $u$ が $x$ 軸を含めて十分滑らかならば任意の点で $u_h\to u$ となるための必要十分条件は $r\leqq 1$ であることが知られている．この事柄の一般的な証明は割愛するが，次の考察から $r>1$ ならば上の収束性が得られないことが納得できよう．$r=1$

(1)　この事態を最初に指摘した有名な論文は R. Courant, K. O. Friedrichs, H. Lewy: Math. Ann., **100** (1928), 32.

の場合についてはすぐ後で証明する．(*3.4*) より

$$u_{n,0}=\varphi_1(nh),\quad u_{n,1}=\varphi_1(nh)+\tau\varphi_2(nh) \tag{3.5}$$

であるから，$S_0, S_1$ 上での $u_h$ の値が定まる．(*3.3*) を $u_{n,m+1}$ について解けばわかるように，$S_m$ 上での $u_h$ の値は $S_{m-1}, S_{m-2}$ 上の $u_h$ を定めればきまるものである．さらに詳しく検討すると次のことがわかる．いま P を任意の格子点とし，P を通り勾配がそれぞれ $r$, $-r$ である二直線が $x$ 軸と交る点を $A_r, B_r$ とする．三角形 $A_rPB_r$ に含まれる $S_m$ の点全体を $S_m^{(P)}$ で表わすと，$S_m^{(P)}$ 上での $u_h$ の値は $S_{m-1}^{(P)}, S_{m-2}^{(P)}$ 上での $u_h$ の値を与えれば定まる．結局 P での値は $S_0^{(P)}, S_1^{(P)}$ での値が定まればきまることになる．(この意味で $S_0^{(P)}+S_1^{(P)}$ を P の (*3.3*) についての**依存域**ということがある.) 一方 $S_0^{(P)}, S_1^{(P)}$ での値は (*3.5*) で与えられるから，以下 $f$ を固定して考えると，P での $u_h$ の値は線分 $A_rB_r$ 上での $\varphi_1, \varphi_2$ にのみ依存することになる．$r$ を一定にして $h$ を 0 に近づけるのであるから $u^*(P)=\lim_{h\to 0} u_h(P)$ も $A_rB_r$ 上での $\varphi_1, \varphi_2$ にのみ依存することがわかる．ところが，$u(P)$ は線分 $A_1B_1$ 上での $\varphi_1, \varphi_2$ に依存することは波動方程式の依存域の理論でよく知られている[(1)]．したがって，$r>1$ ならば $A_rB_r$ 上での $\varphi_1, \varphi_2$ の値を不変とし $(A_1B_1-A_rB_r)$ 上での $\varphi_1, \varphi_2$ を変更すれば一般に $u(P)$ は変るにもかかわらず，$u^*(P)$ は変りがないことになり，$u(P)=u^*(P)$ は一般に成り立たないことがわかる．




第 3.1 図

次に $r=1$ の場合を具体的に調べよう．$T$ を任意の正数とし領域を $0\leqq t\leqq T$ に限る．この中の格子領域 $G_h$ において (*3.3*), (*3.4*) が適正であることを証明する．ただし，ノルムとしては $\|\ \|_{\Phi_{h1}}$ 以外は函数値の絶対値の最大値をとることとし，前者は

$$\|\varphi_1\|_{\Phi_{h1}}=\max_n|\varphi_1(nh)|+\max_n\left|\frac{\varphi_1((n+1)h)-\varphi_1(nh)}{h}\right|$$

にとる．これに応じて

$$\|\varphi_1(x)\|_{\Phi_1}=\max_x|\varphi_1(x)|+\max_x|\varphi_1'(x)|$$

(1) A §1.4 参照．

のようにとれば $\varphi_1 \in \Phi_1$ が $\varphi_1'$ とともに有界連続ならば §4.9 の意味で $r_{h1}[u_h] = \varphi_1$ は $\gamma_1[u] = \varphi_1$ の近似境界条件になっている(§4.4 問題参照).

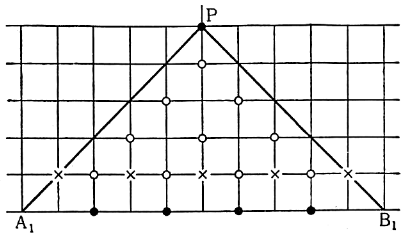
さて $r=1$ のとき (3.3) より

$$u_{n,m+1}+u_{n,m-1}-u_{n+1,m}-u_{n-1,m} = h^2 f_{n,m} \tag{3.6}$$

が得られる．まず $t$ 軸上の格子点 $\mathrm{P}(0,a)$ に注目することにし，さらに $a=(2N+1)h$ とする．(3.6) の両辺を

$$m+n = \text{偶数},\ 1 \leqq m \leqq 2N,$$
$$-2N+m \leqq n \leqq 2N-m \tag{3.7}$$

を満足する $m, n$ について加える．(3.7) は $(nh, mh)$ が第 3.2 図の ○ を付した点になるための条件である．左辺の和では $u_{\mathrm{P}}$ および $\mathrm{S}_0^{(\mathrm{P})}, \mathrm{S}_1^{(\mathrm{P})}$ での $u_h$ だけが残り (図について検討すれば明らか)




第 3.2 図

$$u_{\mathrm{P}}+\sum_n{}' u_{n,0}-\sum_n{}'' u_{n,1} = h^2 \sum_{m,n}{}^{\Delta} f_{n,m} \tag{3.8}$$

となる．ただし，右辺の和は (3.7) で示された範囲についての和であり，

$\sum_n{}'$ は $-2N+1$ から $2N-1$ までの奇数についての和,

$\sum_n{}''$ は $-2N$ から $2N$ までの偶数についての和

を表わす．(3.8) および $u_{\mathrm{A}_1}+\sum_n{}' u_{n,0} = \sum_n{}'' u_{n-1,0}$ から

$$u_{\mathrm{P}} = \varphi_1(\mathrm{A}_1)+\sum_n{}''\{\varphi_1(nh)-\varphi_1((n-1)h)\}+h\sum_n{}''\varphi_2(nh)+h^2\sum_{m\ n}{}^{\Delta} f_{n,m}$$

が出てくる．ここで，$|\varphi_1|<\delta_1$, $|[\varphi_1((n+1)h)-\varphi_1(nh)]/h|<\delta_1'$, $|\varphi_2|<\delta_2$, $|f_{n,m}|<\delta$ とおけば，

$$\sum_n{}'' h = (2N+1)h = a, \quad \sum_{m,n}{}^{\Delta} h^2 < \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{PB}_1 = a^2$$

を用いて，

$$|u_{\mathrm{P}}| < \delta_1+a\delta_1'+a\delta_2+a^2\delta$$

が得られる．一般の格子点 $(x,t)$ では，同様にして

$$|u_h(x,t)| < \delta_1+t\delta_1'+t\delta_2+t^2\delta \tag{3.9}$$

が成り立つことも明らかである．不等式 (3.9) から上述のノルムについての適正さが直ちに導かれる．したがって $u$ が $x$ 軸まで含めて十分滑らかならば

$$\max|u(x,t)-u_h(x,t)| \to 0 \qquad (h\to 0)$$

が得られる．(ただし max は $-\infty<x<\infty$, $0\leqq t\leqq T$ の範囲でとる．) $T$ は任意であるから任意の点で $u_h$ が $u$ に収束することになる．

最後に，$r=2/\sqrt{3}>1$ とすれば (3.3), (3.4) は初期条件に関して安定でないことを示そう (ノルムは上と同じ)．

$$u_h \equiv u_{n,m} = (-1)^{n+m}3^m\tau \tag{3.10}$$

とおけば，$\varphi_{h1}(nh)=(-1)^n\tau$, $\varphi_{h2}(nh)=-4(-1)^n$ としたとき $r_{h1}[u_h]=\varphi_{h1}$, $r_{h2}[u_h]=\varphi_{h2}$ となることは直ちにわかる．また $|\varphi_{h1}|=\tau$, $|(\varphi_{h1}(nh+h)-\varphi_{h1}(nh))/h|=2r$, $|\varphi_{h2}|=4$ であるから $h,\tau\to 0$ のとき (上述のノルムに関して) $\varphi_{h1}, \varphi_{h2}$ は一様に有界である．一方上の $u_h$ が $l_h[u_h]=0$ を満足することは直接 (3.3) に代入すればわかる．いま格子点 $(x,t)$, ただし $t>0$, に注目し $\tau$ は $t/\tau$ が整数となるような値をとって 0 に近づくものとする．(3.10) より

$$|u_h(x,t)|=3^{t/\tau}\tau\to\infty \qquad (\tau\to 0)$$

が得られ，(3.3), (3.4) が初期条件に関して不安定であることがわかる．

## §4　指数による安定性の吟味，その他

1)　すでに用いた用語であるが，差分方程式の初期値問題，初期条件という言葉の意味を明確にしておく．簡単のために考える格子領域 $G_h$ は $0\leqq t\leqq T$ (または $0\leqq t$), $a\leqq x\leqq b$ に含まれる格子点の集合であるとする．

差分方程式

$$l_h[u_h]=f \tag{4.1}$$

と前章の意味での境界条件

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi} \qquad (1\leqq i\leqq s) \tag{4.2}$$

からなる問題が (4.2) の若干個，たとえば最初の $p$ 個

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi} \qquad (1\leqq i\leqq p,\ p\leqq s) \tag{4.3}$$

を初期条件とする**初期値問題**であるといわれるのは次の (i), (ii) が成り立つときである．

(i)　(4.3) により最初の $p$ 段 $S_0, S_1, \cdots, S_{p-1}$ での $u_h$ の値が一義的に定まる．

(ii)　任意の $m\geqq p$ に対し，$S_{m-1}, S_{m-2}, \cdots, S_{m-p}$ 上での $u_h$ の値を与えれば (4.1) および (4.2) のうち (4.3) でないもの，すなわち

$$r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi} \qquad (p+1\leqq i\leqq s) \tag{4.4}$$

から $S_m$ 上での $u_h$ の値が一義的に定まる．

注意 1〕 今後は境界条件といえば，特に断らない限り，(4.4) に含まれる条件を意味することにする．

注意 2〕 上の性質 (i), (ii) は微分方程式の初期値問題を近似する差分方程式の問題にはたいてい備わっている．ただ，“一義的”という条件は場合によっては自明でないこともある．

2) 上の (i), (ii) が満足されているとき，$l_h$，$r_{hi}$ $(p+1\leqq i\leqq s)$ が線型ならば，$S_{m-1},\cdots,S_{m-p}$ 上での $u_h$ を与えて $S_m$ 上での $u_h$ を決定することは $S_m$ 上での $u_h$ を未知数とする連立一次方程式を解くことに帰着する．したがって，特に $f=0$, $\varphi_{hi}=0$ $(p+1\leqq i\leqq s)$ ならば，すなわち，方程式と境界条件が同次ならば，$u_{n,m}$ は $S_{m-1},\cdots,S_{m-p}$ 上での $u_h$ の線型結合で表わされる．この線型結合の係数の絶対値の和を $M_{n,m}$ とするとき，$G_h$ における $M_{n,m}$ の最大値を初期値問題 (4.1), (4.3), (4.4) の**指数** (index) とよぶ．$p=1$ の場合には指数と初期条件についての安定性との間に次の命題が成り立つ．

**定理**　初期条件が $r_{h1}[u_h]=u_{n,0}=\varphi_{h1}$ である線型の初期値問題の指数 $J$ が，$0<\tau<\tau_0$ のとき，

$$J\leqq 1+C\tau \qquad (C\geqq 0,\ \text{定数}) \tag{4.5}$$

を満足するならば，その初期値問題は初期条件に関し安定である．ただし，領域は $t$ について有界とし，$u_h, \varphi_{h1}$ のノルムは函数値の絶対値の最大値を採る．

(証明) 同次な方程式，境界条件，初期条件 $r_{h1}[u_h]=\varphi_{h1}$ の解 $u_h$ の $S_m$ 上での最大値を $\|u_h\|^{(m)}$ と書けば，指数の定義と (4.5) により，

$$\|u_h\|^{(0)}=\|\varphi_{h1}\|_{\Phi_{h1}},$$

$$\|u_h\|^{(m)}\leqq(1+C\tau)\|u_h\|^{(m-1)} \qquad (m=1,2,\cdots),$$

したがって

$$\|u_h\|^{(m)}\leqq(1+C\tau)^m\|\varphi_{h1}\|_{\Phi_{h1}}. \tag{4.6}$$

考える領域が $0\leqq t\leqq T$ $(T>0,\ \text{定数})$ の範囲に含まれるとすれば，そこでは $0\leqq m\tau\leqq T$．よって $(1+C\tau)^m\leqq e^{CT}$．結局，次の不等式が得られ初期条件についての安定性が得られる．$\|u_h\|_{U_h}\leqq e^{CT}\|\varphi_{h1}\|_{\Phi_{h1}}$．　(証終)

**系**　$J\leqq 1$ ならば定理における条件“領域が $t$ について有界”はのぞいてよい．

注意 3〕 定理の条件は初期条件に関して安定であるための十分条件である．$J\geqq m>1$ ($m$ は定数) であっても安定である場合がある．

注意 4〕 $J$ を見出すのに境界条件 (4.4) の影響を見落してはいけない.

例題 1〕 G を $0<t<T,\ 0<x<1$ で定められる領域, $h=1/N$ とする. 微分方程式 $u_t=u_{xx}$, 初期条件 $u(x,0)=\varphi(x)$, 境界条件 $u(0,t)=u(1,t)=0$ のそれぞれを近似するものとして

$$(u_{n,m+1}-u_{n,m})/\tau=(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2, \tag{4.7}$$

$$u_{n,0}=\varphi(nh), \quad u_{0,m}=u_{N,m}=0 \tag{4.8}$$

を考える. ただし, (4.7) では $0\leqq m,\ 1\leqq n\leqq N-1$, (4.8) では $0\leqq n\leqq N,\ 0\leqq m$ である. $\sigma=\tau/h^2$ とおけば, (4.7) より $1\leqq n\leqq N-1$ に対し

$$u_{n,m+1}=\sigma u_{n+1,m}+(1-2\sigma)u_{n,m}+\sigma u_{n-1,m}. \tag{4.9}$$

(4.9) と (4.8) の境界条件とから $0<\sigma\leqq 1/2$ ならば $J=1$ が得られる.

例題 2〕 (4.7) のかわりに $u_t=u_{xx}+a(x,t)u$ を近似する $(u_{n,m+1}-u_{n,m})/\tau=(u_{n+1,m}-\cdots)/h^2+a_{n,m}u_{n,m}$ を考える. ただし, $a_{n,m}=a(nh,m\tau)$. また (4.8) は同じとする. $|a(x,t)|\leqq C$ となる定数 $C$ が存在すれば, 今度も $0<\sigma\leqq 1/2$ のとき $J\leqq 1+C\tau$ となり定理が適用できる.

例題 3〕 例題 1 での (4.7), (4.8) のうち, 境界条件 $u_{0,m}=0$ だけを $u_x(0,t)+au(0,t)=0$ ($a$ は定数) を近似する

$$(u_{1,m}-u_{0,m})/h+au_{0,m}=0 \tag{4.10}$$

でおきかえる. この場合 (4.9) は変りがない. また $u_{N,m+1}=0$ である. 一方 (4.10) より

$$u_{0,m+1}=u_{1,m+1}/(1-ah) \tag{4.11}$$

となり, この右辺の $u_{1,m+1}$ を (4.9) を用いて書き改めれば $u_{n,m+1}$ $(0\leqq n\leqq N)$ を $S_m$ での $u_{n,m}$ を用いて表わす式が揃うことになる. 結局, $0<\sigma\leqq 1/2$ ならば

$$J=\max\{1,1/(1-ah)\}$$

が得られる. $a\leqq 0$ ならば $J=1$. したがって定理は適用可能である. $a>0$ とすれば

$$J=1/(1-ah)=1+a\sqrt{\tau}/\sqrt{\sigma}+O(\tau)$$

となり $\tau\to 0$ のとき $\sigma$ は定数に保たれるとすれば (4.5) が成り立つような $C$ は存在しない. しかし, 実はこの場合も他の方法により安定性を証明することが可能である.

## §5　変数分離による安定性の吟味

1)　代表的な例題について述べるが一般の問題に適用できる判定法であり, またその際に利用される種々の補助的な公式が提出されている.

$0\leqq t\leqq T,\ 0\leqq x\leqq 1$ の範囲で考える. $h=1/N$ とし, 次の差分方程式の初期値問題 ((2.4) 参照)

$$(u_{n,m+1}-u_{n,m})/\tau=(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2, \tag{5.1}$$

$$u_{n,0}=\varphi_h(nh), \quad u_{0,m}=u_{N,m}=0 \tag{5.2}$$

の初期条件に関する安定性を調べる.

さて $x_n$ $(0\leqq n\leqq N)$ で定義され，$x_0, x_N$ では0となる函数全体のつくるベクトル空間を $E$ とし，$v\in E$ のノルムは (5.3) で与えられるものとする.

$$\|v\|_E^2=h\sum_{n=1}^{N-1}v^2(x_n). \tag{5.3}$$

(5.3) に応じて内積を $(\quad,\quad)_E$ で書くことにするが，その意味は明らかであろう (§4.16, 1参照). さて

$$\varphi^{(k)}(x_n)=\sqrt{2}\sin k\pi x_n \qquad (k=1,\cdots,N-1) \tag{5.4}$$

を導入すると，§4.2 例題2により

$$\left.\begin{aligned} &h^{-2}\delta_h^{(2)}\varphi^{(k)}=\rho_k\varphi^{(k)},\\ &\rho_k=\frac{2}{h^2}(\cos k\pi h-1)=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{5.5}$$

が成り立つ. また $(\quad,\quad)_E$ に関し $\{\varphi^{(k)};\ 1\leqq k\leqq N-1\}$ が完全正規直交系をなすことを容易に検証することができる.

注〕 直交性は §4.2, 例題2の議論よりすでに明らか.

よって，$\varphi_h$ は $c_k=(\varphi_h,\varphi^{(k)})_E$ $(1\leqq k\leqq N-1)$ を用いて

$$\varphi_h=\sum_{k=1}^{N-1}c_k\varphi^{(k)},\quad \|\varphi_h\|_E^2=\sum_{k=1}^{N-1}{c_k}^2 \tag{5.6}$$

のように展開される.

注〕 $\varphi_h\in E$ であること，すなわち $\varphi_h(0)=\varphi_h(1)=0$ であることは (5.2) が矛盾しないためには当然仮定されている. この種の仮定を初期条件，境界条件の**両立性** (compatibility) の仮定ということがある.

次に，$t$ だけ ($m$ だけ) の函数 $w^{(k)}$ を $w^{(k)}\cdot\varphi^{(k)}$ が同次方程式 (5.1) を満足するように決定する. 実際，上の形の函数を (5.1) に代入し (5.5) を考慮すると $w^{(k)}$ の満たすべき方程式は

$$w_{m+1}^{(k)}-w_m^{(k)}=\tau\rho_k w_m^{(k)};\quad w_m^{(k)}=w^{(k)}(m\tau) \tag{5.7}$$

となる. (5.7) の解のうち

$$w_0^{(k)}=1 \tag{5.8}$$

であるものを改めて $w^{(k)}$ と書くことにすると，初期値問題の解 $u_h(u_{n,m}=u_h(nh,m\tau))$ は

$$u_h=\sum_{k=1}^{N-1}c_k w^{(k)}\cdot\varphi^{(k)} \tag{5.9}$$

で与えられる. ただし $c_k$ は (5.6) におけるものとする. $u_h$ を $\mathrm{S}_m$ 上に限って

考えたものを $u_h^{(m)}$ とすれば $u_h^{(m)} \in E$ とみなすことができる．(5.9) より

$$\| u_h^{(m)} \|_E^2 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k{}^2 (w_m^{(k)})^2 \leqq \left[ \max_k |w_m^{(k)}| \right]^2 \cdot \| \varphi_h \|_E^2.$$

したがって，$u_k$ のノルムを

$$\| u_h \|_{U_h} = \max_{m,\, 0 \leqq m\tau \leqq T} \| u_h^{(m)} \|_E \tag{5.10}$$

で定義すると，$0<h<h_0$, $0<\tau<\tau_0$ のとき

$$\| u_h \|_{U_h} \leqq C \cdot \| \varphi_h \|_E \tag{5.11}$$

が成り立つような $h, \tau$ によらない定数 $C$ が存在するための条件は $w^{(k)}$ が有界 ($h, \tau, k$ につき一様) であることである．(5.11) は上述のノルムの意味での初期条件に関する安定性を示す不等式である．結局，(5.7) の解 $w^{(k)}$ を吟味すればよいことになった．一方，$w^{(k)}$ は一次方程式 $\lambda - 1 = \tau\rho_k$ の根 $\lambda$ を用いて

$$w^{(k)}(m\tau) = \lambda^m, \qquad \lambda = 1 + \tau\rho_k \tag{5.12}$$

で与えられる．

したがって，$\rho_k$ を一般に $\rho$ で表わせば

$$\max |1 + \tau\rho| \leqq 1 \tag{5.13}$$

ならば (5.11) は $C=1$ として成り立つ．(5.13) の max は $h, \tau, k$ についてとるのであるが，(5.13) は

$$-2 \leqq \rho\tau \leqq 0 \tag{5.14}$$

と書き改められる．一方

$$\sigma = \tau / h^2 \tag{5.15}$$

とおけば，(5.5) より $-h^{-2}4 < \rho < 0$ であるから，

$$-4\sigma < \rho\tau < 0 \tag{5.16}$$

が得られる．(5.16) から (5.14) が導かれるための条件は

$$0 < \sigma \leqq 1/2 \tag{5.17}$$

である．結局 (5.17) が成り立てば初期条件に関して安定であることがわかった．

上の方法が陽でない方程式に対しても有効であることを示す一例 ((2.6) 参照) をあげよう．(5.1) のかわりに

$$(u_{n,m} - u_{n,m-1})/\tau = (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m})/h^2 \tag{5.18}$$

をとる．初期条件，境界条件その他は変りがないとする．この場合，解を (5.9)

の形に表わすとすると $w^{(k)}$ は

$$w_m^{(k)}-w_{m-1}^{(k)}=\tau\rho_k w_m^{(k)},\quad w_0^{(k)}=1 \tag{5.19}$$

で決定される．$w_m^{(k)}=\lambda^m$ とおくと，$\lambda$ は

$$1-\frac{1}{\lambda}=\tau\rho_k \quad \text{により} \quad \lambda=\frac{1}{1-\tau\rho_k} \tag{5.20}$$

で与えられる．$\tau\rho_k<0$ であるからつねに $|\lambda|<1$．したがって，(5.11) は $C=1$ として成り立ち，別に $\tau, h$ の間に条件を課さなくても初期条件に対し安定である．**同じ微分方程式を近似する差分方程式のうち陽でないものの方が陽であるものより“安定性がよい”ことはしばしば見受けられる現象である．**

2)　高階 (時間について) の場合にも適用できることを示すために 1) と同じ格子につき，$u_{tt}=u_{xx}$ を近似する

$$(u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1})/\tau^2=(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2 \tag{5.21}$$

を考える．境界条件は 1) と同じとし，初期条件は

$$u_{n,0}=\varphi_{h1}(nh),\quad (u_{n,1}-u_{n,0})/\tau=\varphi_{h2}(nh) \tag{5.22}$$

とする．再び (5.5) の $\varphi^{(k)}$ を用いて

$$\varphi_{h1}=\sum_{k=1}^{N-1}c_k'\varphi^{(k)},\quad \varphi_{h2}=\sum_{k=1}^{N-1}c_k''\varphi^{(k)} \tag{5.23}$$

の形に展開したとする．また，$w^{(k)}\cdot\varphi^{(k)}$ が (5.21) を満たすための条件を求めると

$$w_{m+1}^{(k)}-2w_m^{(k)}+w_{m-1}^{(k)}=\tau^2\rho_k w_m^{(k)} \tag{5.24}$$

となる．そこで (5.24) の解のうち

$$w_0^{(k)}=1,\quad (w_1^{(k)}-w_1^{(k)})/\tau=0 \quad \text{なるものを} \quad w'^{(k)},$$

$$w_0^{(k)}=0,\quad (w_1^{(k)}-w_0^{(k)})/\tau=1 \quad \text{なるものを} \quad w''^{(k)}$$

で表わすことにすると，初期値問題の解 $u_h$ は (5.23) の $c_k', c_k''$ を用いて

$$u_h=\sum_{k=1}^{N-1}\{c_k'w'^{(k)}\varphi^{(k)}+c_k''w''^{(k)}\varphi^{(k)}\} \tag{5.25}$$

と書かれる．今度も，$\|\ \ \|_{U_h}$ を (5.10) によって定義すれば，$0<h<h_0$, $0<\tau<\tau_0$ のとき

$$\|u_h\|_{U_h}^2\leqq C\cdot(\|\varphi_{h1}\|_E^2+\|\varphi_{h2}\|_E^2) \tag{5.26}$$

が成り立つような $h, \tau$ によらない定数 $C$ が存在するための条件は $w'^{(k)}, w''^{(k)}$ が有界 ($h, \tau, k$ につき一様) であることといえる．

注〕 (5.26) より $\|u_h\|_{U_h} \leqq 2\sqrt{C}(\|\varphi_{h1}\|_E + \|\varphi_{h2}\|_E)$ が得られる.

さて, $r=\tau/h$ とおき, $h\to 0$ のとき $r$ は一定かつ $r<1$ と仮定すれば, 上記の安定性が得られることを示そう. いま $\rho^{(k)}, w'^{(k)}, w''^{(k)}$ を一般に $\rho, w', w''$ と書くことにすると, 二次方程式

$$\lambda^2-2\lambda+1=\tau^2\rho\lambda \tag{5.27}$$

が相異なる二根 $\lambda_1, \lambda_2$ を持つとき, $w', w''$ は

$$w'=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1{}^m+\frac{1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2{}^m, \quad w''=\frac{\tau}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1{}^m-\lambda_2{}^m) \tag{5.28}$$

で与えられる. (5.27) の判別式を $D$ とすると

$$D=\tau^2\rho(4+\tau^2\rho).$$

一方, (5.5) より $-4/h^2<\rho<0$, すなわち $-4r^2<\rho\tau^2<0$. よって, $r<1$ を考慮すれば

$$4+\tau^2\rho>4(1-r^2)>0.$$

結局 $D<0$ となり, $\lambda_1, \lambda_2$ は互に共役な虚根となる. また $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$ により

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1. \tag{5.29}$$

さらに $h_0$ を 1 より小さな正数とし

$$c_0=-\rho_1(h_0)=2(1-\cos\pi h_0)/h_0{}^2 \tag{5.30}$$

とおけば, すでに §4.16, 1) でみたように, $0<h<h_0$ のとき $-4/h^2<\rho<-c_0$ である. これらから,

$$\begin{aligned}|\lambda_1-\lambda_2|^2&=|D|=|\rho\tau^2(4+\rho\tau^2)|>4c_0\tau^2(1-r^2),\\ |1-\lambda_1|^2&=|1-\lambda_2|^2=|(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)|\\ &=|\rho\tau^2|\end{aligned}$$

などが導かれる. (5.28) の評価に便利な形になおせば

$$\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2|}<\frac{1}{2\tau\sqrt{c_0(1-r^2)}}, \quad \frac{|1-\lambda_1|}{|\lambda_1-\lambda_2|}=\frac{|1-\lambda_2|}{|\lambda_1-\lambda_2|}<\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}}.$$

上の不等式および (5.29) を用いて, $0<h<h_0$ のとき

$$|w'|<\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}, \quad |w''|<\frac{1}{\sqrt{c_0(1-r^2)}} \tag{5.31}$$

であることが得られる. (5.25) に適用すると

$$\|u_h^{(m)}\|_E^2 \leqq \frac{1}{(1-r^2)}\|\varphi_{h1}\|_E^2+\frac{1}{c_0(1-r^2)}\|\varphi_{h2}\|_E^2 \tag{5.32}$$

となり，これから直ちに(5. 26)の形の不等式が得られ，初期条件に関する安定性が結論される．

注〕 本節の結論は (5. 10) のかわりに

$$\|u_h\|_{U_h}=\tau\sum_{m,\,0\leqq m\tau\leqq T}\|u_h^{(m)}\|_E$$

としても通用する．

## §6　初期条件に関する安定性と方程式に関する安定性

線型差分方程式の初期値問題では初期条件に関する安定性が証明されれば，その結果から方程式に関する安定性，さらに適正さを証明できることが多い．したがって前節で扱った初期条件についての安定性の判定法は収束性の吟味に対しても有力な方法である．簡単な例について示しておく．

前節 2) の初期値問題で方程式を非同次のものに，初期条件を同次のものでおきかえ，他は変りがないとする．すなわち

$$l_h[u_h]\equiv(u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1})/\tau^2-(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})/h^2=f_{n,m},\quad f_{n,m}=f(nh,m\tau),\tag{6.1}$$

$$u_{n,0}=0,\quad (u_{n,1}-u_{n,0})/\tau=0,\tag{6.2}$$

$$u_{0,m}=u_{N,m}=0\tag{6.3}$$

を考える．

$f=f(nh,m\tau)$ のノルムを (5. 10) に類似の仕方で定義するのが自然であるが，ここでは簡単のために

$$\|f\|_{F_h}=\max_{m,n}|f_{n,m}|\tag{6.4}$$

と定義し，$\|f\|_{F_h}<\delta$ と仮定する．また，各 $k$ に対し，$S_k$ 上で $f$ に等しく，それ以外では 0 である函数を $f^{(m)}$ と書き，

$$l_h[v]=f^{(k)},\quad v_{n,0}=0,\quad (v_{n,1}-v_{n,0})/\tau=0,$$

$$v_{0,m}=v_{N,m}=0\ \text{の解を}\ v^{(k)}\ \text{とすれば},$$

$$u_h=\sum_k v^{(k)}\tag{6.5}$$

は重ね合せの原理から明らかである．ただし上の和は $k=1$ から $(k+1)\tau\leqq T$ を満足する $k$ について加える．さて定義の仕方から“$m\leqq k$ ならば $v_{n,m}^{(k)}=0$”は明らかである．また $l_h[v]=f^{(k)}$ を $S_k$ 上で書けば，$v_{n,k}^{(k)}=0$, $v_{n,k-1}^{(k)}=0$ より $v_{n,k+1}^{(k)}=\tau^2 f_{n,k}$ となることは直ちにわかる．$S_{k+1}, S_{k+2},\cdots$ では $f^{(k)}=0$ であることに注意すると，$v^{(k)}$ は $t=k\tau$ 上で与えられた初期条件

$$v_{n,k}^{(k)}=0,\quad (v_{n,k+1}^{(k)}-v_{n,k}^{(k)})/\tau=\tau f_{n,k}$$

を満足する同次方程式，同次境界条件の解になっている．したがって $r=\tau/h$ とおき，$h\to 0$ のとき $r$ は一定かつ $r<1$ と仮定すれば，(5.32) を $\varphi_{h1}=0$, $\varphi_{h2}=\tau f^{(k)}=\tau f_{n,k}$ と考えて適用することができる．$|f|<\delta$ であるから $\|f^{(k)}\|_E^2<\delta^2$. 結局 ($v^{(k)}$ に付した $(k)$ は $u_h^{(m)}$ の $(m)$ とは意味がちがうことに注意),

$$\|v^{(k)}\|_{U_h}<\frac{\tau\delta}{\sqrt{c_0(1-r^2)}}\equiv C_1\tau\delta, \tag{6.6}$$

ただし $\|\ \ \|_{U_h}$ は (5.10) の定義に従うものである．

(6.5) と (6.6) とを結びつけると

$$\|u_h\|_{U_h}\leqq\sum_k\|v^{(k)}\|_{U_h}<C_1\delta\sum_k\tau<C_1\delta T \tag{6.7}$$

が得られる．これは有界な領域では考えている差分方程式の初期値問題が方程式に関して安定であることを示している．

## §7 $t\to\infty$ のときの安定性

差分方程式の初期値問題が

$$\text{方程式}\quad l_h[u_h]=f, \tag{7.1}$$

$$\text{初期条件}\quad r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}\quad (1\leqq i\leqq p), \tag{7.2}$$

$$\text{境界条件}\quad r_{hi}[u_h]=\varphi_{hi}\quad (p+1\leqq i\leqq s) \tag{7.3}$$

からなっているとする．このとき $h$ (およびその他の格子間隔) を固定して考えて，$f=0$, $\varphi_{hi}=0$ $(p+1\leqq i\leqq s)$ に対する任意の解が $t\to\infty$ のとき有界ならば上の初期値問題は $t\to\infty$ のとき (初期条件に関し) 安定であるという．すなわち

**定義** 差分方程式の初期値問題において方程式，境界条件を同次としたときの解を $u_h$ とするとき

$$|u_h(x,t)|\leqq M\qquad (t\to\infty) \tag{7.4}$$

なる $M$ が存在すれば，その初期値問題は $t\to\infty$ のとき安定である，または，$t\to\infty$ のとき初期条件に関して安定であるという．ただし，$M$ は初期値，$\tau, h$ によってもよい．

上の意味の安定性は今までの意味の初期条件に関する安定性とは非常に近い関係にある．多くの場合に“すべての十分小さな $h$ のおのおのにつき，$t\to\infty$ のとき安定である”条件と“時間について有界でない領域で，(今までの意味に

おいて）初期条件に関して安定である”条件とが一致する．しかし論理的には両者は異なり，また実際一方の意味で安定であるが，他方の意味では安定でない例を作ることができる．また $t\to\infty$ のときの安定性はそのままで適正さ，収束性とは結びつかない．

$t\to\infty$ のときの安定性の応用上の意味は次のように解釈される．“丸めの誤差などにより初期値に有限の誤差があったとするとき，その解に及ぼす影響が無限の区間にわたって有界である”ための条件が $t\to\infty$ のときの安定さである．しかし，この種の誤差の“成長”に関連した解釈は今までの意味の安定性についても可能であり，特に問題とする範囲が時間について有界である場合には $t\to\infty$ の安定性よりも事情に即したものであるが，これについての議論は紙面の都合で割愛する．ただ差分方程式による近似解法に関連した立場から採り上げられた安定性の研究の初期のものは $t\to\infty$ のときの安定性を対象としたものであったことを付言するにとどめる．

$t\to\infty$ のときの安定性に関しても，指数による判定法，変数分離による判定法があるが，それらは上記の定義にさえ留意すれば §4, §5 の議論から容易に推察できると思う．

## §8　安定性に関する von Neumann, Lax 等の理論

近似すべき微分方程式，近似差分方程式の初期値問題が以下で見るような適当な性質をそなえているときには，差分方程式の空間変数 $x$ を連続変数と解釈することにより理論が極めて簡潔になり，かつ安定性の吟味に Fourier 級数が有効に利用される．この方法は von Neumann によって提案され，Richtmyer, Lax 等多数の人達によって整備されたものである．差分方程式において変数を連続変数とみなすことは，本書で一貫して採用してきた“格子点函数に対する差分方程式”と観点を異にしており，それ自体は数値解法の立場から見ていささか非現実的であるけれども，理論的には興味のある対象であり，また，今までのような差分方程式に対して十分示唆的な結果が得られるわけである．Fourier 級数の応用は §5 の取扱いと類似な方法と考えられるが，Fourier 級数に慣れた読者にとってはより近づきやすい方法といえよう．これらの点を考慮しつつ，詳細は編末文献〔23〕にゆずるとして，標記の理論の一端のみを，それが最も有効に適用できるような例題について紹介しておくことにする．

1)　近似すべき初期値問題が，熱伝導の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8.1}$$

および，初期条件 $u(x,0)=\varphi(x)$ から成るものとする．ただし，$x$ の変域は全

実数であるが，解 $u(x,t)$，初期値 $\varphi(x)$ は $x$ に関して周期 $2\pi$ を持つものとする．言うまでもなくこの周期性の要請は今までの境界条件に相当するものであり，下記での Fourier 級数の応用を容易にしている．

$t$ に関しては有限な変域

$$0 \leqq t \leqq T \qquad (T>0), \tag{8.2}$$

に限るものとする．今後 $T$ は固定して考える．

上のように定められた初期値問題を (Pr.) と略記することにしよう．

いま，周期 $2\pi$ を持つ $x$ の函数からなり，内積が

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)dx \tag{8.3}$$

で定義される Hilbert 空間 $\mathfrak{X}$ を導入すれば，(Pr.) の解 $u(x,t)$ は $t$ を固定すれば $\mathfrak{X}$ の元と考えられるが，それを $u(t)$ $(0\leqq t\leqq T)$ と書くことにする．一方，$A$ を $\mathfrak{X}$ における微分演算子 $d^2/dx^2$ とするとき，(Pr.) は形式的に

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t)=Au(t) \qquad (0\leqq t\leqq T,\ u(t)\in\mathfrak{X}), \\ u(0)=\varphi \end{cases} \tag{8.4}$$

で表わされる．もっとも，(8.4) の意味を明確にするにはかなりの数学的準備が必要で，われわれはそれに立入る余裕がない．ただ，この節では (Pr.) を $t$ をパラメタとする $\mathfrak{X}$ の元 $u(t)$ を求める問題と解釈すること，および (8.4) の形で理論の一般化が Lax 等により進められていることのみを強調しておこう．

次に，(Pr.) を "近似" する差分方程式の問題を述べる．$x$, $t$ それぞれの差分間隔として正数 $h,\tau$ を導入するが従来と同様に，両者の間には例えば $\tau=\tau(h)$ のような定まった関係があり，$h\to 0$ と $\tau\to 0$ とは同値であるとする．そこで，$-\infty<x<\infty$, $t=n\tau$ $(n=0,1,2,\cdots;\ n\tau\leqq T)$ で定義され，$x$ に関して周期 $2\pi$ を持つ函数 $u_h(x,t)$ に対する条件

$$\begin{aligned}[u_h(x,(n+1)\tau)-u_h(x,n\tau)]/\tau \\ =[u_h(x+h,n\tau)-2u_h(x,n\tau)+u_h(x-h,n\tau)]/h^2\end{aligned} \tag{8.5}$$

を考えれば，これは $x$ が連続変数である差分方程式である．(8.5) と初期条件 $u_h(x,0)=\varphi(x)$ とによって構成される問題を $(\mathrm{Pr.})_h$ と書くことにすれば，$(\mathrm{Pr.})_h$ は (Pr.) を近似する初期値問題と見なしてよいであろう．

$u_h(x,n\tau)$ についても，$n$ を固定して $x$ の函数と考えれば $\mathfrak{X}$ の元になるわけ

であるが，それを $u_h^{(n)}$ と書こう．このとき，$(\mathrm{Pr.})_h$ は $\mathfrak{X}$ の元の列 $u_h^{(n)}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ を求める問題と解釈することができる．こうした観点に立てば，(Pr.)，$(\mathrm{Pr.})_h$ の解 $u(t), u_h^{(n)}$ は同じ函数空間 $\mathfrak{X}$ の元であり，それらを比較したり，収束性を論じたりするのに $\mathfrak{X}$ におけるノルムなどの概念がそのまま役立つことになる．§4.4, 4.9, 4.13, 4.14 での記述，概念の煩雑さが，微分方程式，差分方程式をそれぞれ異なった函数空間で考察せざるを得なかったことに起因していることを思えば，今度の事態がはるかに有利であることは明らかであろう．

実際，$u_h^{(n)}$ の $u(t)$ への収束性は

$$\| u_h^{(n)}-u(t) \| \to 0 \qquad (n\tau\to t,\ \tau, h\to 0) \tag{8.6}$$

が $0\leqq t\leqq T$ で成立することと定義される．

また，$(\mathrm{Pr.})_h$ の安定性(初期条件についての)は，任意の $u_h^{(0)}$ に対して，$(\mathrm{Pr.})_h$ の解 $u_h^{(n)}$ が十分小さな $\tau, h$ につき，

$$\| u_h^{(n)} \| \leqq C \| u_h^{(0)} \| \qquad (n\tau\leqq T) \tag{8.7}$$

を満たすことと定義される．ただし，(8.7) において，$C$ は $n, \tau, h$ によらない定数である．この節では安定性は (8.7) の意味に限って用いるが，これと以前の安定性とを比較してみることを読者にお願いしておこう．§4.14 の定理と類似の結果として，微分方程式がいわゆる適正 (correctly posed) であり，また差分方程式が微分方程式を“近似”するものであるときには，(8.7) の安定性が (8.6) の収束性を意味することが知られている．

この節の残った部分は (8.7) の安定性の考察に当てられている．

さて，$x$ についての二階差分演算子 (差分間隔は $h$) を $h^{-2}\delta_h^{(2)}$ で表わせば (8.5) は

$$[u_h^{(n+1)}-u_h^{(n)}]/\tau = h^{-2}\delta_h^{(2)}u_h^{(n)},$$

したがって，

$$u_h^{(n+1)} = u_h^{(n)}+\tau h^{-2}\delta_h^{(2)}u_h^{(n)}$$

と書き改められる．すなわち，$I$ を $\mathfrak{X}$ の恒等演算子とし，$\mathfrak{X}$ での演算子

$$E(h) = I+\tau h^{-2}\delta_h^{(2)} \tag{8.8}$$

を導入すれば，(8.5) は

$$u_h^{(n+1)} = E(h)u_h^{(n)} \tag{8.9}$$

となる．さらに，$E(h)$ が $n$ によらないことを用いれば

$$u_h^{(n)} = E^n(h)u_h^{(0)}$$

が得られ，(8.7) が $\| E^n(h)u_h^{(0)} \| \leqq C \| u_h^{(0)} \|$ で表わされる．ここで，$u_h^{(0)}$ が任意であったことを考慮すれば，結局，(8.7) は

$$\| E^n(h) \| \leqq C \tag{8.10}$$

にほかならないことが判る．言いかえれば，$n\tau \leqq T$ なるかぎり，$\| E^n(h) \|$ が，$n, h, \tau$ に関して ($h, \tau$ が十分小なるとき) 一様に有界であることが安定性の必要十分条件である．差分方程式が (8.5) である場合に限らず，一般に適当な $E(h)$ を用いて，(8.9) の形に書ける場合にもその $E(h)$ について (8.10) が成立することが安定性の必要十分条件である．種々の $E(h)$ について (8.10) の成否の判定法が提出されているが，その中で最も有名なのが次に述べる von Neumann の条件 (8.18) である．

いま，$E(h)$ の固有値を $\lambda_1(h), \lambda_2(h), \cdots$ とし，

$$r_h = \sup_i |\lambda_i(h)|, \quad r = \sup_h r_h = \sup_{i,h} |\lambda_i(h)| \tag{8.11}$$

とおく．$E(h)$ が正規ならば[1]よく知られているように，

$$\| E^n(h) \| = r_h{}^n \tag{8.12}$$

が成り立つので，(8.10) は

$$r^n \leqq C \qquad (n\tau \leqq T) \tag{8.13}$$

と同値である．ただし，$C$ は $n$ によらず，$\tau, h$ が十分小ならば $\tau, h$ にもよらない定数である．ところが，(8.13) は

$$r \leqq 1 + O(\tau) \qquad (\tau \to 0) \tag{8.14}$$

と同値である．(8.14) の意味を詳しく述べると，ある正数 $\tau_0$ に対して，$0 \leqq \tau \leqq \tau_0$ のとき，$\tau$ によらない正の定数 $B$ が存在して，

$$r \leqq 1 + B \cdot \tau \tag{8.15}$$

が成立することである．

実際，(8.15) が成り立てば，$n\tau \leqq T$ を用いて，

$$r^n \leqq (1+B\tau)^n \leqq \left(1+\frac{BT}{n}\right)^n \leqq e^{BT} \tag{8.16}$$

が得られ，逆に (8.13) を仮定すれば，特に $n = T/\tau$ と取ることにより

(1) 線型演算子 $A$ が正規であるとは $A^*A = AA^*$ が成立することである．固有函数が完備直交系をなせば $A$ は正規である．対称 (自己共役) 演算子は正規演算子の特別の場合である．上で我々は $E^n(h)$ が連続スペクトルを持たないことを仮定している．

$$r \leqq C^{\tau/T} = (C^{1/T})^{\tau} \tag{8.17}$$

が導かれる．一般性を失うことなく $C>1$ と仮定してよいことおよび，指数函数 $f(\tau)=(C^{1/T})^{\tau}$ が増加かつ凸な函数があることから (8.15) が得られる．

すなわち，$E(h)$ が正規ならば

$$E(h)\text{ の固有値の絶対値} \leqq 1+O(\tau) \qquad (\tau\to 0) \tag{8.18}$$

が安定性に対する必要十分条件である．(8.18) が von Neumann の条件である．$E(h)$ が正規でなければ，(8.12) が一般に成立せず，$\|E^n(h)\| \geqq r_h{}^m$ が判っているだけである．したがって，(8.18) は安定性の必要条件ではあるが，十分条件とは限らない．

さて，$E(h)$ が (8.8) である場合に話をもどし，安定性の具体的な条件を求めよう．これに対しては次に述べるような意味で Fourier 級数の応用が便利である．$\mathfrak{X}$ の函数系 $\{e^{imx}, m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ を考えると，これはよく知られているように $\mathfrak{X}$ の完備正規直交系である．同時に各 $e^{imx}$ は

$$h^{-1}D_h e^{imx} \equiv [e^{im(x+h)}-e^{imx}]/h = \{(e^{ih}-1)/h\}e^{imx}$$

などから判るように，任意の（$x$ についての）定数係数差分演算子の固有函数である．特に

$$\left.\begin{aligned} h^{-2}\delta_h^{(2)}e^{imx} &= h^{-2}[e^{im(x+h)}-2e^{imx}+e^{im(x-h)}] \\ &= \rho_m(h)e^{imx} \\ \text{ただし}\qquad \rho_m(h) &= 2(\cos mh-1)/h^2 = -4h^{-2}\sin^2(mh/2) \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

であることを用いれば

$$E(h)e^{imx} = \lambda_m(h)e^{imx}, \qquad \lambda_m(h) = 1+\tau\rho_m(h)$$

が得られる．この $\lambda_m(h)$ に対して，(8.18) を適用してみると，安定性に対する必要十分条件として

$$\tau/h^2 \leqq 1/2 \tag{8.20}$$

が導かれるのである．

2)　上記の取扱いをさらによく理解していただくために若干の例を加える．差分方程式の具体形のみ (8.5) と異なるものを考えることとし，それ以外の記号などは上に準ずるものとする．

i)　$[u_h^{(n+1)}-u_h^{(n)}]/\tau = h^{-2}\delta_h^{(2)}u_h^{(n+1)}.$ 　(8.21)

これはやはり (8.1) を近似する陰な差分方程式である．(8.21) が

$$(I-\tau\delta_h^{(2)})u_h^{(n+1)}=u_h^{(n)}$$

と書けることから明らかに，今の場合は

$$E(h)=(I-\tau h^{-2}\delta_h^{(2)})^{-1} \tag{8.22}$$

である．再び $\{e^{imx}\}$ が $E(h)$ の完備な固有函数系を成し，固有値 $\lambda_m(h)$ は (8.19) の $\rho_m(h)$ を用いて

$$\lambda_m(h)=1/(1-\tau\rho_m(h)) \tag{8.23}$$

で与えられる．$\rho_m(h)\leqq 0$ なることおよび (8.18) により，(8.21) はつねに安定である．

ii)　$\alpha,\beta$ を $\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta=1$ を満たす定数として

$$[u_h^{(n+1)}-u_h^{(n)}]/\tau=\alpha h^{-2}\delta_h^{(2)}u_h^{(n+1)}+\beta h^{-2}\delta_h^{(2)}u_h^{(n)} \tag{8.24}$$

を考える．このときは

$$E(h)=(I-\alpha\tau h^{-2}\delta_n^{(2)})^{-1}(I+\beta\tau h^{-2}\delta_n^{(2)}),$$

$$\lambda_m(h)=(1+\beta\tau\rho_m(h))/(1-\alpha\tau\rho_m(h))$$

となる．これから，

$$\begin{cases}\alpha\geqq 1/2 & \text{ならば，つねに安定}\\ \alpha<1/2 & \text{ならば，}\tau/h^2\leqq 1/(2-4\alpha)\text{ のとき安定}\end{cases}$$

を導くことは読者の演習としよう．

iii)　$[u_h^{(n+1)}-u_h^{(n)}]/\tau=h^{-2}\delta_h^{(2)}u^{(n)}+bh^{-1}\delta_{2h}^{(1)}u^{(n)},$　(8.25)

ただし，$b$ は実の定数で $\delta_{2h}^{(1)}$ は

$$\delta_{2h}^{(1)}u(x)=(u(x+h)-u(x-h))/2$$

で定義される一階（中央）差分演算子である．(8.25) は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}$$

を近似する差分方程式である．今の場合

$$E(h)=I+\tau h^{-2}\delta_h^{(2)}+b\tau h^{-1}\delta_{2h}^{(1)}$$

となるが，$E(h)$ の固有函数 $e^{imx}$ に対応する固有値は

$$\lambda_m(h)=1+\tau\rho_m(h)+i\tau h^{-1}\sin mh \tag{8.26}$$

で与えられる．この $\lambda_m(h)$ の実数部分は 1) における $\lambda_m(h)$ 自身と同じである．よって，(8.18) が成り立つためには (8.20) が必要である．逆に (8.20) を仮定すると

$$(\tau h^{-1}\sin mh)^2 \leqq \tau \sin^2 mh/2 \leqq \tau/2$$

が得られ,

$$|\lambda_m(h)|^2 \leqq 1+(b^2\tau)/2$$

が導かれる．このとき明らかに $|\lambda_m(h)| \leqq 1+O(\tau)$ である．結局, (*8.25*) の安定性の条件は (*8.5*) のそれと一致し, $\tau/h^2 \leqq 1/2$ である．このように，空間変数に関する低次の差分を含む項の有無が安定性に影響を及ぼさないことが多い．

問題〕 $c$ を定数とするとき, $[u_h^{(n+1)}-u_h^{(n)}]/\tau = h^{-2}\delta_h^{(2)}u_h^{(n)}+cu_h^{(n)}$ は $\tau/h^2 \leqq 1/2$ のとき安定であることを示せ．

3) 今まで述べて来た方法の種々な方向への一般化のうち，拡張が格別の困難を伴わないような若干を選び，その方針のみを紹介しておく．

i) 空間変数が多変数であり，各変数についての周期性が要請されている場合に対しては，上の議論はほとんどそのまま適用する．例えば空間変数が二変数 $x, y$ で，考える函数 $u(x, y, t)$ などが，$x, y$ いずれについても周期 $2\pi$ を持っているときには，$\mathfrak{X}$ でのノルムを

$$\|u\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(x,y)|^2 dx\,dy$$

にとり，一方 $\mathfrak{X}$ の基底として函数系 $\{e^{i(mx+ly)};\ m, l=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ を採用すればよいわけである．

問題〕 $\partial u/\partial t = \nabla^2 u$ を近似する $[u_h^{(n+1)}-u_h^{(n)}]/\tau = h^{-2}\delta_{h,x}^{(2)}u_h^{(n)}+h^{-2}\delta_{h,y}^{(2)}u_h^{(n)}$ は $\tau/h^2 \leqq 1/4$ のとき安定であることを示せ．

ii) 近似すべき問題が $\partial v/\partial t = \partial w/\partial x$, $\partial w/\partial t = \partial v/\partial x$ のように連立微分方程式であるときには，二成分のベクトル函数 $u=\{v, w\}$ からなり，ノルムが

$$\|u\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|v|^2+|w|^2)dx$$

で定義される Hilbert 空間を $\mathfrak{X}$ とし，$\mathfrak{X}$ の基底としては $\varphi_{m,1}=\{e^{imx}, 0\}$, $\varphi_{m,2}=\{0, e^{imx}\}$ $m=0, \pm1, \pm2, \cdots$ を採用すれば同様な取扱いが可能である．この場合, $\varphi_{m,1}$ と $\varphi_{m,2}$ とで張られる二次元部分空間 $\mathfrak{X}_m$ は，任意の線型定数係数の差分演算子（自変数を $x$ とし, $\mathfrak{X}$ の元であるベクトル函数に作用する）の不変部分空間である．したがって，このようなとき，上の基底について $E(h)$ の行列表現 $G$ は

$$G = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & G_1 & & \\ & & G_2 & \\ 0 & & & G_m \ddots \end{pmatrix}, \qquad \text{ただし } G_m \text{ は } 2\times2 \text{ の行列} \ (m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

となる．したがって各 $m$ について $\|G_m{}^n\|$ を調べることにより安定性が判定できるわ

けである．

iii） 時間について高階の微分方程式，例えば $\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2$ を扱うには，補助的な従属変数を導入して，時間について一階の連立微分方程式に書きかえ，ii）の場合に帰着することが行なわれている．

iv） 変数係数の場合には，(8.10) のような一般論はほぼ同様に展開され得るが，具体的に安定性の条件を求める課題に対しては，$\{e^{imx}\}$ を基底として用いることが定数係数の場合ほどには有効な武器にはならない．理論的に種々の研究がなされているが，結果はいずれも複雑である．

# 参　考　書

微分方程式の近似解法全般を主題として扱った成書は割合少なく，下記のものが標準的といってよい．

〔1〕 Л. В. Канторович, В. Н. Крылов: Приълиженные Методы Высшего Анализа (ГИТТЛ) (Москва, 1952).
(独訳, VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin).

〔2〕 L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Springer, Berlin, 1955).

〔3〕 W. E. Milne: Numerical Solutions of Differential Equations (Wiley, New York, 1953).

〔4〕 S. H. Crandall: Engineering Analysis, a survey of numerical procedures (McGraw-Hill, New York, 1956).

特に〔1〕は楕円型微分方程式に対象を限っているが，本編で割愛した逐次近似法，等角写像の応用その他を含み，理論的にも実際的にも興味深く読める教科書である．〔2〕は計算例や実地計算に当っての注意を網羅した大著であるが通読するのには適当ではあるまい．〔4〕は"判りやすさ"を旨とした方針で書かれており，工学などの実用面にたずさわる人には近づきやすいと思われる．

また，本編の内容はいわゆる数値計算法，数値解析とも関連が深く，実際にそれらの教科書は本編と同じ主題を扱った部分を多少とも含んでいる．次の〔5〕はこの種の教科書のうちで最も要領のよい良書の一つであり，〔6〕は特に最近の高速計算機の発達を念頭においた数値解析の概観を与えるものとしてともに一読をすすめたい．

〔5〕 森口繁一，高田 勝: 数値計算法 I, II. 岩波，応用数学講座．

〔6〕 G. E. Forsythe: Contemporary State of Numerical Analysis (Surveys in Appl. Math., Vol. V, pp. 1～42, Wiley, New York, 1958).

われわれが取扱った近似解法の背景をなす解析学の各分野あるいは応用数学全般を通じての参考書としては，本書の各編のほかに，数多くの教科書の中から次のものを挙げるに止める．

〔7〕 犬井鉄郎: 応用偏微分方程式論（岩波）．

〔8〕 山内恭彦: 物理数学（岩波全書）．

〔9〕 河田龍夫: 応用数学概論 I, II（岩波全書）．

〔10〕 R. Courant, D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, I, II (Springer, Berlin, 1937). (I は英語版あり)

〔11〕 P. M. Morse, H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, I, II (McGraw-Hill, New York, 1953).

〔12〕 H. Jeffreys: Methods of Mathematical Physics (Camb. Univ. Press, Cam-

bridge).

〔13〕 В. И. Смирнов: Курс Высшей Математики (ГИТТЛ) (Москва. 1957).

位相解析の入門書も数多く見受けられるようになったが，比較的近よりやすいものとしては次のものがある.

〔14〕 吉田耕作: 位相解析 I (岩波).

〔15〕 加藤敏夫: 函数空間論 (共立).

〔16〕 L. A. Ljusternik, W. I. Soboleff: Elemente der Funktionalanalysis (Akademie Verlag, Berlin, 1955). (ロシヤ語よりの翻訳)

さらに各章毎に重要な参考書を述べると，まず WKB 法については〔11〕のほかに

〔17〕 A. Erdélyi: Asymptotic Expansions (Dover, 1956).

がある. この本では WKB 法よりもパラメタ依存性がより複雑な場合や鞍部点法，ふつうの漸近展開法などを数学的な観点から簡潔に取り扱っている.

PLK 法に関したものは次の〔18〕,〔19〕, 境界層の方法に関したものは〔20〕である.

〔18〕 H. S. Tsien: Advances in Appl. Mechanics, IV (Academic Press, New York, 1956).

〔19〕 物理学論文選集 80, 応用数学 IV, PLK 法 (日本物理学会). (Lighthill, Kuo, Wasaw, Whitham, Carrier 等の論文を収めている.)

〔20〕 G. F. Carrier: Advances in Appl. Mechanics, III (Academic Press, New York, 1953).

差分法による近似解法の参考書としては〔1〕(特に第三章),〔2〕,〔3〕のほかに

〔21〕 В. С. Ряъенкий, А. Ф. филиппов: Оъ Устойчивости Разностных Уравнении (ГИТТЛ) (Москва, 1956).

〔22〕 D. J. Panow: Formelsammulung zur Numerischen Behandlung Partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren (露文よりの訳, Akademie Verlag, Berlin, 1955).

〔23〕 R. D. Richtmyer: Difference Method for Initialvalue Problems (Interscience Pub., New York, 1957).

が代表的であろう.〔22〕はやや簡にすぎるきらいはあるが公式集, Handbook としては〔2〕と対照的な便利さを具えているとも言える.〔21〕,〔23〕は差分法に関し，理論的な観点から興味を持たれる向きにおすすめできる教科書で，本書での取扱いは多分に〔21〕によっており，〔23〕は第5章の最後で紹介した理論の解説書である.

# C 変　分　法

## 第 1 章　極 値 問 題

### §1　二次整式の極値問題

変分法は極大極小を取り扱う極値問題の一種であるから，その準備としてふつうの函数の極値問題についての基本的な事実をこの章にまとめておく．

$n$ 個の実変数 $u_1, \cdots, u_n$ の二次整式

$$J(\boldsymbol{u})=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_i u_k+2\sum_{i=1}^{n} a_i u_i+a_0 \tag{1.1}$$

を考える．係数 $a_{ik}, a_i, a_0$ は実数で，行列 $(a_{ik})$ は対称 $(a_{ik}=a_{ki})$ であるとする．$\boldsymbol{u}$ と書いたのは $u_1, \cdots, u_n$ をまとめてひとつのベクトルとみなしたのである．

もし $u_1, \cdots, u_n$ があらゆる実数値の組を変化するときに $J(\boldsymbol{u})$ の値に最小値があるとすれば，この最小値を与える $u_1, \cdots, u_n$ の組は，微分学の教えるところにしたがって

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial u_i}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k+a_i=0 \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{1.2}$$

という $n$ 個の連立方程式の解として与えられる．行列 $(a_{ik})$ の作る行列式 $\varDelta$ の値が 0 でなければ (*1. 2*) を満足する $u_1, \cdots, u_n$ は存在して一義的に定まるが，相当する $J$ の値は最小値であるとはかぎらない．最大値であることもあり，また最大値でも最小値でもない，いわゆる鞍点(とうげ)値であることもある．これらを総称して**停留** (stationary) **値**と呼ぶ．

いずれにしても行列 $(a_{ik})$ の逆行列を $(a'_{ik})$ とすると，これも対称行列であって，(*1. 2*) の解は

$$u_i=\overline{u}_i=-\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}a_k \tag{1.3}$$

で与えられる．これを (*1. 1*) に代入すれば，すぐわかるように

$$J(\overline{\boldsymbol{u}})=-\sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik}a_i a_k+a_0 \tag{1.4}$$

が $J$ の停留値である．$\bar{\boldsymbol{u}}$ を**停留点**と呼ぶ．

$J(\bar{\boldsymbol{u}})$ が実際に最小値であるかどうかをみるには

$$u_i-\bar{u}_i=\delta u_i \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{1.5}$$

とおき，$u_i=\bar{u}_i$ が (1.2) を満足することを使うと

$$J(\boldsymbol{u})-J(\bar{\boldsymbol{u}})=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\delta u_i\delta u_k \tag{1.6}$$

となるから，問題は二次形式 (1.6)，あるいは行列 $(a_{ik})$ の性質に帰着する．$J(\bar{\boldsymbol{u}})$ が（狭義の）最小値であるためには，(1.6) がどんな“変分” $\delta u_1,\cdots,\delta u_n$（ただし $\delta u_i$ のすべてが 0 ではない）に対しても正であること，すなわち行列 $(a_{ik})$ が**正値**（正定符号）であることが必要かつ十分である．

同じように $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ が最大値であるためには，$(a_{ik})$ が負値であることが必要かつ十分である．一般に $J(\boldsymbol{u})$ の最大値は $-J(\boldsymbol{u})$ の最小値で，とりたてて考える必要はないから，以下主に最小値だけを考えることにする．

## §2　対角線化

一次代数の理論によると，適当な一次変換によって，勝手な二次形式は“対角線化”される．上の場合でいうと，適当な一次変換

$$u_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}v_k \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{2.1}$$

によって，(1.1) を

$$J(\boldsymbol{u})=I(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i+a_0 \tag{2.2}$$

の形にかえることができる．

もとの行列 $(a_{ik})$ の行列式が 0 でなければ $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ はどれも 0 でない．$I(\boldsymbol{v})$ の停留値の条件は (1.2) と同様に

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial v_i}=\lambda_i v_i+\mu_i=0 \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{2.3}$$

となり，その解 $v_i=\bar{v}_i=-\mu_i/\lambda_i$ を (2.2) に代入すれば

$$I(\bar{\boldsymbol{v}})=a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2}{\lambda_i} \tag{2.4}$$

が停留値である．

(1.6) に相当する式は

$$I(\boldsymbol{v})-I(\bar{\boldsymbol{v}})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\delta v_i)^2 \tag{2.5}$$

であるから，すべての $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が正[負]であることが $\boldsymbol{v}$ の最小[大]点であるための条件であり，その他の場合は鞍点になる．鞍点といってもいろいろな場合があり得るが，その種類を区別するのに**型数**(type number)(指数 index ともいう)を用いる．型数とは $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の中で負のものの数をいう．したがって停留点は型数が $0, 1, \cdots, n$ のものに分類される．型数 0 の停留点は最小点，型数 $n$ の停留点は最大点にほかならない．鞍点には型数 $1, 2, \cdots, (n-1)$ の $(n-1)$ 種がある．

型数は不変量であって，用いた座標変換 (*2. 1*) によらない．他の座標変換によっても $J(\boldsymbol{u})$ を (*2. 2*) の形に対角線化することは可能であり，そのとき一般に $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は違ったものになるが，型数は変らないのである．これは二次型式の**慣性則**とよばれる定理である．

## §3　停留値の計算

停留値 $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ は (*1. 4*) で与えられるが，この式は計算には必ずしも便利でない．実際の計算にはたとえば消去法を用いるのがよい．(*1. 1*) を変形すると

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u})=&\frac{1}{a_{11}}(a_{11}u_1+a_{12}u_2+\cdots+a_{1n}u_n+a_1)^2\\&+\sum_{i,k=2}^{n}\left(a_{ik}-\frac{a_{1i}a_{1k}}{a_{11}}\right)u_iu_k+2\sum_{k=2}^{n}\left(a_i-\frac{a_{1i}a_1}{a_{11}}\right)u_i\\&+a_0-\frac{{a_1}^2}{a_{11}}\end{aligned} \tag{3.1}$$

となるが，第一行は一次式の平方の形に表わされ，$(v_1+a_1)^2/a_{11}$ の形にかくことができる．第二行以下は添数 1 をふくまない．故にこの方法を続ければ $J(\boldsymbol{u})$ が対角線化される．その結果は

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u})=I(\boldsymbol{v})=&\frac{1}{a_{11}^{(1)}}(v_1+a_1^{(1)})^2+\frac{1}{a_{22}^{(2)}}(v_2+a_2^{(2)})^2+\cdots\\&+\frac{1}{a_{nn}^{(n)}}(v_n+a_n^{(n)})^2+a_0^{(n)}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

変数 $v_i$, 係数 $a_{ii}^{(i)}$ などは次の図式によって順次に計算される：

$$\left.\begin{aligned} &a_{ik}^{(1)} = a_{ik}, \quad a_i^{(1)} = a_i, \quad a_0^{(1)} = a_0 \qquad (i, k = 1, \cdots, n); \\ &a_{ik}^{(r+1)} = a_{ik}^{(r)} - \frac{a_{ir}^{(r)} a_{rk}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \quad a_i^{(r+1)} = a_i^{(r)} - \frac{a_{ir}^{(r)} a_r^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \\ &a_0^{(r+1)} = a_0^{(r)} - \frac{[a_r^{(r)}]^2}{a_{rr}^{(r)}} \qquad \begin{matrix}(i, k = r, r+1, \cdots, n) \\ (r = 1, 2, \cdots, n)\end{matrix}; \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

$$v_r = a_{rr}^{(r)} u_r + a_{r,r+1}^{(r)} u_{r+1} + \cdots + a_{rn}^{(r)} u_n. \tag{3.4}$$

(3.2) からすぐわかるように $J$ の停留点は

$$v_i = \bar{v}_i = -a_i^{(i)} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{3.5}$$

で与えられ，停留値は

$$J(\bar{u}) = a_0^{(n)} \tag{3.6}$$

である．$\bar{u}$ を求めるには (3.4) を $u_n, u_{n-1}, \cdots, u_1$ の順に解けばよい．すなわち

$$\left.\begin{aligned} &a_{nn}^{(n)} \bar{u}_n = \bar{v}_n = -a_n^{(n)}, \\ &a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \bar{u}_{n-1} = -a_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} \bar{u}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{11}^{(1)} \bar{u}_1 = -a_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} \bar{u}_2 - \cdots - a_{1n}^{(1)} \bar{u}_n. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

以上の計算は結局

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} & a_1 \\ & a_{22} \ \cdots & a_{2n} & a_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_{nn} & a_n \\ & & & a_0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

という行列に Gauss の消去法を適用することと全く同じである．

大切なことは $J(\bar{u})$ は (3.6) によって直ちに与えられ，まず $\bar{u}$ を求めてこれを $J(u)$ の式に代入するという手数はいらないことである．実際停留値 $J(\bar{u})$ の計算の方が停留点 $\bar{u}$ の計算よりもずっとやさしいのである．上の計算では添数 $i = 1, 2, \cdots, n$ のつけ方（いいかえると変数を消去する順序）を上手にとることが大切であろう．なお $J[\bar{u}]$ が最小値であるための条件は，すべての $a_{rr}^{(r)}$ が正であることである．

問題〕 $J[u] = u_1^2 + \frac{1}{3} u_2^2 + \frac{1}{5} u_3^2 + u_1 u_2 + \frac{2}{3} u_1 u_3 + \frac{1}{2} u_2 u_3 + \frac{1}{2} u_1 + \frac{2}{5} u_2 + \frac{1}{3} u_3$ の停留値を求め，最小値か否かをいえ．

## §4 ベクトル記法

上に考えた問題はベクトル記法を使うと簡単に表わされる．二つのベクトル $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_n)$ の内積を

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=u_1v_1+\cdots+u_nv_n \tag{4.1}$$

で表わすと，(*1.1*) は

$$J(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u})+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})+a_0 \tag{4.2}$$

と書かれる．$A$ は行列 $(a_{ik})$ を表わす．停留点の条件 (*1.2*) は

$$A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a}=0 \tag{4.3}$$

で与えられる．これは

$$0=\delta J(\boldsymbol{u})=(\delta\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u},A\delta\boldsymbol{u})+2(\boldsymbol{a},\delta\boldsymbol{u})=2(\delta\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a}) \tag{4.4}$$

が勝手な無限小変分 $\delta\boldsymbol{u}$ に対して成り立つことからもわかる．(*4.3*) の解は (*1.3*) すなわち

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}=-A^{-1}\boldsymbol{a}, \tag{4.5}$$

停留値 (*1.4*) は

$$J(\bar{\boldsymbol{u}})=-(\boldsymbol{a},A^{-1}\boldsymbol{a})+a_0 \tag{4.6}$$

となる．$A^{-1}$ は $A$ の逆行列をあらわす．前節でのべた計算法は結局 $(\boldsymbol{a},A^{-1}\boldsymbol{a})$ の形の数を計算する方法に他ならない．これを求めるのに $A^{-1}$ を実際に作る必要がないことを前節の結果は示している．

問題 1〕
$$J(\boldsymbol{u})=-\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a})^2}{(\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u})}+a_0 \qquad (\boldsymbol{u}\neq 0)$$
のような $\boldsymbol{u}$ に関する零次同次な函数の停留値は二次整式の停留値 (*4.6*) と一致する（したがって行列 (*3.8*) に §3 の消去法を適用して計算される）ことを示せ．$J(\boldsymbol{u})$ が同次であるから停留点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ は定数因子だけ不定であるが，これを適当に定めると $\bar{\boldsymbol{u}}$ は (*4.5*) と一致することを示せ．

問題 2〕 二つの $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ の函数
$$J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{b})$$
の停留値は $-(\boldsymbol{a},A^{-1}\boldsymbol{b})$ であることを示せ．$A$ は対称とかぎらないが逆 $A^{-1}$ をもつ行列とする．またこの停留点は必ず鞍点で型数 $n$ をもつことを示せ（変数が $2n$ 個あるから型数 $n$ は最大値を意味しない）．

問題 3〕 前題を用いて $(\boldsymbol{a},A^{-1}\boldsymbol{b})$ という数を計算する図式を §3 にならって作れ．

## §5 固有値問題

二次形式に関する重要な問題に，(*1.1*) とは違った形の式

$$I(\boldsymbol{u})=\frac{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k}{\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}u_iu_k}=\frac{(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})} \tag{5.1}$$

の最小値(あるいは一般に停留値)を求める問題がある．$A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$ は対称行列とし，$B$ はさらに正値と仮定する．

(5.1) は $\boldsymbol{u}$ について零次の同次式である．すなわち $\boldsymbol{u}$ に勝手なスカラー $\lambda$ をかけても $I(\boldsymbol{u})$ の値は変らない．したがってはじめから

$$\sum b_{ik}u_iu_k=(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})=1 \tag{5.2}$$

という条件をつけて考えても差支えない．そうすると問題はいわゆる条件付停留問題になる．幾何学的には例えば楕円体の最小(大)の半径を求めるという問題はこの特別の場合にあたる．

停留条件は例によって

$$\frac{\partial I}{\partial u_i}=0 \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{5.3}$$

である．(5.1) を

$$\left(\sum_{i,k} b_{ik}u_iu_k\right)I(\boldsymbol{u})=\sum_{i,k} a_{ik}u_iu_k \tag{5.4}$$

とかいておき，$u_i$ について微分して (5.3) を使うと

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}-\lambda b_{ik})u_k=0,\\ &\lambda=I(\boldsymbol{u}) \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

が停留点 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ の条件としてえられる．これはまた

$$A\boldsymbol{u}=\lambda B\boldsymbol{u} \tag{5.6}$$

と書くこともできる．

(5.5) が解をもつ条件は

$$\det(a_{ik}-\lambda b_{ik})=0 \tag{5.7}$$

である．($\det(a_{ik})$ は行列 $(a_{ik})$ の行列式をあらわす.)

(5.5) あるいは (5.6) は**固有値問題**とよばれるものである．**固有値** $\lambda$ は $n$ 次方程式 (5.7) の根として定まる．$B$ が正値行列であるとしたので固有値はすべて実数である．このとき各固有値 $\lambda=\bar{\lambda}$ に対して (5.6) を満足する実の**固有ベクトル** $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}\neq 0$ が定まる．これに対して

$$I(\overline{u})=\overline{\lambda} \tag{5.8}$$

となるから(5.5)の第二式は第一式の当然の結果である．すなわち固有値 $\overline{\lambda}$ はちょうど停留点 $\overline{u}$ における $I$ の停留値に外ならない．

なお固有ベクトルは(5.2)が成り立つように"正規化"されるのがふつうである．

## §6　固有値の最大最小性

固有値問題の理論によると，固有値はちょうど $n$ 個ある．これを

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \tag{6.1}$$

のようにならべる．各固有値 $\lambda_i$ に固有ベクトル $u^{(i)}$ を対応させ

$$(u^{(i)}, Bu^{(k)})=\delta_{ik}\begin{cases} =1 & (i=k) \\ =0 & (i\neq k) \end{cases} \tag{6.2}$$

を満足させることができる．勝手なベクトル $u$ は $\{u^{(i)}\}$ によってつぎのように展開することができる．

$$u=\sum_{i=1}^{n}\xi_i u^{(i)}. \tag{6.3}$$

展開係数 $\xi_i$ は(6.2)によって

$$\xi_i=(u^{(i)}, Bu) \tag{6.4}$$

から定められる．したがって

$$(u, Bu)=\sum_i \xi_i^2 \tag{6.5}$$

となる．

一方

$$Au^{(i)}=\lambda_i Bu^{(i)} \tag{6.6}$$

に注意すると，(6.2), (6.3)を用いて

$$(u, Au)=\sum_i \lambda_i \xi_i^2 \tag{6.7}$$

がえられる．

条件(5.2)の下に(5.1)の最小値あるいは一般に停留値を求めようというわれわれの問題は，係数 $\{\xi_i\}$ を用いて表わすと，(6.5)が1に等しいという条件の下に(6.7)の最小値(停留値)を求めることに帰着する．これよりすぐわかるように，最小の固有値 $\lambda_1$ は実際に $I(u)$ の最小値であり，最大の固有値 $\lambda_n$ は $I(u)$ の最大値である．

その他の固有値は一般に最小値でも最大値でもないが，つぎのような工夫によってこれをある種の最大-最小問題の解として表わすことができる．いま(*5.2*)の条件のほかに，$(r-1)$個の一次同次の条件（これを同次の**束縛**とよぶ）

$$K_i(\boldsymbol{u}) = d_{i1}u_1 + \cdots + d_{in}u_n = 0 \qquad (i = 1, \cdots, r-1) \tag{6.8}$$

をつけ加え，これらの束縛の下で(*5.1*)の最小値を求めるという問題を考える．(*6.3*)を(*6.8*)に代入して係数$\{\xi_i\}$を用いて(*6.8*)をかき表わせば，$\{\xi_i\}$に関する同じような$(r-1)$個の一次同次条件式がえられる．これらの条件式は，$\xi_1, \cdots, \xi_r$の比を適当にえらび，$\xi_{r+1} = \cdots = \xi_n = 0$とおいて満足させることが必ずできる．さらに$\xi_1, \cdots, \xi_r$の大きさを適当にとれば，(*6.5*)の値を1にすることもできる．そうすると(*6.7*)の値は$\lambda_r$よりも大きくならないから，考えている最小値を$m[K_1, \cdots, K_{r-1}]$と書けば

$$m[K_1, \cdots, K_{r-1}] \leqq \lambda_r. \tag{6.9}$$

一方束縛として，$\xi_1 = \cdots = \xi_{r-1} = 0$を採用すれば，考えている最小値は明らかに$\lambda_r$に等しい．したがって$K_1, \cdots, K_{r-1}$をあらゆる仕方でとったときの，$m[K_1, \cdots, K_{r-1}]$の最大値はちょうど$\lambda_r$である．このようにして$\lambda_r$は$r-1$個の束縛の下での$I(\boldsymbol{u})$の最小値の最大値に等しい．これを**最大-最小値の原理**(maximum-minimum principle)という．

この原理の一例としてつぎの定理を証明してみよう．(*5.1*)のほかに同じ形の函数

$$I_1(\boldsymbol{u}) = \frac{(\boldsymbol{u}, A_1\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, B_1\boldsymbol{u})} \tag{6.10}$$

があって，$0 \leqq A_1 \leqq A$, $B_1 \geqq B > 0$であるとする．すなわち

$$0 \leqq (\boldsymbol{u}, A_1\boldsymbol{u}) \leqq (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}), \quad (\boldsymbol{u}, B_1\boldsymbol{u}) \geqq (\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u}) > 0 \tag{6.11}$$

がすべてのベクトル$\boldsymbol{u} \neq 0$に対して成り立つものとする．すると$I_1$の固有値は同じ番号の$I$の固有値より大きくない．何故なら$I_1(\boldsymbol{u}) \leqq I(\boldsymbol{u})$であるから，同じ束縛$K_1, \cdots, K_{r-1}$に対して$m_1[K_1, \cdots, K_{r-1}] \leqq m[K_1, \cdots, K_{r-1}]$となり，したがって両辺の最大値に対しても同じ不等式が成り立つからである．

問題〕 $I(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})/(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})$において，$\boldsymbol{u}$に一次同次束縛$K_0(\boldsymbol{u}) = 0$を与えると，$I$は$(n-1)$個の変数，例えば$u_1, \cdots, u_{n-1}$の二次形式の比となるから，相当する固有値$\lambda_1' \leqq \cdots \leqq \lambda_{n-1}'$が定まる．これに対して

$$\lambda_1 \leqq \lambda_1' \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_2' \leqq \cdots \leqq \lambda_{n-1}' \leqq \lambda_n$$

が成り立つことを，最大-最小値の原理を用いて示せ．

## §7 一般の函数の最小値，極小値および停留値

以上二次整式(*1.1*)および二つの二次整式の比(*5.1*)に対する最小値（停留

値）を考えてきたが，つぎにもっと一般な函数

$$J(\boldsymbol{u})=J(u_1,\cdots,u_n) \qquad (7.1)$$

に対して同じような問題を考える．ただし $u_1,\cdots,u_n$ は実数で $n$ 次元空間 $\mathrm{R}_n$ のある変域 D に属するものとし，$J$ の値も実数であるとする．

改めて説明するまでもなく，点 $\boldsymbol{u}=\overline{\boldsymbol{u}}$ が $J$ の**最小点**である（あるいは $\boldsymbol{u}=\overline{\boldsymbol{u}}$ で $J$ が**最小値**をとる）というのは，D のすべての $\boldsymbol{u}$ に対して $J(\boldsymbol{u})\geqq J(\overline{\boldsymbol{u}})$ が成り立つということである．このとき $\boldsymbol{u}\neq\overline{\boldsymbol{u}}$ に対して $J(\boldsymbol{u})>J(\overline{\boldsymbol{u}})$ であるならば，$\overline{\boldsymbol{u}}$ は**狭義**(proper)の最小点，そうでなければ**広義**(improper)の最小点である．§1 で取り扱った二次整式 (*1.1*) において，行列 $A$ が正値であれば $J$ は狭義の最小値をとる．

最小値は与えられた変域 D 全体で考えられるのに対して，局所的な最小値を**極小値**，極小値を与える点を**極小点**という．すなわち点 $\overline{\boldsymbol{u}}$ が $J$ の極小点であるというのは，$\overline{\boldsymbol{u}}$ の適当な近傍 N をえらぶと，N と D との共通部分にある勝手な $\boldsymbol{u}$ に対して，$J(\boldsymbol{u})\geqq J(\overline{\boldsymbol{u}})$ が成り立つということである．極小に対しても狭義と広義との区別ができることは上と同様である．

最小値（点）の存在に関して **Weierstrass の定理**がある．D が $\mathrm{R}_n$ の有界な閉集合で $J(\boldsymbol{u})$ が D で連続ならば，必ず最小点 $\overline{\boldsymbol{u}}$ があるというのがそれである[1]．

$\boldsymbol{u}=\overline{\boldsymbol{u}}$ が $J(\boldsymbol{u})$ の極小点であるとし，さらに $\overline{\boldsymbol{u}}$ が D の内点（$\overline{\boldsymbol{u}}$ に十分近い $\mathrm{R}_n$ の点はすべて D に属すること）で $J$ が $\boldsymbol{u}=\overline{\boldsymbol{u}}$ で偏微分可能であるとすれば，微分法の定理によって，$\boldsymbol{u}=\overline{\boldsymbol{u}}$ で

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}=0 \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (7.2)$$

が成り立つ．これは極小の必要条件であるが十分条件ではない．また $\overline{\boldsymbol{u}}$ が D の境界の上にあるときには (*7.2*) は必ずしも成り立たない．

一般に $J$ が $\boldsymbol{u}=\overline{\boldsymbol{u}}$ で全微分可能[2]で (*7.2*) が成り立つとき，$\overline{\boldsymbol{u}}$ を $J$ の**停留点**，$J(\overline{\boldsymbol{u}})$ を**停留値**という．このとき $J(\boldsymbol{u})-J(\overline{\boldsymbol{u}})$ は $|\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}}|$ にくらべて高位の無限小となって，その変化が停止したと考えられるからである．上にのべたところによると一般に極小点は停留点とかぎらず，また停留点は極小（大）点とか

(1) 例えば高木貞治 "解析概論", 31 頁．以下この本を "高木" として引用する．

(2) I, 14 頁, "高木" 61 頁．

ぎらない．変分学は一応最大最小（極大極小）の問題と規定されるが，事実上はむしろ停留条件を問題にすることが多い．

極小点でも極大点でもない停留点は**鞍点**と呼ばれる．§2 と同様に鞍点を分類するのに型数が用いられる．一般に $\bar{u}$ を $J$ の停留点とし，$J$ は $\bar{u}$ の近所で二回連続可微分であるとすると，$J$ の Taylor 展開は (7.2) によって

$$J(\bar{u}+v)-J(\bar{u})=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 J}{\partial u_i\partial u_k}\right)_{u=\bar{u}} v_i v_k+\cdots \tag{7.3}$$

となり，$\cdots$ は $|v|^2$ より高位の無限小である．したがって $\bar{u}$ の近所での $J(u)$ の模様は (7.3) の右辺第一項で決定される．簡単のため $J$ の Hesse 行列式，すなわち行列

$$\left(\frac{\partial^2 J}{\partial u_i\partial u_k}\right) \tag{7.4}$$

で作った行列式が $u=\bar{u}$ で 0 でないと仮定する．このとき停留点 $\bar{u}$ は**非退化**であるという．もし行列 (7.4) が正値ならば (7.3) の右辺は $v\neq 0$ ならつねに正となり，$\bar{u}$ は狭義の極小点である．一般に (7.4) の型数 (§2) を停留点 $\bar{u}$ の型数とよぶ．型数 $0[n]$ の停留点が極小[大]点であり，型数 $1,\cdots,n-1$ の停留点が鞍点であること，§2 と同様である．

Hesse 行列式が 0 になるとき（**退化**停留点）には停留点の模様は複雑である．

例題〕 §6 でみたように $\sum\xi_i^2=1$ という条件の下で

$$J=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2 \tag{7.5}$$

の停留値は $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ に等しい．その型数を定めてみよう．ただし $\sum\xi_i^2=1$ という条件があるから，$(\xi_i)$ は $n$ 次元 Euclid 空間 $\mathrm{R}_n$ の点ではなく，$(n-1)$ 次元球面 $\mathrm{S}_{n-1}$ の上の点であるが，$\mathrm{S}_{n-1}$ は局所的には $\mathrm{R}_{n-1}$ と同様 $n-1$ 個の座標で記述できるので，型数の定義は全く同様にできる．簡単のため $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$ と仮定する．停留値 $\lambda_r$ に対する停留点は二つあって $\xi_r=\pm 1$, $\xi_i=0$ $(i\neq r)$ で与えられる．この点の近所では $\xi_r$ を除いた残りの $\xi_i$ を座標としてとることができる．$\xi_r^2=1-\xi_1^2-\cdots-\xi_{r-1}^2-\xi_{r+1}^2-\cdots-\xi_n^2$ によって $\xi_r$ を消去すると

$$J-\lambda_r=\sum_{i\neq r}(\lambda_i-\lambda_r)\xi_i^2. \tag{7.6}$$

$\lambda_1-\lambda_r,\ \lambda_2-\lambda_r,\ \cdots,\ \lambda_n-\lambda_r$ のうちで負のものは $(r-1)$ 個であるから，上の二つの点は型数 $r-1$ の停留点である．

問題 1〕 $$J(u)=[(u,Au)+2(a,u)+a_0]^{1/2}+(b,u)$$
の停留値を求めよ．これが極小値である条件は何か．ただし $A$ は正値，$a_0>(a,A^{-1}a)$ とする．

停留点は上のように分類されるが，それらが全く無規則に散らばっているわけではない．簡単のために $n=2$ の場合をとり，D は十分滑らかな曲線でかこまれた単連結な閉領域で，$J(u_1, u_2)$ は二回連続可微分，その停留点は全部非退化で，しかも D の境界の上にはないとする．このとき型数 0, 1, 2 の停留点，すなわち極小点，鞍点，極大点の数をそれぞれ $m_0, m_1, m_2$ とすれば，これらはすべて有限で

$$m_0 - m_1 + m_2 = 1 \tag{7.7}$$

という関係がある．例えば一つの島にある山（極大点）と池（極小点）の数の和は，峠（鞍点）の数に 1 を加えたものに等しい．

同じような関係がもっと一般の $n$ 次元多様体の上で定義された函数 $J(\boldsymbol{u})$ に対しても成り立つ．この種の問題は多様体全体の性質に関係するので**大域的**問題とよばれ，個々の停留点の有様を論ずる**局所的**問題とは性質を異にし，多様体の位相幾何学的構造に関係している．ここではこういう問題もあるということだけを注意して，それ以上立ち入らない．

問題 2〕 平面の領域 $u_1^2+u_2^2 \leqq 1$ において

$$J(\boldsymbol{u}) = (1-u_1^2-u_2^2)(1+2u_1^2)(1+2u_2^2)$$

の停留値，停留点を求め，これらを分類し，(7.7) をたしかめ，$J$ の等高線（$J(\boldsymbol{u})=$ 定数という曲線）の大体を画け．

## §8　条件付極値問題

函値 $J(\boldsymbol{u})$ の極値（あるいは停留値）を求めるのであるが，点 $\boldsymbol{u}$ が全く自由ではなく，いくかの付帯条件

$$K_i(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, r; r<n) \tag{8.1}$$

によって制限されていることがある．§6 で取り扱ったのはその一例である．このような極値の条件を求めよう．以下 $J$ と $K_i$ とに適当な微分可能性を仮定する．

考える点の近所で，$r$ 行 $n$ 列の行列

$$\left(\frac{\partial K_i}{\partial u_k}\right)_{i=1,\cdots,r;\,k=1,\cdots,n} \tag{8.2}$$

の階数が $r$ に等しい（適当な $r$ 行 $r$ 列部分行列の行列式が 0 でない）とする．この 0 でない行列式が，はじめの $r$ 列からできていると仮定しても一般性を失

わない．この行列の逆行列を $L_{ij}$ とする．

仮定により (8.1) を $u_1, \cdots, u_r$ について解くことができる (陰函数の定理)[1]．これを

$$u_i = \varphi_i(u_{r+1}, \cdots, u_n) \qquad (i=1, \cdots, r) \tag{8.3}$$

とする．これによって (8.1) は恒等的に満足されるから，$u_k$ $(k=r+1, \cdots, n)$ について微分すれば

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial K_i}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} + \frac{\partial K_i}{\partial u_k} = 0 \qquad (i=1, \cdots, r),$$

$(\partial K_i/\partial u_j)$ の逆行列 $L_{ij}$ を用いてこれを解けば

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} = -\sum_{i=1}^{r} L_{ji} \frac{\partial K_i}{\partial u_k}. \tag{8.4}$$

(8.3) を $J(\boldsymbol{u})$ に代入すれば $J$ は $u_{r+1}, \cdots, u_n$ の函数となるから，その停留条件をかき表わすと

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial J}{\partial u_k} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial J}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} = \frac{\partial J}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^{1,r} \frac{\partial J}{\partial u_j} L_{ji} \frac{\partial K_i}{\partial u_k} \\ &= \frac{\partial J}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial K_i}{\partial u_k}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

この式は $k=r+1, \cdots, n$ に対して成り立つ．ここに

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial u_j} L_{ji} \qquad (i=1, \cdots, r)$$

であって，$L_{ij}$ の定義により

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial K_i}{\partial u_j} = \frac{\partial J}{\partial u_j} \qquad (j=1, \cdots, r)$$

である．すなわち (8.5) は実はすべての $k=1, \cdots, n$ に対して成り立つことになり，結果としては添数 $1, \cdots, n$ について対称な式がえられた．

故に条件付停留問題を解くには，未定乗数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ を導入し，(8.5) と (8.1) とを $n+r$ 個の未知数 $u_i, \lambda_j$ について解けばよい．これを **Lagrange の未定乗数の法**という．この方法で行列 (8.2) の階数が $r$ であるという仮定は大切である．

結果はこのように対称な形になったが，上では $J$ を $u_{r+1}, \cdots, u_n$ の函数とみて停留条件を求めたのである．これが本来の $J$ の停留性を意味するかという疑問

(1) "高木" 340 頁以下参照．

が当然おこるであろう．これに答えるには，$\partial K_i/\partial u_j$ の作る行列式が 0 でないから，条件 (*8.1*) の定める $(n-r)$ 次元多様体 $M$ の局所座標として $u_{r+1}, \cdots, u_n$ を採用することができ，$M$ の上での停留性は $(u_{r+1}, \cdots, u_n)$ 空間での停留性と一致することに注意すればよい．

例題〕 (*5.2*) という付帯条件の下で (*5.1*) を停留ならしめる問題をこの方法で取り扱うと，未定乗数 $\lambda$ を用いて

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})-\lambda\frac{\partial}{\partial u_i}(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})=0$$

とおけばよい．これは (*5.5*) あるいは (*5.6*) と一致する．(*8.2*) の階数が 1 という条件は $B$ が正値ならば満足されている．(何故か？)

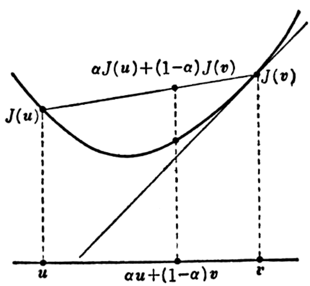
## §9 凸 函 数

ある種の問題では $J(\boldsymbol{u})$ の最小値が他の函数 $I(\boldsymbol{u})$ の最大値になるという関係があって，この最小値の近似値を計算するのに便利なことがある．この問題を一般的に取り扱うのに，**凸** (convex) **函数**という概念がいる．

凸領域 D で定義された函数 $J(\boldsymbol{u})$ が凸であるというのは，D の勝手な二点 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ と $0 \leqq \alpha \leqq 1$ のような実数 $\alpha$ に対し

$$J(\alpha\boldsymbol{u}+(1-\alpha)\boldsymbol{v}) \leqq \alpha J(\boldsymbol{u})+(1-\alpha)J(\boldsymbol{v}) \qquad (9.1)$$

を満足することをいう．これは $J(\boldsymbol{u})$ のグラフの二点を結ぶ線分が決してグラフの下側に来ないことを意味する (第 9.1 図)．



第 9.1 図

$J(\boldsymbol{u})$ が二回微分可能で行列 $(\partial^2 J/\partial u_i \partial u_k)$ がつねに正値 (あるいは非負値) であれば，$J$ は凸函数である．これを示すのに

$$f(t)=J(t\boldsymbol{u}+(1-t)\boldsymbol{v}) \qquad (9.2)$$

とおくとつねに $f''(t) \geqq 0$ である．何故なら

$$f''(t)=\sum_{i,k}(u_i-v_i)(u_k-v_k)\left(\frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_k}\right)_{t\boldsymbol{u}+(1-t)\boldsymbol{v}}$$

の右辺は負にならないからである．そこで Taylor の定理を使って

$$\begin{aligned} f(1)-f(\alpha) &= (1-\alpha)f'(\alpha)+\frac{1}{2}(1-\alpha)^2 f''(\alpha') \\ &\geqq (1-\alpha)f'(\alpha) \qquad (9.3) \end{aligned}$$

を得る．$\alpha'$ は 1 と $\alpha$ との間の数である．同様にして

$$f(0)-f(\alpha)\geqq -\alpha f'(\alpha). \tag{9.4}$$

(9.3) に $\alpha$, (9.4) に $1-\alpha$ をかけて加えると

$$\alpha f(1)+(1-\alpha)f(0)-f(\alpha)\geqq 0$$

となるが，これは (9.1) に他ならない.

$J$ が凸函数で一回連続微分可能であるとする. (9.1) で $\alpha\boldsymbol{u}+(1-\alpha)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$ とおき，これを

$$J(\boldsymbol{u})-J(\boldsymbol{w})-(1-\alpha)\frac{1}{\alpha}[J(\boldsymbol{w})-J(\boldsymbol{v})]\geqq 0 \tag{9.5}$$

とかきかえる. $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+\alpha(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ であるから, $\alpha\to 0$ のとき

$$\frac{1}{\alpha}[J(\boldsymbol{w})-J(\boldsymbol{v})]\to\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}J(\boldsymbol{w})\right]_{\alpha=0}$$
$$=\sum(u_i-v_i)\frac{\partial J(\boldsymbol{v})}{\partial v_i}=(\operatorname{grad}J(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \tag{9.6}$$

となる. ここに ( , ) はベクトルの内積を表わす (§4). したがって (9.5) で $\alpha\to 0$ とすると

$$J(\boldsymbol{u})\geqq J(\boldsymbol{v})+(\operatorname{grad}J(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}). \tag{9.7}$$

この式は $J$ のグラフがその勝手な接平面の下には決してこないことを表わしている (第9.1図). なお (9.7) の右辺は左辺の Taylor 展開のはじめの二項であるから, $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$ の高次の無限小を無視すれば (9.7) は等式になる. (接平面!)

## §10 最大最小の相反性

前節で考えた凸函数 $J(\boldsymbol{u})$ に対して，いくつかの (同次とかぎらない) たがいに矛盾しない，かつたがいに独立な一次の束縛

$$(\boldsymbol{d}^{(i)},\boldsymbol{u})=e_i \qquad (i=1,\cdots,r) \tag{10.1}$$

の下での最小値問題を考える. (10.1) を満足する $\boldsymbol{u}$ を "許される $\boldsymbol{u}$" と呼ぼう. いま一つの許されるベクトル $\boldsymbol{a}$ をとれば，同じ条件 (10.1) はまた

$$(\boldsymbol{d}^{(i)},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a})=0 \qquad (i=1,\cdots,r) \tag{10.2}$$

の形に表わすこともできる. $r$ 箇のベクトル $\boldsymbol{d}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{d}^{(r)}$ の張る $r$ 次元部分ベクトル空間を $\mathbf{N}$ とし，これに直交するベクトルの作る $n-r$ 次元部分ベクトル空間を $\mathbf{M}$ とすれば, (10.2) はベクトル $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}$ が $\mathbf{M}$ に属するという条件にほかならない.

(9.7) によれば

$$J(\boldsymbol{u}) \geqq J(\boldsymbol{v}) - (\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}) + (\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}) \tag{10.3}$$

であるが，いま $\boldsymbol{v}$ が

$$\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}) = \lambda_1 \boldsymbol{d}^{(1)} + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{d}^{(r)}, \tag{10.4}$$

すなわち“grad $J(\boldsymbol{v})$ が部分空間 **N** に属する”という条件を満足するものとすれば（このような $\boldsymbol{v}$ を“許される $\boldsymbol{v}$”と呼ぼう），grad $J(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}$ と直交するから（*10.3*）の最後の項は 0 となる．そこで

$$I(\boldsymbol{v}) = J(\boldsymbol{v}) - (\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}) \tag{10.5}$$

という函数を導入すると

$$J(\boldsymbol{u}) \geqq I(\boldsymbol{v}) \tag{10.6}$$

となる．この式は，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ がそれぞれ上にのべた付帯条件を満足する許されるベクトルであるかぎり，つねに成立する．

いま上の付帯条件の下に $J(\boldsymbol{u})$ が停留点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ をもっていたとする．すると $\bar{\boldsymbol{u}}$ はまた $\boldsymbol{v}$ の付帯条件を満足する（grad $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ が **N** に属する）．もしそうでないと（grad $J(\bar{\boldsymbol{u}}), \boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$）は適当な許される $\boldsymbol{u}$ に対して 0 でないことになるが，（*9.7*）において $\boldsymbol{v}=\bar{\boldsymbol{u}}$ とおいた式は，そこで注意したように $\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$ の一次の無限小の程度において等式となるから，$\bar{\boldsymbol{u}}$ が停留点であることに反するのである．なお未定乗数法を用いても同じ結果が直ちにえられる．

したがって（*10.5*）において $\boldsymbol{v}=\bar{\boldsymbol{u}}$ とおくと第二項は 0 となって $J(\bar{\boldsymbol{u}}) = I(\bar{\boldsymbol{u}})$ を得る．他方（*10.6*）によって $J(\boldsymbol{u}) \geqq I(\bar{\boldsymbol{u}})$, $J(\bar{\boldsymbol{u}}) \geqq I(\boldsymbol{v})$ でなければならないから，けっきょく

$$J(\boldsymbol{u}) \geqq J(\bar{\boldsymbol{u}}) = I(\bar{\boldsymbol{u}}) \geqq I(\boldsymbol{v}) \tag{10.7}$$

が，それぞれ許されるすべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して成り立つことになる．これは $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ が一方では $J(\boldsymbol{u})$ の条件付最小値，他方では $I(\boldsymbol{v})$ の条件付最大値に等しいことを示す．これを凸函数に関する**相反定理**（reciprocity theorem）とよび，$I(\boldsymbol{v})$ を $J(\boldsymbol{u})$ の**相反函数**とよぶ．

この定理は $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ を近似的に計算するのに便利である．それぞれ許される勝手な $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ をとれば，$J(\boldsymbol{u})$ は $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ の上界を，$I(\boldsymbol{v})$ はその下界を与えるからである．

**〔例題〕**　ベクトル記法で

$$J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}) \tag{10.8}$$

とすると，$J$ が凸函数であることは容易にわかる．これに対して $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}$ が部分ベクトル空間 M に属するという付帯条件の下で最小値問題を考える．$\mathrm{grad}\, J(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{b}$ であるから，$\boldsymbol{v}$ の満足すべき条件は，$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{b}$ が N に属することである．なお (*10.5*) は

$$I(\boldsymbol{v})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \tag{10.9}$$

となって，$-I(\boldsymbol{v})$ は定数項を除けば $J(\boldsymbol{u})$ と全く同様な形をしており，完全な相反性がみられる．$\bar{\boldsymbol{u}}$ は許される $\boldsymbol{u}$ であると同時に許される $\boldsymbol{v}$ でもあるから，$\bar{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{a}$ は M に，$\bar{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{b}$ は N に属する．すなわち $\bar{\boldsymbol{u}}$ は $\boldsymbol{a}$ を通って M に平行な超平面 $\mathrm{M}_a$ と，$\boldsymbol{b}$ を通って N に平行な超平面 $\mathrm{N}_b$ との交点として定まる．解析的には $\bar{\boldsymbol{u}}$ は (*10.2*) と (*10.4*) とを同時に満足するから

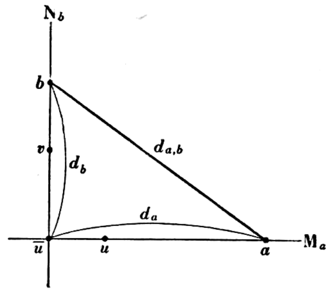
$$(\boldsymbol{d}^{(i)}, \bar{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{a})=0 \qquad (i=1, \cdots, r),$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i \boldsymbol{d}^{(i)}$$

を解いて求められる．また $\boldsymbol{b}$ と $\mathrm{M}_a$ との距離を $d_b$，$\boldsymbol{a}$ と $\mathrm{N}_b$ との距離を $d_a$，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の距離を $d_{a,b}$ とすれば

$$2J(\bar{\boldsymbol{u}})=d_b{}^2, \quad 2I(\bar{\boldsymbol{u}})=d_{a,b}^2-d_a{}^2$$

である．これら二式が等しいことは Pythagoras の定理にほかならない (第 10.1 図)．



第 10.1 図

問題〕 凸函数には停留値は一個より多くは存在せず，停留値は必ず最小値であることを示せ．

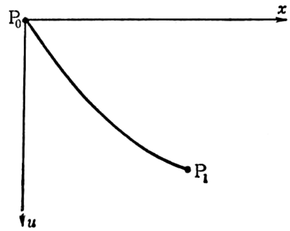
# 第 2 章　Euler 方程式と停留函数

## §1　変分法の問題

古典変分学の重要な部分を占めるEuler微分方程式とその解である停留函数がこの章の主題である．特に断らないかぎり現われる函数は必要なだけ連続微分可能であることを仮定する．（この章には多少 I 第9章と重複する部分がある.）

古典変分学の問題がどのようなものかを説明するには典型的な例を用いるのが早い.

例題〕 Brachistochrone (最短曲線)[1]. 質点が滑らかな，固定した曲線に沿って，重力の作用だけで，指定された点 $P_0$ から $P_1$ へ最短時間にすべってゆくためには，どんな曲線を通ればよいか？



第 1.1 図

求める曲線が $P_0, P_1$ を含む鉛直平面内にあることは自明であると仮定し，この面内に $P_0$ を原点とし，水平に $x$ 軸，鉛直下方に $u$ 軸をとって，曲線の方程式を $u=u(x)$ とする (第 1.1 図)．重力の加速度を $g$ とすると，曲線上の点 $x, u$ における質点の速さは $(2gu)^{1/2}$ であるから，曲線の微小弧 $ds=[1+u'(x)^2]^{1/2}dx$ を走るのに要する時間は $(2gu)^{-1/2}[1+u'(x)^2]^{1/2}dx$ となる．簡単のために $2g=1$ とすれば，全体の時間は

$$J[u]=\int_0^{a_1} u(x)^{-1/2}[1+u'(x)^2]^{1/2}dx \tag{1.1}$$

となる．問題はこれが最小になるような函数 $u(x)$ を定めよということである．ただし $u(x)$ は

$$u(0)=0, \qquad u(a_1)=b_1 \geqq 0 \tag{1.2}$$

という条件を満足せねばならない．$(a_1, b_1)$ は $P_1$ の座標である．

これは最小値問題であることでは第1章で論じた問題と似ているが，考えている“函数” $J[u]$ は有限個の変数の函数ではなくて，実は変数に相当するものが函数 $u=u(x)$ である．すなわち $J[u]$ は**函数の函数**であり，ふつうの函数と区別するために**汎函数**(functional)とよばれる．[　]を用いたのもこれを強調するためである．変分学は汎函数の最小(大)値，極小(大)値，もっと一般

(1) I, 372 頁参照.

には停留値を論ずる数学の分科である．

ここで早速記号についての注意をのべておきたい．上では縦座標 $u$ と函数記号 $u(x)$ とに同じ文字 $u$ を用いたので，混同のおそれがある．本来はこれを区別して，例えば $u=\varphi(x)$ とかき，(*1. 1*) に現われる文字 $u$ はすべて $\varphi$ でおきかえるべきであろう．しかしこれから出てくるもっと複雑な問題にこの方針を貫ぬこうとすると，かえって煩らわしくなる．そこで以下古来の習慣にしたがって，座標を表わす数 $u$ と，函数記号である $u$ とに同じ文字を用い，自由にこれを使い分けることにするから，読者は一応の注意を払う心構えが必要である．例えば (*1. 1*) の左辺の $J[u]$ の中の $u$ は数ではなくて数 $x$ に数 $u(x)$ を対応させる函数 $u$ であることに注意していただきたい．また (*1. 1*) の右辺の $u(x)^{-1/2}$ の代りに $u^{-1/2}$ などと略記することも普通である．このときの $u$ は函数でなくて函数値 $u(x)$ を表わしている．

(*1. 1*) を一般化するとつぎのような問題が生ずる．三変数の函数 $F(x,u,u')$ が与えられたとき

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1}F(x,u,u')dx \tag{1.3}$$

を最小にする函数 $u=u(x)$ を求めよ．ただし

$$u(a_0)=b_0,\quad u(a_1)=b_1 \tag{1.4}$$

という条件を指定する．

これが古典変分学で論じられる最初の問題である．ここで $u'$ は $du/dx$ を表わすことはいうまでもないが，函数 $F(x,u,u')$ は一応，三つの独立な変数 $x,u,u'$ の函数と考えて適当に微分可能なものとする．(*1. 3*) の右辺の積分を作るときにはじめて $u=u(x)$, $u'=du(x)/dx$ を代入するものと考える．これによって (*1. 3*) が函数 $u=u(x)$ の汎函数 $J[u]$ となるのである．

問題〕 点 $x,u$ における媒質の屈折率が $n(x,u)$ であるとき，二点間を光が通るのに要する時間を最小にする路が実際の光線である，という Fermat の原理を変分法の問題に直せ．光の速度は $n$ に逆比例する．

## §2 Euler 微分方程式と停留函数

(*1. 4*) の条件の下に (*1. 3*) の値を最小にする函数があったとして，これを

$$u=\bar{u}(x) \tag{2.1}$$

とする．いま別に

$$\eta(a_0)=0, \quad \eta(a_1)=0 \tag{2.2}$$

を満足する函数 $\eta(x)$ と勝手な実数 $\varepsilon$ をとって

$$u_\varepsilon(x)=\overline{u}(x)+\varepsilon\eta(x) \tag{2.3}$$

とおけば，これは (*1.4*) を満足するから，"許される"函数である．$u_\varepsilon$ を $\overline{u}$ を**変分**してえられる函数という．$u=u_\varepsilon(x)$ を (*1.3*) に代入すれば，$J[u_\varepsilon]$ は $\varepsilon$ の函数となるが，仮定によってこれは $\varepsilon=0$ のときに最小値をとるはずであるから

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[u_\varepsilon]\right)_{\varepsilon=0}=0 \tag{2.4}$$

でなければならない．

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[u_\varepsilon]\right)_{\varepsilon=0}=\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{a_0}^{a_1}F(x,\overline{u}(x)+\varepsilon\eta(x),\overline{u}'(x)+\varepsilon\eta'(x))dx\right)_{\varepsilon=0}$$

を計算すれば，(*2.4*) は

$$\int_{a_0}^{a_1}[\overline{F}_u\eta(x)+\overline{F}_{u'}\eta'(x)]dx=0 \tag{2.5}$$

となる．ここで $\overline{F}_u, \overline{F}_{u'}$ は，$x, u, u'$ を独立な変数と考えて作った，$F(x,u,u')$ の $u$ もしくは $u'$ に関する偏導函数 $F_u$ もしくは $F_{u'}$ に，$u=\overline{u}(x)$, $u'=d\overline{u}(x)/dx$ を代入したものを表わす．

(*2.2*) を考慮して (*2.5*) に部分積分を適用すると

$$\int_{a_0}^{a_1}\left(\overline{F}_u-\frac{d}{dx}\overline{F}_{u'}\right)\eta(x)dx=0 \tag{2.6}$$

となる．これより $u=\overline{u}(x)$ は微分方程式

$$F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}=0 \tag{2.7}$$

を満足せねばならないことが結論される[(1)]．これを (*1.3*) に対する **Euler の微分方程式**という．左辺は詳しくかけば $F_u(x,u(x),u'(x))-(d/dx)F_{u'}(x,u(x),u'(x))$ である．今後は一々こうした説明は加えないでもよいであろう．

(*2.6*) から (*2.7*) を導くには**変分学の基本補題**とよばれる次の定理が用いられている．連続函数 $f(x)$ があって，境界条件 (*2.2*) を満足する勝手な函数 $\eta(x)$（ただし $\eta$ は十分微分可能なものだけしか考えないでもよい）に対してつねに

(1) 厳密には $\overline{F}_{u'}$ が微分可能であることを証明せねばならない．§5 参照．

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)\eta(x)dx = 0 \tag{2.8}$$

であれば，実は $f(x)\equiv 0$ である．何故ならもしある点 $x_0$ で $f(x_0)\neq 0$，例えば $f(x_0)>0$，であるとすると，連続性によって $x_0$ のある近傍で $f(x)>0$ であるから，この近傍では正でその外では恒等的に 0 に等しい函数 $\eta(x)$ をとると，(*2.8*) の左辺が正となって仮定に反するのである．

(*2.3*) において $\bar{u}$ の代りに $u$ とかき，$\varepsilon\eta(x)$ を $\delta u(x)$ とかいてこれを $u(x)$ の**変分**とよび，(*2.5*) の左辺に $\varepsilon$ をかけた量

$$\delta J[u] = \int_{a_0}^{a_1} (F_u \delta u + F_{u'}\delta u')dx \tag{2.9}$$

を一般に $J[u]$ の**第一変分**という．(*2.5*) は $u=\bar{u}$ において $J[u]$ の第一変分が 0 になることを示す．

Euler の微分方程式 (*2.7*) を詳しく書くと

$$F_u - F_{u'x} - F_{u'u}u' - F_{u'u'}u'' = 0 \tag{2.10}$$

となり，$u$ に関する二階の微分方程式である．したがってその一般解として，二つの任意定数を含むものがえられるのがふつうである．この解が境界条件 (*1.4*) を満足するように任意定数を定めることができれば，問題は解決されたと一応考えられる．

しかし実は Euler の方程式は，$u=\bar{u}(x)$ が (*1.3*) の最小 (大) 値を与えるための必要条件であっても，十分条件ではない．これは函数 $J(\boldsymbol{u})$ の場合の条件 (*1.7.2*) と同様な事情にある．しかし $u=\bar{u}(x)$ が Euler の方程式の解であれば，そこで $J[u]$ が最小 (大) あるいは極小 (大) にならなくても，少なくも停留であると考えられる．このいみで Euler の方程式の解をすべて**停留函数**，そのグラフを**停留曲線**と呼ぶ (このとき境界条件は特に考えない)．なお極小 (大)，停留という言葉の定義は第 1 章の場合のようには簡単ではない．これについてはあとで注釈を加える (§4)．

## §3　Euler 微分方程式の積分法

Euler 方程式 (*2.7*) または (*2.10*) はいつでも簡単に解けるというものではないが，ある場合には容易に第一積分を求められることがある．

(1)　函数 $F$ が $u$ を陽に含まないとき．このとき $F_u=0$ であるから，(*2.*

7) は直ちに一度積分されて

$$F_{u'}=c$$

となる ($c$ は積分定数).

(2) 函数 $F$ が $x$ を陽に含まないとき. このとき (2.7) は

$$F-u'F_{u'}=c \tag{3.1}$$

という積分をもつ. 何故なら左辺を $x$ で微分してみると

$$F_x+F_u u'+F_{u'}u''-u''F_{u'}-u'\frac{d}{dx}F_{u'}=u'\left(F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}\right)=0 \tag{3.2}$$

となるからである. ここで $F_x=0$ という仮定と Euler 方程式 (2.7) とを用いた.

注意すべきことは (3.1) から逆に Euler 方程式が必ずしも導かれないことである. (3.2) からわかるように, これは $u'=0$ のときにおこる. したがって (3.1) の解 $u$ に対して決して $u'=0$ とならなければ, $u$ はたしかに停留函数であるが, $u'=0$ となるときには特別の吟味が必要である.

例題 1〕 §1の例題を特別の場合として含む汎函数

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1}f(u)(1+u'^2)^{1/2}dx \tag{3.3}$$

を考えてみよう. $F$ は $x$ を含まないから, (3.1) のような積分がある.

$$\begin{aligned} c=F-u'F_{u'}&=f(u)(1+u'^2)^{1/2}-f(u)u'^2(1+u'^2)^{-1/2}\\ &=f(u)(1+u'^2)^{-1/2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

であるから, 形式的に

$$c\int[f(u)^2-c^2]^{-1/2}du=\pm(x-\xi) \tag{3.5}$$

という解がえられる ($\xi$ は積分定数). 実はこのほかに (3.1) の特異解として $u=b$ (ただし $b$ は $f(b)=c$ のような定数) があるが, この解に対しては恒等的に $u'=0$ であるから, 上にのべたようにこれが Euler 方程式の解であるかどうかは別に調べなければならない. すぐにわかるように $f'(b)=0$ であるときにかぎって $u=b$ は Euler 方程式の解である.

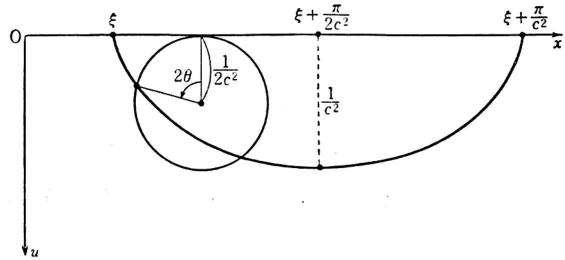
例題 2〕 特に Brachistochrone の問題では $f(u)=u^{-1/2}$ であるから (3.5) は

$$c\int\left(\frac{u}{1-c^2u}\right)^{1/2}du=\pm(x-\xi)$$

となる. この積分は $u=c^{-2}\sin^2\theta$ とおくとすぐに計算できて

$$\left.\begin{aligned} x-\xi&=\frac{1}{2c^2}(2\theta-\sin 2\theta),\\ u&=\frac{1}{2c^2}(1-\cos 2\theta) \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

を与える．よって停留曲線は半径 $1/2c^2$ の円が $x$ 軸に沿って転がるときに円周上の一点が描く曲線，いわゆる**サイクロイド**に外ならない（第 3.1 図）．$f'(b)=0$ を満足する $b$ は




第 3.1 図

ないから，$u=b$ という停留函数は存在しない．また微分方程式 (*3.1*) に対しては $u=c^{-2}$ となる点は特異点で，いろいろ複雑なことがおこり得るが，本来の Euler 方程式の解としては (*3.6*) しか存在しないことがたしかめられる．

境界条件 (*1.2*) を満足させるのに，出発点として $\theta=0$ を採用すれば $\xi=0$ となる．定数 $c^2$ は曲線が点 $(a_1, b_1)$ を通るという条件で定まる．幾何学的考察から容易にわかるように，このような $c^2$ は必ず存在してただ一通りに定まる．もし

$$b_1/a_1<2/\pi \tag{3.7}$$

であれば，質点は単調に落下せず，一たん落下したのち上昇して目的地に達することになる．

もっと一般に，勝手な二点 $(a_0, b_0)$，$(a_1, b_1)$（ただし $b_0\geqq 0$, $b_1\geqq 0$）を与えたとき，これらを通る停留曲線は必ず存在して一通りに定まる．

問題 1〕 例題 2 において停留値 $J[\bar{u}]$ を計算せよ．（$P_1$ に相当する角 $\theta_1$ を用いて表わせ.）特に $P_1$ が $P_0$ と同じ高さにあるとき $(b_1=0)$ は如何？

例題 3〕 放物体の運動　例題 1 において

$$f(u)=u^{1/2} \tag{3.8}$$

の場合を考えてみよう．力学の最小作用の原理を放物体の運動に適用するとこの問題になる．（鉛直下向きに $u$ 軸をとる.）(*3.5*) は直ちに積分できて

$$u=\frac{1}{4c^2}(x-\xi)^2+c^2 \tag{3.9}$$

を与える．上と同様にしてこのほかには停留曲線が存在しないことが確かめられる．よって停留曲線は $u$ 軸に平行な直線 $x=\xi$ を軸とし，実軸 $u=0$ を準線とする放物線である．焦点は $x=\xi$, $u=2c^2$ にある．

(*3.9*) が境界条件 (*1.4*) を満足するように積分定数 $\xi, c$ を定めることができるかどうか調べてみよう．$u(a_0)=b_0$ によって，$\xi$ と $c$ との間に

$$b_0=\frac{(\xi-a_0)^2}{4c^2}+c^2 \tag{3.10}$$

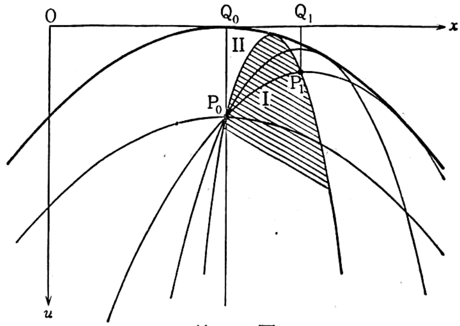
という関係がある．すると (*3.9*) をかきかえて

$$u=\frac{(x-a_0)^2}{4b_0}+\frac{[(\xi-a_0)(x-a_0)-4b_0c^2]^2}{16b_0c^4}\geqq\frac{(x-a_0)^2}{4b_0} \tag{3.11}$$

を得る．これは定点 $(a_0, b_0)$ を通る停留曲線群は，定まった放物線

$$u=\frac{(x-a_0)^2}{4b_0} \tag{3.12}$$

を包絡線とし，その下側だけしか通らないことを示す．したがって第二の点 $(a_1, b_1)$ が包絡線の上側にあれば，すなわち $4b_0b_1<(a_1-a_0)^2$ であれば，これら二点を通る停留曲線は存在しない．逆に $4b_0b_1>(a_1-a_0)^2$ ならば，そのような停留曲線は二つあり，その一つは二点の間で包絡線に接するが，他は接しない(第 3.2 図の曲線 I, II)．相当する定数 $\xi, c$ の値は



第 3.2 図

$$\xi=\frac{(a_0b_1+a_1b_0)\pm(a_0+a_1)d}{b_0+b_1\pm 2d},\quad c^2=\frac{(a_1-a_0)^2}{4(b_0+b_1\pm 2d)},$$

$$2d=[4b_0b_1-(a_1-a_0)^2]^{1/2} \tag{3.13}$$

で与えられ，複号は上の符号が包絡線に接する曲線 II に相当する．詳しい計算は読者の演習に供する．

この例の示すように，指定された二点を通る停留曲線はいつでもあるわけでなく，あってもただ一つとはかぎらないのである．二つ以上あるときには，どちらがより小さい $J[u]$ を与えるかという問題がおこる．これについてはあとで論ずる．

例題 4〕 極小曲面[1] 同じく $f(u)=u$ のとき．これは与えられた二点を通る曲線 $u=u(x)$ を $x$ 軸のまわりに回転して生ずる曲面の面積を最小にせよという問題である．(3.5) を積分すると停留曲線は

$$u=c\cosh\frac{x-\xi}{c} \tag{3.14}$$

で与えられる懸垂線 (catenary) であることがわかる．ここでも例題3と同じように，二点 $(a_0, b_0)$, $(a_1, b_1)$ が横に離れすぎていると，これらを結ぶ停留曲線は存在せず，近くにあれば二つの停留曲線で結ばれる．

問題 2〕 以上の諸例に対する Euler 方程式を作れ．

問題 3〕 例題 1 において $f(u)=u^{-1}$ のときの停留函数を求めよ．

問題 4〕 $$J[u]=\int u^k(u^2+u'^2)^{1/2}dx \qquad (u>0)$$

に対する停留曲線を求めよ．

問題 5〕 $$J[u]=\int u^k g(u')dx$$

(1) I, 378 頁参照．

の形の汎函数に対する停留函数は $u=c\varphi\left(\frac{x-\xi}{c}\right)$ の形をもつことを示せ ($c, \xi$ は任意定数). 例題 2, 3, 4 はこの特別の場合であることに注意せよ.

## §4　極小(大), 停留の定義

問題の基礎にある条件や仮定を数学的に厳密な立場から論ずることは, 本書の主旨ではないし, その余裕もないが, 今までにのべてきたことはやや形式的でありすぎたから, この節で少し批判的に, 汎函数, その最小, 極小, 停留などの意味を考えておきたい.

汎函数 (*1. 3*) において, 函数 $F(x, u, u')$ は三つの独立変数 $x, u, u'$ のある領域 D′ で定義され, 十分連続可微分であるとする. これに対して汎函数 $J[u]$ を作るときには, 函数 $u=u(x)$ が例えば断片的に滑らか (連続で断片的に連続[1]な導函数をもつ) であるとして, $u'=du(x)/dx$ とおいて (*1. 3*) の積分を作るものとする. ただし $x, u(x), u'(x)$ の値が上の領域 D′ に含まれているような $u(x)$ だけを考える. さらに $u(x)$ は境界条件 (*1. 4*) を満足するものとする. このような $u(x)$ を"許される函数"とよぶ. 許される函数の中に特別なもの $\overline{u}(x)$ があって, 勝手な許される函数 $u$ に対してつねに

$$J[\overline{u}]\leqq J[u] \tag{4.1}$$

が成り立つならば, $J[\overline{u}]$ は $J$ の**最小値**であり, $\overline{u}$ は**最小函数**である. ここで $u\neq\overline{u}$ なら $J[\overline{u}]<J[u]$ であるという場合には, $J[\overline{u}]$ は**狭義最小値**であり, そうでなければ**広義最小値**である.

これに対して極小の定義はややめんどうである. 第1章のときと同じく, 極小とは局所的最小を意味するが, 局所的ということが簡単ではない. $J[\overline{u}]$ が極小値であるということは, $\overline{u}$ の適当な**近傍**にある許される函数の範囲内で最小値になるということであるが, 近傍ということにいろいろな解釈ができる. 例えばある正数 $\delta$ を与えて

$$|u(x)-\overline{u}(x)|<\delta \qquad (a_0\leqq x\leqq a_1) \tag{4.2}$$

を満足する許される函数 $u$ の全体を, $\overline{u}$ の一つの近傍と定義することができる. すると $J[\overline{u}]$ が極小値であるとは, 適当な正数 $\delta$ をとれば, (*4. 2*) を満足する許される函数 $u$ に対してつねに (*4. 1*) が成り立つことを意味する. この定義による極小を**強 (strong) 極小**という. 強極小にも狭義と広義との区別ができ

(1)　I, 68 頁.

ることは，最小の場合と同様である．

強極小の定義では，$\overline{u}$ の近傍の函数 $u$ に対し，(*4. 2*) によって $u(x)$ の値は制限されたが，導函数 $u'(x)$ には制限がない．しかし $u'(x)$ も制限して

$$|u(x)-\overline{u}(x)|<\delta, \quad |u'(x)-\overline{u}'(x)|<\delta \qquad (a_0\leqq x\leqq a_1) \tag{4.3}$$

を満足する許される函数 $u$ の全体を $\overline{u}$ の近傍と定義することもできる．すると $J[\overline{u}]$ が極小であるということは，適当な正数 $\delta$ をとれば，(*4. 3*) を満足する許される函数 $u$ に対してつねに (*4. 1*) が成立することを意味する．この定義による極小を**弱** (weak) **極小**という．弱極小に対しても狭義，広義の区別ができる．

明らかに最小は強極小であり，強極小は弱極小であるが，その逆は成立しない．

停留ということの定義はさらにむずかしいが，ここでは形式的に，第一変分 (*2. 9*) がすべての断片的滑かな $\delta u(x)$ (ただし $\delta u(a_0)=\delta u(a_1)=0$) に対して 0 になるとき，$J[\overline{u}]$ を停留値，$\overline{u}$ を停留函数とよぶことにしておく．

例題〕 §3, 例題 1 において，$(1+u'^2)^{1/2}$ は変数 $u'$ の勝手な値に対して定義されているから，領域 D′ は函数 $f(u)$ の定義域で定まる．例題 2, 3 においてそれぞれ $f(u)=u^{\mp 1/2}$ であるから，D′ としてはつぎの領域をとることができる:

$$-\infty<x<\infty, \quad 0<u<\infty, \quad -\infty<u'<\infty. \tag{4.4}$$

## §5　Euler 方程式への反省

最小，極小，停留の意味を前節のように定めると，§2 の Euler 方程式の導き方に重大な欠陥のあることに気がつく．$J[\overline{u}]$ が**弱極小**でさえあれば，(*2. 5*) の成立することはよろしい．(*2. 3*) において $\eta(x)$ を固定した上では，$\varepsilon$ が十分小さければ，$u_\varepsilon$ は $\overline{u}$ の "弱近傍" (*4. 3*) の中に入るからである．また $J[\overline{u}]$ が停留値であれば定義によって (*2. 5*) は成り立つ．しかし (*2. 5*) から部分積分によって (*2. 6*) を導くときに $d\overline{F}_{u'}/dx$ が存在すると暗に仮定したが，これが正しいかどうかが問題なのである．

$\overline{u}$ は当然許される函数のはずであるから $\overline{u}'(x)$ は断片的連続であり，したがって $\overline{F}_{u'}=F(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ も同様であるが，それが微分可能であるというアプリオリの理由はない．むろんはじめから $u(x)$ として二回微分可能な函数だけしか許さないことにしておけば事情は簡単であるが，もともと汎函数 $J[u]$ を作るには $u'(x)$ だけで十分であるのに，$u''(x)$ の存在を仮定するのは不当な

制限なのである.

Du-Bois Reymond はこの困難をさけるために, (*2.5*) を逆の方向に部分積分した. すなわち

$$\int_{a_0}^{a_1}\left[\overline{F}_{u'}-\int_{a_0}^{x}\overline{F}_u dx\right]\eta'(x)dx=0. \qquad (5.1)$$

微分とちがって積分は断片的連続な函数 $\overline{F}_u$ に対していつでも可能であるから, ここには上のような困難はない. (*5.1*) が勝手な断片的滑かな函数 $\eta(x)$ ($\eta(a_0)=\eta(a_1)=0$) に対して成立することから $u=\overline{u}$ に対しては

$$F_{u'}=\int_{a_0}^{x}F_u dx+\text{定数} \qquad (5.2)$$

という結果が出る.

ここで, 次の補題が用いられている. 断片的連続な函数 $f(x)$ があって, $\eta(a_0)=\eta(a_1)=0$ かつ断片的滑らかな(1)勝手な函数 $\eta(x)$ に対して

$$\int_{a_0}^{a_1}f(x)\eta'(x)dx=0 \qquad (5.3)$$

ならば, 実は $f(x)$ は定数に等しい. これを証明するのに, まず $f(x)$ が連続であるときを考える. 区間 $[a_0, a_1]$ での $f(x)$ の平均値を $c$ として $f_1(x)=f(x)-c$ とおき

$$\eta(x)=\int_{a_0}^{x}f_1(x)dx \qquad (5.4)$$

とすれば, この $\eta(x)$ は上の条件を満足している. $\eta(a_0)=\eta(a_1)=0$ により (*5.3*) は $f(x)$ を $f_1(x)$ でおきかえても成り立つから, $\eta'(x)=f_1(x)$ に注意すると

$$\int_{a_0}^{a_1}f_1(x)^2dx=0 \qquad (5.5)$$

となる. $f_1(x)$ の連続性によって $f_1(x)=0$ すなわち $f(x)=c$ を得る. $f(x)$ が単に断片的連続であるときには, $f(x)$ が連続である各小区間について上の結果が成り立つから, $f(x)$ は断片的に定数に等しくなるが, この定数が全区間にわたって同じ値 $c$ でなければならないことが, 再び (*5.3*) を用いて容易に示される. ただし例外として孤立した点で $f(x)$ が $c$ と異なることはあり得る.

(1)　$\eta(x)$ として高階の導函数まで連続なものだけしか許さなくても, 同じ結果が成り立つ.

## §6 正則な問題

(*5.2*) は Euler 方程式 (*2.7*) に代るもので，形式的には (*2.7*) を積分したものである．一般には (*5.2*) の両辺が微分可能であるかどうかわからないからこれを微分して (*2.7*) を出すことはできないが，多くの重要な問題ではそれが許される．例えば D′ でいたるところ

$$F_{u'u'} \neq 0 \tag{6.1}$$

が満足されていればよい．

このときは陰函数に関する定理によって，(*5.2*) の右辺を与えられた函数とみると，(*5.2*) を $u'$ について解くことができ，その解は一義的に定まる．(*5.2*) の右辺はある函数の不定積分として当然 $x$ の連続函数であるから，解いた結果 $u'$ は実は $x$ の連続函数になる．(ここで (*6.1*) が**到るところ**満足されているという仮定が特に大切である．これによって (*5.2*) を解いて $u'$ が一義的にきまることがわかっているから，上の結論が出るのである．考えている解 $\overline{u}$ に対して (*6.1*) が成り立つだけでは十分でない．[1]) そうすると $F_u$ も $x$ の連続函数になるから，(*5.2*) の右辺は実は連続微分可能な函数であり，再び陰函数の定理によって，(*5.2*) を解いた結果，$u'$ も連続微分可能であることになる．こうして実は $u''(x)$ も存在して連続であることが結論された．その上は (*5.2*) を微分して Euler の方程式 (*2.7*) あるいは (*2.10*) の成立することは明らかである．

(*6.1*) の満足されているとき，考えている問題は**正則** (regular) であるという．正則な問題では停留函数は必ず Euler 方程式の解である．停留函数が一般の許される函数よりも高度の微分可能性をもっていることは，変分学で最も興味のある事実である．

例題 1〕 §3, 例題 1 では $F_{u'u'}=f(u)(1+u'^2)^{-3/2}$ であるから，$f(u) \neq 0$ であれば問題は正則である．例題 2, 3, 4 は $u>0$ で考えているかぎりこの条件を満たしている．

正則でない問題では事情はこのように簡単ではなく，$\overline{u}'(x)$ が連続であるとはかぎらない．停留曲線で角 (カド) をもつようなものが存在する場合がある．このような解を**不連続解**という (仮定によって $\overline{u}(x)$ 自身は連続であるが)．い

(1) 例えば $F_{u'} \equiv u'^2 = 1$ という方程式の解は $u' = \pm 1$ であるが，$\pm$ は勝手にとれるから，$u'$ が連続であるとは主張できない！ このとき (*6.1*) は $u' = 0$ で破れている．

ま考えている簡単な $J[u]$ (*1.3*) に対しては不連続解は例外的なものと考えられるが，もっと複雑な問題では不連続解は決して珍しいものではない．波動現象に関係する問題ではつねに不連続解がおこり得る．

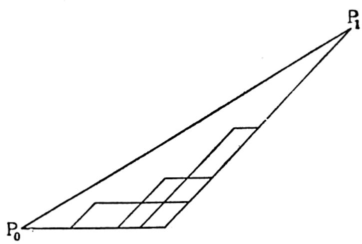
以上解の微分可能性についてやや詳しい吟味を試みたが，これから後はこの調子で進む余裕はないから，特に断らなくても必要に応じて問題の正則性を，あるいは解の微分可能性を仮定することにして，形式的な議論を進める．

$J[\overline{u}]$ の最(極)小値が存在するかという最も根本的な問題を一般的に論ずることは本書ではとりあげない．ただし停留値を求めればそれがすぐ最小値であることがわかる場合もある (§4.6).

例題 2〕 不連続解のある場合の一例として，

$$F(x,u,u') = u'^2(u'-1)^2$$

をあげよう．すぐわかるように Euler 方程式の解は $u'$ = 定数，すなわち直線である．勝手な二点 $P_0(a_0, b_0)$, $P_1(a_1, b_1)$ を通る直線は必ず存在するが，それが $J[u]$ の最小値を与えるとはかぎらない．$P_0P_1$ の勾配が 0 と 1 との間にあるときには，$P_0, P_1$ をそれぞれ勾配 0 と 1 とをもつ線分から成る折線で結ぶことができ，その仕方は無数にある (第 6.1 図)．これらに対しては $F=0$ したがって $J=0$ となり，明らかに $J$ の最小値を与える．このような解はすべて不連続解である．



第 6.1 図

問題〕 $u(0)=0,\ u(1)=1$ という条件の下で

$$J[u] = \int_0^1 (1+u'^2)^{-1} dx$$

は最小値も最大値も持たないが，$J[u]$ の値は有限な上限 1，下限 0 をもつことを示せ．この例は汎函数が必ずしも最大値，最小値をもたないことを示す．$J[u]$ に対する停留函数は何か？

## §7　Euler 方程式の退化する場合

Euler 方程式 (*2.10*) は一般に二階の微分方程式で，$u''$ の係数は $F_{u'u'}$ である．もし正則な場合と正反対に恒等的に $F_{u'u'}=0$，すなわち $F$ が $u'$ に関して一次整式

$$F = M(x,u)+N(x,u)u' \tag{7.1}$$

の形のときには，Euler 方程式は一階の微分方程式になりそうであるが；実は

$$M_u + N_u u' - \frac{d}{dx}N = 0 \quad \text{すなわち} \quad M_u - N_x = 0 \tag{7.2}$$

となって，微分方程式ではなくなる．したがってその解 $u$ に境界条件 (*1.4*) を満足させることは一般にできない．

もし (*7.2*) が $x, u$ 平面の単連結[(1)]な領域で恒等的に満足されているならば，微分学の定理によって

$$M = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, u), \quad N = \frac{\partial}{\partial u}\Phi(x, u) \tag{7.3}$$

のような函数 $\Phi(x, u)$ があるから，

$$J[u] = \int_{a_0}^{a_1} F dx = \int_{a_0}^{a_1} \frac{d}{dx}\Phi(x, u(x))dx = \Big[\Phi(x, u(x))\Big]_{a_0}^{a_1} \tag{7.4}$$

となり，$u(a_0) = b_0$, $u(a_1) = b_1$ が指定されていれば，$J[u]$ は全く函数 $u(x)$ によらない一定の値をもつ．

## §8 多くの函数のある場合，高階微分を含む場合

(*1.3*) は未知函数 $u$ がただ一つの場合であるが，多数の未知函数 $u_1 = u_1(x)$, $\cdots$, $u_n = u_n(x)$ の汎函数

$$J[u_1, \cdots, u_n] = \int_{a_0}^{a_1} F(x, u_1, \cdots, u_n, u_1', \cdots, u_n')dx \tag{8.1}$$

も前と同様に取り扱われる．(*1.4*) に相当する境界条件は

$$u_i(a_0) = b_{0i}, \quad u_i(a_1) = b_{1i}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{8.2}$$

の形をとる．

停留函数の条件を出すには，§2 と同じような函数 $\eta(x)$ を用いて

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \overline{u}_i(x) + \varepsilon\eta(x), \\ u_k &= \overline{u}_k(x) \qquad\qquad (k \neq i) \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

を $J[u_1, \cdots, u_n]$ に代入し，これが $\varepsilon = 0$ で停留であるという条件から，(*2.7*) と全く同様にして，$u_1 = \overline{u}_1, \cdots, u_n = \overline{u}_n$ の満たすべき条件

$$F_{u_i} - \frac{d}{dx}F_{u_i'} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{8.4}$$

が導かれる．これは連立微分方程式であって，(*8.1*) に対する Euler 微分方程式と呼ばれる．その解を停留函数 (曲線) とよぶことは前と同様である．

(1) I, 190 頁．

この場合にも Du-Bois Reymond の注意があてはまる．今度は正則性の条件は (*6. 1*) の代りに

$$\det(F_{u_i'u_k'}) \neq 0 \tag{8.5}$$

で与えられる．

例題〕 解析力学では $x$ として時間，$u_1, \cdots, u_n$ として力学系の一般座標をとり，$F$ として Lagrange 函数（運動エネルギーと位置エネルギーとの差）をとると，$J$ が停留という条件によって系の運動が定まる．Euler 方程式 (*8. 4*) は運動方程式となる．

問題〕 汎函数 (*8. 1*) において $F$ が $x$ を陽に含まないとき，Euler 方程式は第一積分をもつことを示し，これを求めよ．

(*1. 3*) に対して，$u$ の高階微分を含む汎函数

$$J[u] = \int_{a_0}^{a_1} F(x, u, u', \cdots, u^{(n)})dx \tag{8.6}$$

も考えられるが，その取扱いも別に変ったところはない．(*4. 1*) に相当する境界条件は

$$u(a_0) = b_0, \cdots, u^{(n-1)}(a_0) = b_0^{(n-1)}, u(a_1) = b_1, \cdots, u^{(n-1)}(a_1) = b_1^{(n-1)} \tag{8.7}$$

の形をとる．

$u$ として (*2. 3*) の形の函数をとると $J[u]$ は $\varepsilon$ の函数となり，これが $\varepsilon = 0$ で停留となることから条件

$$\int_{a_0}^{a_1} [\overline{F}_u \eta(x) + \overline{F}_{u'}\eta'(x) + \cdots + \overline{F}_{u^{(n)}}\eta^{(n)}(x)]dx = 0 \tag{8.8}$$

が出る．ただし今度は $\eta(x)$ には $x = a_0, a_1$ で $\eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)}$ が 0 になるという条件をつけておく．これに注意して (*8. 8*) に部分積分を適用し，基本補題 (§ 2) を用いると，$u = \overline{u}$ の満たすべき条件として

$$F_u - \frac{d}{dx}F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{u''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{u^{(n)}} = 0 \tag{8.9}$$

がえられる．これが (*8. 6*) に対する Euler 方程式で，その解が停留函数（曲線）である．(*8. 9*) は一般に $2n$ 階の微分方程式であり，境界条件 (*8. 7*) を満足させることができると考えられる．

問題〕 汎函数 (*8. 6*) において $F$ が $x$ を陽に含まないとき，Euler 方程式は次の第一積分をもつことを示せ：

$$F - u'\left[F_{u'} - \frac{d}{dx}F_{u''} + \frac{d^2}{dx^2}F_{u'''} - \cdots\right] - u''\left[F_{u''} - \frac{d}{dx}F_{u'''} + \cdots\right]$$
$$- u'''\left[F_{u'''} - \frac{d}{dx}F_{u''''} + \quad\right] - \cdots = c.$$

## §9 二つ以上の独立変数

簡単のために

$$J[u]=\iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)dx\,dy \tag{9.1}$$

という汎函数について考える．二変数 $x,y$ の函数 $u=u(x,y)$ をとり，$u_x=\partial u/\partial x$, $u_y=\partial u/\partial y$ として，(9.1)の値を極小或は停留にするものを求めるというのが問題である．境界条件としては，例えば G の境界を Γ とし，その上にパラメタ $s$ を導入して

$$\Gamma \text{ の上で} \qquad u=f(s) \tag{9.2}$$

という条件をつける．

この場合にも Euler 方程式を導くことは容易にできる．極小値を与える函数を $u=\bar{u}(x,y)$ とし

$$u=\bar{u}(x,y)+\varepsilon\eta(x,y) \qquad (\Gamma \text{ の上で } \eta=0) \tag{9.3}$$

を(9.1)に代入して，$J$ が $\varepsilon=0$ のとき停留という条件を書くと，§2 と同様にして

$$\iint_G (F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)dx\,dy=0 \tag{9.4}$$

を得，部分積分して基本補題（これは多変数でもそのまま成立する）を用いると，けっきょく $u=\bar{u}$ の満足すべき条件として，Euler 方程式

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0 \tag{9.5}$$

が導かれる．ここで $F_{u_x}$ は $x,y,u,u_x,u_y$ を独立変数と考えて $F$ を $u_x$ で微分するのであるが，$(\partial/\partial x)F_{u_x}$ を作るときには $F_{u_x}$ の引数の $u,u_x,u_y$ にはそれぞれ $u(x,y)$, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ を代入して $x,y$ の函数とみなすのである（§1, §2 の注意参照）．

(9.5)は一般に $u$ に関する二階の偏微分方程式である．境界条件(9.2)の下にこれを解くことは，境界値問題とよばれる．

## §10 パラメタ表示

Brachistochrone の問題（§1, 例題）において，求める曲線を $u=u(x)$ の形に仮定したことについては，疑問の余地がある．平面上の曲線は，$u$ 軸に平行な直線とたかだか一点でしか交わらない場合を除いては，この形に書かれな

いからである．この意味では幾何学的–力学的なもとの問題と，解析的な問題 (*1. 1*) との間にはズレがある．

一般に平面の曲線を決定するという問題では，曲線の方程式を $u=u(x)$ の形に書くのは適当でなく，パラメタ表示

$$x=x(t),\quad u=u(t)\qquad (0\leqq t\leqq 1) \tag{10.1}$$

を用いるのがよい．

この形にすると (*1. 3*) は

$$J[x,u]=\int_0^1 F\left(x,u,\frac{\dot{u}}{\dot{x}}\right)\dot{x}\,dt \tag{10.2}$$

を最小にする変分の問題になる．$\dot{x}$ は $dx/dt$ を表わす．境界条件は

$$x(0)=a_0,\quad u(0)=b_0,\quad x(1)=a_1,\quad u(1)=b_1 \tag{10.3}$$

で与えられる．これは二つの函数 $x(t)$, $u(t)$ を含む問題であるから，§8 にのべた方法で取り扱えばよろしい．

ただしこの問題にはひとつの特異性がある．それは (*10. 2*) に対する Euler 方程式を解いて，函数の組 (*10. 1*) を決定することはできないということである．何故ならもともと $J$ の値は曲線 (*10. 1*) の形だけで定まり，それをパラメタ $t$ で表わす仕方にはよらないから，$J$ の最小という条件で，函数 (*10. 1*) まで決定されるはずはないのである．これは二つの Euler 方程式がたがいに独立でないことを意味する．しかし目的は曲線を決定することでパラメタ表示をきめることではないから，それで差支えないのである．この事情は (*8. 1*) の形の汎函数で，$F$ が $u_1',\cdots,u_n'$ について正一次の同次式，すなわち

$$F(x,u_1,\cdots u_n,ku_1',\cdots,ku_n')=kF(x,u_1,\cdots,u_n,u_1',\cdots,u_n') \tag{10.4}$$

が勝手な $k>0$ に対して成立する場合に共通である (なお §5.5～§5.7 を参照)．

例題〕 §3, 例題 1 では (*10. 2*) の被積分函数は $f(u)(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{1/2}$ となり，Euler 方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}f(u)\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{-1/2}=0,\\&\frac{d}{dt}f(u)\dot{u}(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{-1/2}=f'(u)(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

となる．第一式から

$$f(u)\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{-1/2}=\text{定数} \tag{10.6}$$

という積分がえられる．いま $f(u)$ は決して 0 にならないとすれば，(*10.6*) によってつねに $\dot{x}=0$ かつねに $\dot{x}\neq 0$ かのどちらかだけおこる．後の場合は曲線は $u=u(x)$ の形

にかけるから，すでに取り扱った場合 (§3) に属する．はじめの場合は $x=$ 定数 となって，停留曲線は $u$ 軸に平行な直線である．このとき (*10.5*) の第二式も満足されているから，たしかにこの曲線は考えている幾何学的問題に関する停留曲線である．故に第 3.2 図において，$\mathrm{P}_0$ を通る停留曲線として鉛直な直線も考えるべきである．この形の曲線は $u=u(x)$ の形に表わすことはできず，これを捕えるにはパラメタ表示が必要なのである．

問題〕 (*10.4*) のような $F$ に対しては Euler の関係

$$u_1'F_{u_1'}+\cdots+u_n'F_{u_n'}=F$$

が恒等的に成立することを示し，これを用いて恒等式

$$\det(F_{u_i'u_k'})=0$$

を証明せよ．(故にこの問題は決して正則でない.)

## §11　自 由 端

今まで考えた問題，例えば (*1.3*) では曲線 $u=u(x)$ の両端が指定されていた．しかしそうすることが必要なのではない．変分法の問題としては許される函数に対して全く境界条件なしで (*1.3*) を最小，あるいは停留にするという問題も考えられる．これを**自由端**の問題という．これに対していままで考えた問題を**固定端**の問題という．

このときにも停留函数に対しては Euler の方程式が成り立つ．これを示すのに**部分的変分の原理**が用いられる．$u=\bar{u}(x)$ が停留函数であれば，区間の端 $a_0, a_1$ で $\bar{u}(x)$ と同じ値をとる函数だけを考えたときにも，$J$ は $u=\bar{u}$ で停留でなければならないから，§2 と同じ理由で Euler の微分方程式が導かれる．

しかし今度はもっと広い範囲の函数 $u$ に対しても $J$ が停留になるので，境界条件 (*2.2*) のない自由な $\eta(x)$ に対しても (*2.5*) が成り立たねばならない．これを部分積分し，$u=\bar{u}$ が Euler 方程式を満足することを使うと

$$\Big[\overline{F}_{u'}\eta(x)\Big]_{a_0}^{a_1}=0 \tag{11.1}$$

を得る．これが勝手な $\eta(a_0), \eta(a_1)$ に対して成り立つためには，$u=\bar{u}$ は次の条件を満足せねばならない：

$$x=a_0, a_1 \quad で \quad F_{u'}=0. \tag{11.2}$$

この条件ははじめから許される函数に課せられているのではなく，停留函数だけが満足すべき条件である．これを**自然な境界条件**という．ふつうはこれによって Euler 方程式の解の中から目的の函数が選出される．なお左端が固定，右端が自由という問題も考えられる．すると停留函数は左端で $u(a_0)=b_0$，右端

で $F_{u'}=0$ という形の境界条件を満足する．

自由端の条件は許される曲線の端がそれぞれ直線 $x=a_0$, $x=a_1$ の上にあるということである．これをさらに一般化して，例えば許される曲線の右端が与えられた曲線

$$f(x,u)=0 \tag{11.3}$$

の上にある場合を考えてみる．このとき許される曲線を (*10.1*) のようにパラメタで表わすと，汎函数 (*1.3*) は (*10.2*) の形に書かれる．停留曲線 $x=\bar{x}(t)$, $u=\bar{u}(t)$ に対して

$$x=\bar{x}(t)+\varepsilon_1\xi(t), \quad u=\bar{u}(t)+\varepsilon_2\eta(t) \tag{11.4}$$

という変分を考える．パラメタ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は独立でなく，(*11.3*) によって

$$f(\bar{x}(1)+\varepsilon_1\xi(1), \quad \bar{u}(1)+\varepsilon_2\eta(1))=0 \tag{11.5}$$

という関係で結ばれる．(*11.4*) を (*10.2*) に代入すると $J$ は $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の函数となるが，条件 (*11.5*) の下でこれが $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ で停留になるはずであるから，未定乗数 $\lambda$ を用いて $[\partial(J-\lambda f)/\partial\varepsilon_j]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=0$, $j=1,2$, という条件を書き下す．$\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ が Euler 方程式を満足することを使うと

$$(F-F_{u'}(\dot{u}/\dot{x})-\lambda f_x)_{t=1}\xi(1)=0, \quad (F_{u'}-\lambda f_u)_{t=1}\eta(1)=0 \tag{11.6}$$

となる．$\xi(1), \eta(1)$ は任意であるから，右端で

$$F-F_{u'}u'-\lambda f_x=0, \quad F_{u'}-\lambda f_u=0 \tag{11.7}$$

という条件がえられる ($\dot{u}/\dot{x}=u'$ に注意)．或は

$$F-F_{u'}u' : F_{u'}=f_x : f_u \tag{11.8}$$

と書いてもよい．これを**横断性** (transversality) **の条件**という．自由端は (*11.3*) が $x=$ 定数 となった場合であるから，(*11.2*) は (*11.8*) から導かれる．(*3.3*) の場合には (*11.8*) は $1:u'=f_x:f_u$ となって，停留曲線が曲線 (*11.3*) に直交することを示し，このとき横断性は直交性と一致する．

未知函数が二つ以上ある場合，高階微分を含む場合 (§8) などの自由端の問題に対しても，自然の境界条件を同じようにして導くことができる．ここには二つ以上の独立変数のあるとき (§9) の結果を記しておこう．例によって $u$ は Euler の方程式を満足せねばならない (部分的変分の原理) が，"自由縁" のときには (*9.3*) の $\eta(x,y)$ は境界で 0 にならないから，(*9.4*) を部分積分すると，境界積分

$$\int_\Gamma [F_{u_x} \cos(\nu, x) + F_{u_y} \cos(\nu, y)]\eta \, ds = 0 \qquad (11.9)$$

が残る．$\nu$ は境界に立てた内向き法線を表わす．勝手な $\eta$ に対してこれが成り立つためには

$$\Gamma \text{ で} \qquad F_{u_x} \cos(\nu, x) + F_{u_y} \cos(\nu, y) = 0 \qquad (11.10)$$

でなければならない．これがこの場合の自然な境界条件である．

問題〕 (*8.6*) に対する自然な境界条件は次のものであることを示せ．

$$F_{u^{(n)}} = 0,$$

$$F_{u^{(n-1)}} - \frac{d}{dx}F_{u^{(n)}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$F_{u'} - \frac{d}{dx}F_{u''} + \cdots \pm \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} F_{u^{(n)}} = 0.$$

## §12 一方むきの変分

いままで $J[u]$ の最小値または極小値を与える曲線は考えている $x, u$ 面の領域 D の内部を走っていると仮定して論じてきたが，これが D の境界にかかることがあると，そこでは Euler 方程式は必ずしも満足されない．(*2.3*) のような変分を考えるとき，$\varepsilon$ は例えば $\varepsilon \geqq 0$ という一方むきの値しか許されないので，$\varepsilon = 0$ で $J$ が最小値をとっても，それは停留値になるとかぎらないからである．したがって (*2.4*) の代りに不等式 $\geqq 0$ がえられるだけであり，Euler の方程式も不等式でおきかえねばならない（ただし $F$ に適当な微分可能性を仮定して）．

しかし全く D の内部を走っている最小曲線の部分では，Euler 方程式が成り立つ．これはその部分だけで変分を考えてみれば明らかである（部分的変分の原理，§11）．

例題〕 §3, 例題 3 を再び考えてみる．$f(u) = u^{1/2}$ は $u \geqq 0$ で定義されているから，一部または全部が $x$ 軸上にのっている曲線も許される曲線として考えることができる．$x$ 軸に沿っては明らかに $F = 0$ となるが，その他ではつねに $F > 0$ であるから，このような曲線はたしかに最小値を与えるものの候補として考慮する必要がある．故に第 3.2 図において折線 $P_0Q_0Q_1P_1$ は $P_0, P_1$ を結ぶ最小曲線になる可能性がある (§4.5)．ただし $u = 0$ では $u^{1/2}$ は微分可能でないから，$x$ 軸の上では上にのべた "Euler 不等式" は考えられない．

## §13 等周問題

条件付変分法の問題の一種に等周問題(isoperimetric problem)というものがある．(*1.3*) の $J[u]$ のほかに同じような汎函数

$$K[u]=\int_{a_0}^{a_1}G(x,u,u')dx \tag{13.1}$$

が与えられていて，$K[u]$ の値が指定されたときの $J[u]$ の最小(極小，停留)値を求める，というのがそれである．境界は自由端でも固定端でもよい．等周問題という名は，周の長さが一定の閉曲線のうちで，かこむ面積の最大のものを求める問題からおこった．

$u=\overline{u}(x)$ を求める極小函数として

$$u=\overline{u}(x)+\varepsilon_1\eta_1(x)+\varepsilon_2\eta_2(x) \tag{13.2}$$

の形の変分を考える．これを $J[u], K[u]$ に代入すると，二つの変数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の函数 $J(\varepsilon_1,\varepsilon_2), K(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ がえられる．仮定によって $K(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=k$ という条件の下で $J$ は $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ のとき極小値をとるから，未定乗数法(§1.8)によって

$$\left(\frac{\partial J}{\partial\varepsilon_1}\right)-\lambda\left(\frac{\partial K}{\partial\varepsilon_1}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial J}{\partial\varepsilon_2}\right)-\lambda\left(\frac{\partial K}{\partial\varepsilon_2}\right)=0 \tag{13.3}$$

が成り立つ．(　) は $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ での値を表わす．Euler 方程式 (*2.7*) を導いたのと全く同じ方法によって，(*13.3*) から

$$(F-\lambda G)_u-\frac{d}{dx}(F-\lambda G)_{u'}=0 \tag{13.4}$$

が $u=\overline{u}(x)$ の満足すべき式として導かれる [(*13.3*) の二つの式からともに (*13.4*) が出る]．つまり被積分函数が $F-\lambda G$ であると考えて Euler 方程式を立てればよい．自由端での自然の境界条件，横断性条件についても同じことである．よけいな未知数 $\lambda$ がある代りに $K[u]$ の値を指定する方程式が加わる．

例題〕 §3, 例題 4 を考え，二点を結ぶ曲線の長さ $l$ が指定されている場合を考える．これは重さのある長さ $l$ の糸を二点で支えたときの形を定めよという問題である．条件は

$$K[u]=\int_{a_0}^{a_1}(1+u'^2)^{1/2}dx=l \tag{13.5}$$

となるから，求める Euler 方程式は，(*3.5*) で $f(u)=u-\lambda$ とおいたものを積分にもつ．したがって (*3.14*) の代りに

$$u=\lambda+c\cosh\frac{x-\xi}{c} \tag{13.6}$$

が停留曲線の式である．これを (*13.5*) に代入すれば

$$\sinh\frac{a_1-\xi}{c}-\sinh\frac{a_0-\xi}{c}=\frac{l}{c}. \tag{13.7}$$

(*13.6*) が二点 $(a_0, b_0)$, $(a_1, b_1)$ を通るという条件は

$$\lambda+c\cosh\frac{a_0-\xi}{c}=b_0,\quad \lambda+c\cosh\frac{a_1-\xi}{c}=b_1. \tag{13.8}$$

これら三つの式から定数 $\xi, c, \lambda$ が定まる．容易にわかるように，$l^2\geqq(a_1-a_0)^2+(b_1-b_0)^2$（糸の長さが二点間の距離より大）ならば解はいつでも存在して一義的である．この意味では，条件付である方が条件のないとき（§3, 例題 4）よりもやさしい．

## §14　変分法の直接解法

古典的な変分法では Euler 方程式がその中心であって，汎函数 $J[u]$ の最[極]小値を論ずるというよりも，むしろ汎函数 $J[u]$ と Euler 方程式との対応を定めることだけが，変分法の仕事のようになっていた．物理学の各分野に現われている**変分原理**はこのような性格のものである．本来の意味での変分法を取り扱うためには，Euler 方程式のほかにいろいろの考察が必要になる．これについては，第3, 4 章で論ずることにする．

しかし本来の変分法の問題に対しては，これを Euler 方程式に帰着させることが必ずしも有利でないことが，しだいに認められてきた．Euler 方程式は微分方程式であって親しみやすいようにみえるが，それを解くことは必ずしも容易ではない．それならばむしろ与えられた問題に直接取り組んだ方がよいのではないか．こういう考えから，変分法の**直接解法**というものが生れた．この考えが発展して，逆に与えられた微分方程式をある変分問題の Euler 方程式とみなし，この変分問題を直接解法で解くことによって，もとの微分方程式の解を求めることもできることになった．

直接解法は大体二つの違った目的に用いられている．一つは解の存在や一義性の証明という理論的な目的で，他は解の近似計算という実際的な目的である．しかしこの二つの側面が全く分離されることなく，同じ精神によって取り扱われるところに，その特質があると思われる．本書では直接解法を系統的に説明する余裕をもたないが，相反定理（§1. 10, §4. 7），Friedrichs 変換（§4. 8），およびこれに基く第6, 7 章の近似解法は，直接解法の一部をなすものである．

# 第 3 章　二次微積分式の変分

## §1　二次微積分式の極値問題

第1章で二次整式の極値問題が一般の場合の基礎であったように，変分法でも被積分函数が未知函数の二次式である場合が理論上も応用上も基本的である．このとき Euler 方程式は線型となり，固有値問題がこれと深い関係にある．例によって現われる函数は十分微分可能であるとする．

一変数 $x$ の未知函数 $u(x)$ が一つだけある二次微積分式は次の形をもつ．

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1}[p(x)u^2+2q(x)uu'+r(x)u'^2+2f(x)u+2g(x)u']dx. \qquad (1.1)$$

$u, u'$ に無関係な項は興味がないから省いてある．この汎函数に対する Euler 方程式は簡単な計算でわかるように

$$(ru')'+(q'-p)u+g'-f=0 \qquad (1.2)$$

で与えられ，$u$ についての二階線型微分方程式である．境界条件としては，固定端のときには端で $u$ の値が指定されるが，自由端のときには (2.11.2) によって

$$x=a_0, a_1 \text{ で } \qquad ru'+qu+g=0 \qquad (1.3)$$

という自然の境界条件が要求される．

上の問題が正則 (§2.6) であるためには，(2.6.1) によっていたるところ $r(x)\neq 0$ でなければならない．それで以下

$$r(x)>0 \qquad (a_0\leqq x\leqq a_1) \qquad (1.4)$$

を仮定する．

他の例として二変数 $x, y$ の函数 $u(x, y)$ に関する二次の微積分式

$$J[u]=\int\int_G[u_x{}^2+u_y{}^2+2f(x, y)u]\,dx\,dy \qquad (1.5)$$

を考えてみよう．相当する Euler 方程式は線型偏微分方程式

$$\nabla^2u=f \qquad (1.6)$$

となる．$\nabla^2$ は Laplace の演算子 ($\nabla^2u=u_{xx}+u_{yy}$) である．境界条件は固定縁ならば G の境界 $\Gamma$ の上で $u$ の値が指定されるし（これを偏微分方程式 (1.6) に関する**第一種の境界条件**という），自由縁ならば (2.11.10) によって

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \tag{1.7}$$

という自然の境界条件が課せられる(**第二種の同次境界条件**).

もっと一般に(*1.5*)に境界積分を含む項を加えて

$$J[u]=\iint_G(u_x^2+u_y^2+2fu)dx\,dy+\int_\Gamma[\rho(s)u^2+2\sigma(s)u]ds \tag{1.8}$$

のような汎函数を考えることができる. Euler 方程式は境界積分に影響されないで(部分的変分の原理, §2.11)やはり(*1.6*)で与えられる. 固定縁の場合には(*1.8*)の最後の項は定数となるから, 問題は少しも変らないが, 自由縁の場合には自然の境界条件が変ってくる. 変分(*2.9.3*)によって(*2.11.9*)には

$$-\int_\Gamma(2\rho\bar{u}+2\sigma)\eta\,ds$$

という項が加わるから, 結局自然の境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}-\rho u-\sigma=0 \tag{1.9}$$

となる(**第三種の境界条件**).

(*1.8*)の第二項に相当するものを(*1.1*)に対して考えると

$$\rho_0u_0^2+2\sigma_0u_0+\rho_1u_1^2+2\sigma_1u_1 \qquad (u_0=u(a_0),\ u=u(a_1)) \tag{1.10}$$

の形になる. これを(*1.1*)につけ加えておいて自由端の問題を考えると, 自然の境界条件は(*1.3*)の代りに

$$r_0u_0'+(q_0-\rho_0)u_0+g_0-\sigma_0=0,\quad r_1u_1'+(q_1+\rho_1)u_1+g_1+\sigma_1=0 \tag{1.11}$$

となる. ここで $u_0'=u'(a_0)$, $r_0=r(a_0)$ などとおいてある.

(*1.10*)は積分の形をとっていないが, 函数 $u(x)$ の汎函数であることに変りはない. ここに $u_0'$ のような項を加えない理由は, 考えている許される函数 $u(x)$ の汎函数としては, $u_0'$ などは特異にすぎるからである. 同様な理由によって(*1.8*)の第二項には $u$ の導函数を入れないのである.

問題 1〕 $u(a_0)=b_0$, $u(a_1)=b_1$ が指定されたときの(*1.1*)の停留値 $J(\bar{u})$ は

$$q_1b_1^2+r_1b_1\bar{u}_1'+b_1g_1-q_0b_0^2-r_0b_0\bar{u}_0'-b_0g_0+\int_{a_0}^{a_1}(f\bar{u}+g\bar{u}')dx$$

に等しいことを示せ($q_1=q(a_1)$ など).

問題 2〕 $$J[u]=\int_0^1x^2u'^2dx,\qquad u(0)=0,\ u(1)=1$$

は最小値をもたないことを示せ. $J$ の下限は何か? $x^2$ の代りに $x^k$ としたらどうか? 境界

条件を満足する停留曲線がみつかればそれはたしかに最小値を与えることに注意せよ.(何故か?)

問題 3〕
$$J[u]=\int(u_x{}^2-u_y{}^2)dx\,dy$$
の Euler 方程式を出せ．G の境界 Γ で勝手な境界値 $u(s)$ を指定すると停留函数は必ずしも存在しないことを示せ.

## §2　固有値問題

(*1. 1*) の二次同次の部分だけをとって

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1}[p(x)u^2+2q(x)uu'+r(x)u'^2]dx \tag{2.1}$$

とし，別に定まった函数 $\rho(x)>0$ をとって

$$K[u]=\int_{a_0}^{a_1}\rho(x)u^2dx=1 \tag{2.2}$$

という付帯条件をつけて，$J$ の最小(停留)値を求める問題を考える．これは等周問題(§2. 13)の一例であって，Euler 方程式は $J-\lambda K$ の Euler 方程式として

$$(ru')'+(q'-p+\lambda\rho)u=0 \tag{2.3}$$

で与えられる．さらに境界条件として，はじめから

$$u_0=u(a_0)=0,\quad u_1=u(a_1)=0 \tag{2.4}$$

を要求しておけば，(*2. 3*), (*2. 4*) によって一つの固有値問題が生ずる(1)．(*2. 4*) を満足する (*2. 3*) の解が存在するためには，$\lambda$ は勝手な値ではなく，ある特別の値でなければならない．これらの値が**固有値**で，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ で表わす．固有値は条件 (*2. 2*) に無関係に定まり，(*2. 2*) はただ**固有函数** $u(x)$ の大きさを正規化するのに役立つだけである．(*2. 3*) の形の問題を，Sturm-Liouville 型の固有値問題という(1).

固有値の分布の大体の模様はつぎの考察から知ることができる．(*1. 4*) によって $r(x)>0$ が仮定されているので，(*2. 3*) の解 $u(x)$ は $\lambda$ が大きければ速く振動し，$\lambda$ が十分小(代数的に)であれば振動しないグラフをもつ(2)．いま $\lambda$ をいろいろに変えて，(*2. 3*) の解で $u(a_0)=0$ を満足するものを考えてみると，$\lambda$ が十分小さいときには $u(x)$ のグラフは全く振動せず，$u(x)=0$ となる点

(1)　I, 623 頁以下，§A 2. 2, 2. 3
(2)　I, 295 頁以下参照.

(これを節(node)という)は $x=a_0$ 以外にはない．$\lambda$ が大きくなると最初の節が現われて，$\lambda$ が増すとともに左へ進む．この節がちょうど $a_1$ に一致する $\lambda$ の値 $\lambda_1$ が，最小の固有値に外ならない．さらに $\lambda$ が大きくなると第二の節が現われる．これが $a_1$ と一致する $\lambda$ の値 $\lambda_2$ が第二の固有値である．こうして固有値は

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots \tag{2.5}$$

のような数列を作り，$n\to\infty$ のとき $\lambda_n\to\infty$ となる．同時に $\lambda_n$ に属する固有函数 $u^{(n)}$ が区間 $(a_0, a_1)$ の内部にちょうど $(n-1)$ 個の節をもつことが知られる．

以上では固定端 (2.4) を考えたが，自由端の場合もほぼ同様である．このときには (1.10) の二次の項 $\rho_0 u_0{}^2+\rho_1 u_1{}^2$ を (2.1) につけ加えておくと一般的である．自然の境界条件は (1.11) によって

$$r_0 u_0'+(q_0-\rho_0)u_0=0, \quad r_1 u_1'+(q_1+\rho_1)u_1=0 \tag{2.6}$$

となる((2.2) は $u'$ を含まないから境界条件に $\lambda$ は入ってこない)．このときにも固有値 $\lambda_n$，固有函数 $u^{(n)}$ の列が存在する．

上では暗に係数 $r(x)$ などが十分に連続性をもっているものと仮定している．特に (1.4) によって $r(x)$ は閉じた区間 $[a_0, a_1]$ で正の下限をもつ ($r(x)\geqq\delta>0$)．このような条件が満たされないときには，上にのべた固有値の性質には適当な修正が必要である．

二次元の問題 (1.5)，あるいは (1.8) に対しても同じような等周問題を考えることができる．最も簡単な例は

$$K[u]=\iint_G \rho(x, y)u^2 dx\, dy=1 \qquad (\rho>0) \tag{2.7}$$

という付帯条件の下に

$$J[u]=\iint_G (u_x{}^2+u_y{}^2)dx\, dy \tag{2.8}$$

を最小(停留)にするという問題である．これは

$$\nabla^2 u+\lambda\rho u=0 \tag{2.9}$$

という Euler 方程式へ導く．もし

$$\Gamma \text{ で } \qquad u=0 \tag{2.10}$$

という境界条件を加えておけば，(2.9) は固有値問題になる．$\rho(x, y)>0$ であ

ればやはりある特別な $\lambda$ の値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ だけが固有値となる．ただし今度も $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$ であるが，$\{\lambda_i\}$ の中に等しいものがあり得る(**縮重固有値**)．

## §3　固有函数の直交性と完備性

前節で論じた問題(2.1),(2.2)において，二つの函数 $u(x), v(x)$ の**内積**を

$$(u, v) = \int_{a_0}^{a_1} u(x)v(x)dx \tag{3.1}$$

と書き，また**演算子** $A, B$ を

$$\left.\begin{aligned} Au &= -(ru')' + (p-q')u, \\ Bu &= \rho u \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

で定義すれば，$A, B$ は**対称**である．すなわち

$$(Au, v) = (u, Av), \quad (Bu, v) = (u, Bv) \tag{3.3}$$

が成り立つ．ただし $A$ は境界条件(2.4)を満足する函数だけに働かせるものと約束する．すると(3.3)の第一式は部分積分によって直ちにえられる．さらに

$$(u, Au) = J[u], \quad (u, Bu) = K[u] \tag{3.4}$$

となるから，考えている問題は $(u, Bu) = 1$ という条件の下に $(u, Au)$ を停留にすることに帰着し，§1.5の問題と形式的には全く同じである．実際 Euler 方程式(2.3)は

$$Au = \lambda Bu \tag{3.5}$$

と書くことができ，(1.5.6)と全く同じ形をもつ．

§1.6にのべた固有函数の直交性(1.6.2)も全く同じ形で成立する．これは

$$Au^{(i)} = \lambda_i Bu^{(i)}, \quad Au^{(k)} = \lambda_k Bu^{(k)} \tag{3.6}$$

であるから，$A, B$ の対称性を用いて

$$\begin{aligned} \lambda_k(u^{(i)}, Bu^{(k)}) &= (u^{(i)}, Au^{(k)}) = (Au^{(i)}, u^{(k)}) = \lambda_i(Bu^{(i)}, u^{(k)}) \\ &= \lambda_i(u^{(i)}, Bu^{(k)}) \end{aligned}$$

となるからである．このように，微分方程式に関する固有値問題も，代数方程式の場合と本質的な点では違わないのである．

§1.6と違うところは固有値の数が無数にあることである．しかし相当する無数の固有函数 $\{u^{(i)}(x)\}$ を用いると，"勝手な"函数 $u(x)$ を次のように展開することができる：

$$u(x)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i u^{(i)}(x), \quad \xi_i=(u^{(i)}, Bu). \tag{3.7}$$

この展開はちょうどベクトルの展開 (*1.6.3*) に相当し，展開係数 $\xi_i$ は (*1.6.4*) と全く同じ式で与えられる．これに対し

$$K[u]=(u, Bu)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2, \quad J[u]=(u, Au)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\xi_i^2 \tag{3.8}$$

が成立することも §1.6 と同様である．実は (*3.7*) の右辺の無限級数はいつでもふつうの意味で収束するとはかぎらない（それで $\sim$ という記号を用いた）のであるが，とにかく (*3.7*) で定めた係数に対して (*3.8*) は成立する．これを **Parseval の式**とよび，これが成り立つことを直交系 $\{u^{(i)}\}$ は**完備**あるいは**完全**であるといい表わす（なお A §2.3 参照）．

(*3.8*) が成立すると §1.6 でのべた結果はすべてそのまま成立する．したがって固有値 $\lambda_i$ はすべて付帯条件 $K[u]=1$ の下で $J[u]$ の停留値であって，その型数は $i-1$ に等しい．特に $\lambda_1$ は最小値である．また $K[u]=1$ のほかに $i-1$ 個の一次束縛を加えたときの $J[u]$ の最小値の最大値は $\lambda_i$ に等しい．

§1.6 で考えた次元数 $n$ に相当するものはここでは $\infty$ であって，最大の固有値は存在しない．故に $J[u]$ には最小値はあるが最大値はない．このように大小に関して $J$ の性質が違うのは，$r(x)>0$, $\rho(x)>0$ という仮定による．

問題 (*2.7*), (*2.8*) のときにも事情はほぼ同じである．今度は

$$(u, v)=\int\int_G u(x, y)v(x, y)dx\,dy, \tag{3.9}$$

$$Au=-\nabla^2 u, \quad Bu=\rho u \tag{3.10}$$

によって内積 ( , ) および演算子 $A, B$ を定義すればよい．ただし $A$ を作用させるべき函数 $u$ は境界条件 (*2.10*) を満足するものとする．すると形式的には同じ結果 (*3.3*)～(*3.8*) が成り立つ．ただし今度は固有値の中に相等しいものがあり得るから，相当する固有函数は直交するように定めておく．

## §4 正値二次形式

前節で考えた固有値問題で，$\lambda_1>0$ であればすべての固有値が正であり，その逆も正しい．このとき (*3.8*) によって一般に $J[u]\geqq 0$ で，$J[u]=0$ となるのはすべての $\xi_i=0$ したがって $u=0$ のときにかぎる．故に $\lambda_1>0$ であれば $J[u]$ は（狭義）正値であり，その逆も成り立つ．

実は $J[u]$ が正値という条件は $J$ だけの性質であって $K$ には無関係であるから，$J$ と $K$ とに関係する固有値 $\lambda_1$ を用いていい表わすことは必ずしも適当でない．実際 $\lambda_1$ を用いないでこの条件をいい表わすこともできる．§2 で述べたところから明らかであるように，$\lambda_1>0$ であるためには，(2.3) において $\lambda=0$ とおいた式の解 $u(x)$ で $u(a_0)=0$ を満足するものが，$a_0<x\leqq a_1$ に節をもたないことが，必要でありまた十分である．常微分方程式の解は初期条件によって連続的[(1)]に変るから，$u(a_0)=0$ の代りに，十分小さい $\varepsilon>0$ をとって $u(a_0-\varepsilon)=0$ のような解を考えると，これは $a_0\leqq x\leqq a_1$ で決して 0 にならないはずである．したがって次の定理がえられた：$u(a_0)=u(a_1)=0$ であるような勝手な $u(x)\not\equiv 0$ に対してつねに

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1}[p(x)u^2+2q(x)uu'+r(x)u'^2]dx>0 \tag{4.1}$$

であるための必要かつ十分な条件は，微分方程式

$$(ru')'+(q'-p)u=0 \tag{4.2}$$

の解で，閉区間 $[a_0, a_1]$ で決して 0 にならないものがあることである．この条件は全く $\rho(x)$ に関係しない．

上では固有値問題の理論を用いてこの定理を導いたが，条件が十分であることは直接簡単に証明できる．それには (4.2) の解で 0 にならないものを $v(x)$ とすると

$$p=q'+\frac{1}{v}(rv')' \tag{4.3}$$

であるから，これを (4.1) に代入すると，被積分函数は

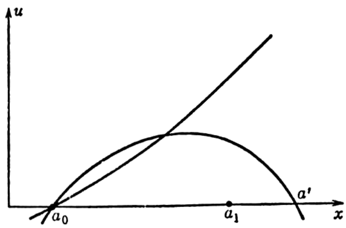
$$\begin{aligned} &q'u^2+\frac{1}{v}(rv')'u^2+2quu'+ru'^2\\ &=\frac{d}{dx}\left(qu^2+\frac{1}{v}rv'u^2\right)-rv'\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{v}\right)+ru'^2\\ &=\frac{d}{dx}\left[\left(q+\frac{1}{v}rv'\right)u^2\right]+r\left(u'-\frac{u}{v}v'\right)^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．最初の項は積分すれば 0 になり，残りは負でない．到るところ $u'=(u/v)v'$ となるのは $u/v=$ 定数 のときにかぎるが，$u$ は区間の端で 0 になり，

(1)　例えば 福原満洲雄，常微分方程式（岩波全書）参照．

$v$ は決して 0 にならないから，$u \neq 0$ ならばそういうことは不可能である．よって $J[u]>0\,(u \neq 0)$ が証明された．

上の条件をいい表わすのに**共役点** (conjugate point) という概念を用いると便利である．定点 $x_0$ を指定したとき微分方程式 (*4.2*) の解で $u(x_0)=0$ を満足するものは定数因子を除いて定まる．この解の零点で $x_0$ の右隣りにあるもの，すなわち $x_1>x_0$ で最初に $u(x_1)=0$ となる点を，微分方程式 (*4.2*) に関する $x_0$ の共役点という．したがって (*4.1*) が成立するためには，(*4.2*) に関する $a_0$ の共役点 $a'$ がないか，あっても $a_1$ より大きいことが必要かつ十分である (第 4.1 図).



第 4.1 図

二次形式 (*2.8*) はつねに正値である．これはその形から明らかであろう．したがって (*2.9*) の固有値 $\lambda_n$ はすべて正である．

例題〕 $u(0)=u(1)=0$ ならば

$$\int_0^1 u'^2 dx \geqq \pi^2 \int_0^1 u^2 dx \tag{4.5}$$

であることを示そう．$\varepsilon>0$ として

$$J[u]=\int_0^1\left[u'^2-\frac{\pi^2}{(1+2\varepsilon)^2}u^2\right]dx \tag{4.6}$$

とおくと，$p=-\pi^2(1+2\varepsilon)^{-2}$, $q=0$, $r=1$ であるから，微分方程式 (*4.2*) の解として

$$v(x)=\sin\frac{\pi}{1+2\varepsilon}(x+\varepsilon)$$

をとれば，これは $[0,1]$ で決して 0 にならない．よって $u \neq 0$ なら $J[u]>0$ である．ここで $\varepsilon\to 0$ とすれば (*4.5*) となる．なお (*4.5*) で $u=c\sin\pi x$ とすれば等号が成り立つ．

問題〕 (*4.4*) で用いた $v$ は (*4.2*) の解であったが，勝手な函数 $v(x) \neq 0$ に対して，おなじ $J[u]$ が

$$J[u]\geqq\int\left[-\frac{(rv')'}{v}+p-q'\right]u^2dx$$

を満足することを示せ．

## §5 極小問題

§1 では二次微積分式 (*1.1*) の停留条件として Euler 方程式を求めただけであるが，この停留値が極小値 (或は最小値) であるための条件を求めてみよう．ただしさしあたり Euler 方程式 (*1.2*) と境界条件とを満足する函数 $u=\overline{u}(x)$

が存在すると仮定する．

$$u=\overline{u}(x)+\varepsilon\eta(x) \tag{5.1}$$

とおいて (*1.1*) に代入すると，$\varepsilon$ の一次の項は $\overline{u}$ の満足する Euler 方程式と境界条件とによって0となり

$$J[u]-J[\overline{u}]=\varepsilon^2\int_{a_0}^{a_1}(p\eta^2+2q\eta\eta'+r\eta'^2)dx \tag{5.2}$$

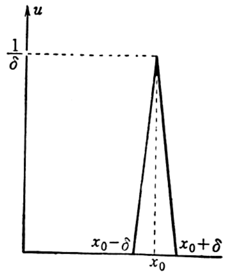
となる．因子 $\varepsilon^2$ を除けば右辺は (*4.1*) と同じ形をもつ．いま固定端の場合を考えることにすると，変分 $\eta(x)$ は $x=a_0, a_1$ で0である．$J[\overline{u}]$ が強極小であるためには $\eta\not\equiv 0$ のとき (*5.2*) がつねに正であることが必要かつ十分であるが，それには前節の定理によって，微分方程式 (*4.2*) に関する点 $a_0$ の共役点が $a_1$ より大きいことが必要かつ十分である．実はこの問題では $\varepsilon$ が小さい必要はないから，このとき $J[\overline{u}]$ は**狭義強極小値**であると同時に**狭義最小値**である．

上では境界値問題の解 $\overline{u}$ の存在を仮定したが，実は上の条件が満足されていれば $\overline{u}$ が存在する．なぜなら (*4.2*) の解で $u_0(a_0)=0$ を満足するものと，$u_1(a_1)=0$ を満足するものとは互に一次独立である (すなわち $u_0(a_1)\neq 0$, $u_1(a_0)\neq 0$) から，(*1.2*) の一般解

$$u=(\text{特解})+c_0u_0(x)+c_1u_1(x)$$

において $c_0, c_1$ を適当にえらんで $u(a_0)$, $u(a_1)$ に勝手な値をとらせることができるのである．

われわれは問題の正則性を要求したので，はじめから (*1.4*) のように $r(x)>0$ を仮定したが，$J[u]$ が極小値をもつためにはこれは“ほとんど”必要である．もしある点 $x_0$ で $r(x_0)<0$ となったとすると，$x_0$ のある近傍で $r(x)<0$ である．そこで第5.1図のように $x_0$ の近所でだけ0でない函数をえらぶと，$\delta\to 0$ のとき (*5.2*) の右辺の第三項が絶対値において他の二項に比べて大きくなり，$J[u]<J[\overline{u}]$ となるからである．



第 5.1 図

汎函数 (*1.5*) に対しては，境界値問題の解を $\overline{u}(x,y)$ として

$$u=\overline{u}(x,y)+\varepsilon\eta(x,y) \tag{5.3}$$

とおけば

$$J[u]-J[\overline{u}]=\varepsilon^2\int\int_G(\eta_x{}^2+\eta_y{}^2)dx\,dy \tag{5.4}$$

となるから，明らかに $J[u]>J[\overline{u}]$ となって，$J[\overline{u}]$ は $J$ の狭義最小値である．このときにも函数 $f(x,y)$ と領域 G とに関する適当な条件の下で，解 $\overline{u}$ の存在を証明することができるが，この証明は常微分方程式のときのように簡単ではない．この証明にあたって，問題を純粋に偏微分方程式の境界値問題として取り扱う方法と，直接に変分法の問題に即して取り扱う方法（直接法，§2.14）とがある．

# 第 4 章　極小の条件

## §1　第二変分. Legendre の条件

第2章では汎函数の停留性だけに注目して，停留値が実際に極小あるいは最小であるかどうかを問題にしなかった．第3章の結果を用いてこの章でこれらの問題を論ずる．応用上の便宜を考えて，極小または最小のおこる十分条件に重きをおく．

再び (*2. 1. 3*) の汎函数に対する固定端の変分問題を考える．Euler 方程式を導くときには，変分 (*2. 2. 3*) を代入して $(\partial J/\partial \varepsilon)_{\varepsilon=0}=0$ とおいたが，一般に $\varepsilon$ の函数 $J[u_\varepsilon]$ に Taylor の定理を適用すると

$$J[u_\varepsilon]-J[\overline{u}]=\varepsilon\left(\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=\theta} \tag{1.1}$$

となる．$\theta$ は 0 と $\varepsilon$ との間の実数である．

(*1. 1*) の右辺第一項は $J$ の第一変分であり，これが 0 になることが停留性の条件に外ならない．第二項（あるいはそこで $\theta=0$ としたもの）を**第二変分**という．$J[\overline{u}]$ が $J$ の狭義極小値であるためには，十分小さい $|\varepsilon|$ に対して $\left(\dfrac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=\theta}>0$ であることが必要かつ十分である．$J[u]$ に (*2. 1. 3*) を代入してこの条件をかき表わすと

$$\int_{a_0}^{a_1}[(\overline{F}_{uu})_\theta\eta^2+2(\overline{F}_{uu'})_\theta\eta\eta'+(\overline{F}_{u'u'})_\theta\eta'^2]dx>0 \tag{1.2}$$

となる．$(\overline{F}_{uu})_\theta$ などの意味は

$$(\overline{F}_{uu})_\theta=F_{uu}(x,\overline{u}(x)+\theta\eta(x),\overline{u}'(x)+\theta\eta'(x)) \tag{1.3}$$

である．ここで $\theta$ は $\varepsilon$ の函数であるが，$\theta$ と $\varepsilon$ との関係ははじめから与えられているのではなく，一般にきわめて複雑であるから，(*1. 2*) は必要条件としてはあまり役に立たない．しかし $\varepsilon\to 0$ のときには $\theta\to 0$ であるから，(*1. 2*) に対して

$$\int_{a_0}^{a_1}(\overline{F}_{uu}\eta^2+2\overline{F}_{uu'}\eta\eta'+\overline{F}_{u'u'}\eta'^2)dx>0 \tag{1.4}$$

という条件が考えられる．$\overline{F}_{uu}$ などは (*1. 3*) で $\theta=0$ とおいたものである (§2. 2).

(*1.4*) の左辺は $\eta$ に関する二次微積分形式で (*3.5.2*) と同じ形をもっている. これが正値形式であるためには, §3.5 で注意したように, まず

$$\overline{F}_{u'u'}>0 \tag{1.5}$$

であることがほとんど必要である. 実は, われわれは主に正則な問題だけを論ずるという主旨であるから (§2.6), (*1.5*) は本質的に新らしい仮定ではない. (*1.5*) を **Legendre の条件**という.

例題〕 §2.6 で注意したように, §2.3 の諸例では Legendre の条件はつねに満足されている.

## §2 Jacobi の条件. 弱極小の十分条件

Legendre の条件だけでは (*1.4*) の条件が成り立つのに十分ではない. さらに §3.4 および §3.5 で述べた正値性の条件が成り立たねばならない. すなわち, (*1.4*) の二次形式に関する最小の固有値 $\lambda_1$ が正でなければならない. 別の表わし方をすれば, $v$ に関する線型微分方程式

$$(\overline{F}_{u'u'}v')'+\left(\frac{d}{dx}\overline{F}_{uu'}-\overline{F}_{uu}\right)v=0 \tag{2.1}$$

に関して, $x=a_0$ の共役点 $a'$ が $a_1$ より大きいことが要求される. これを **Jacobi の条件**といい, (*2.1*) を **Jacobi の微分方程式**という.

Legendre, Jacobi の条件は特定の停留函数 $\overline{u}(x)$ に関係する. $\overline{F}_{u'u'}$ などは $F_{u'u'}(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$ で与えられるからである. これらの条件が満足されることは, (*1.4*) が成り立つことと同等である. (*1.4*) は真の極小条件 (*1.2*) とすこし違っているが, (*1.4*) が成立していれば, 十分小さい $\varepsilon$ (したがって十分小さい $\theta$) に対して (*1.2*) も成立する. これは $\eta(x)$ をきめておいて $|\varepsilon|$ を小さくするときに正しいばかりでなく, 変分 $\varepsilon\eta(x)$ をひとまとめにして, $|\varepsilon\eta(x)|$ および $|\varepsilon\eta'(x)|$ が十分小さくさえあれば, $\varepsilon\eta(x)$ が何であっても成立する. このことは $F_{u'u'}$ などが連続函数であり, また (*2.1*) のような微分方程式に関する定点 $a_0$ の共役点は, その係数に連続的に依存することを考えれば明らかであろう. あるいは固有値 $\lambda_1$ が係数とともに連続的に変ることを用いてもよい.

故に Legendre の条件と Jacobi の条件とがともに成り立つことは, $J[\overline{u}]$ が狭義の**弱極小**であるための十分条件である. ただし Euler 方程式を満足する $u=\overline{u}(x)$ の存在は仮定している.

これらの条件は極小のためにはほとんど必要でもある．すなわち少なくとも

$$\overline{F}_{u'u'} \geqq 0, \quad a' \geqq a_1 \tag{2.2}$$

が必要である．もしある点 $x_0$ で $\overline{F}_{u'u'}<0$ ならば，連続性によって十分小さい $|\theta|$ に対して，$x=x_0$ で $(\overline{F}_{u'u'})_\theta<0$ となり，§3.5 にのべたところによって (1.2) はつねには成立しない．また $a'<a_1$ であれば，十分小さい $|\theta|$ に対し，(1.2) に対しても共役点は $a_1$ よりも左にあることになり，やはり (1.2) は成立しなくなるのである．

上の条件は強極小の十分条件とはならない．強極小であるためには，$|\varepsilon\eta(x)|$ は小さくても $|\varepsilon\eta'(x)|$ の方は必ずしも小さくない変分に対して (1.2) の成り立つことが要求されるが，これに対して (1.4) はもはや (1.2) の近似とはなり得ないので，何の結論を与えることもできないのである．

## §3　共役点の幾何学的意味

Jacobi の条件は $v$ に関する二階線型微分方程式 (2.1) に関係する．(2.1) の一般解が求められれば Jacobi の条件が満足されているかどうか判定できるであろう．ところが Euler 微分方程式 (2.2.7) の解で

$$u=u(x,\alpha) \tag{3.1}$$

のように一つの任意定数 $\alpha$ を含むものがあって，$\alpha$ のある値 $\bar{\alpha}$ に対して $u(x,\bar{\alpha})=\bar{u}(x)$ となっていれば，

$$v=u_\alpha(x,\bar{\alpha}) \tag{3.2}$$

は Jacobi の微分方程式の解になる．すなわち微分演算だけで Jacobi の方程式の解が求められる．

これをみるには (3.1) を Euler 方程式 (2.2.7) に代入すれば恒等式となるから，これを $\alpha$ について微分する．$x$ と $\alpha$ とに関する微分の順序を交換してよいことに注意すると

$$F_{uu}u_\alpha+F_{uu'}u_\alpha'-\frac{d}{dx}(F_{u'u}u_\alpha+F_{u'u'}u_\alpha')=0$$

となり，かきかえて

$$\left(F_{uu}-\frac{d}{dx}F_{u'u}\right)u_\alpha-\frac{d}{dx}(F_{u'u'}u_\alpha')=0$$

を得て，$\alpha=\bar{\alpha}$ とすれば $v=u_\alpha$ は (2.1) の解になる．

もし $(3.1)$ の代りに二つの任意定数 $\alpha, \beta$ を含む Euler 方程式の解 $u=u(x,\alpha,\beta)$ があって，$u(x,\bar{\alpha},\bar{\beta})=\bar{u}(x)$ であるならば，$v=u_\alpha(x,\bar{\alpha},\bar{\beta})$ および $v=u_\beta(x,\bar{\alpha},\bar{\beta})$ が Jacobi 方程式の二つの解を与える．これらは一般に一次独立であることが証明される．

われわれの目的に対しては $(3.1)$ として，与えられた点 $(a_0,b_0)$ を通る停留曲線の全体をとるのが都合がよい．パラメタ $\alpha$ としては，たとえば $u'(a_0)$ の値をとればよい．$u(a_0,\alpha)=b_0$ であるから $(3.2)$ によって $v(a_0)=0$ となり $a_0$ の共役点 $a'$ は $a_0$ の右隣りの $v(x)$ の零点として定められる．

$\bar{u}(a')=b'$ とすると，結局 $a', b'$ は

$$u(a',\bar{\alpha})=b', \quad u_\alpha(a',\bar{\alpha})=0 \quad (=v(a')) \tag{3.3}$$

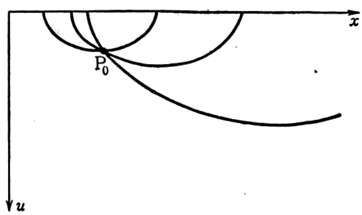
によって決定される．これは $(a',b')$ を座標とする点 $\mathrm{P}'$ が曲線群 $u=u(x,\alpha)$ の包絡線[(1)]の上にあり，この包絡線と停留曲線 $u=\bar{u}(x)=u(x,\bar{\alpha})$ との接点に一致することを示す．$\mathrm{P}'$ を停留曲線 $u=\bar{u}(x)$ の上の $\mathrm{P}_0(a_0,b_0)$ の**共役点**と呼ぶ．このように共役点は簡単な幾何学的意味をもつ．曲線 $u=\bar{u}(x)$ の上で点 $\mathrm{P}_0$ と $\mathrm{P}_1$ との間（$\mathrm{P}_1$ を含めて）に $\mathrm{P}_0$ の共役点 $\mathrm{P}'$ がなければ，Jacobi の条件が満足されているわけである．

問題 1〕 $(2.1.3)$ の停留函数で二つのパラメタを含むもの $u=u(x,\alpha,\beta)$ がえられたとき，定点 $\mathrm{P}_0(a_0,b_0)$ を通る停留曲線の包絡線は

$$u(x,\alpha,\beta)=u, \quad u(a_0,\alpha,\beta)=b_0, \quad u_\alpha(a_0)u_\beta(x)-u_\beta(a_0)u_\alpha(x)=0$$

から $\alpha,\beta$ を消去すれば求められることを示し，§2.3の諸例にこれを適用せよ．

例題 1〕 §2.3, 例題2では定点 $\mathrm{P}_0=(0,0)$ を通る停留曲線群（サイクロイド）はたがいに交わることなく，包絡線をもたない．故に共役点は存在せず，Jacobi の条件はつねに満足されている．（これは始点 $\mathrm{P}_0$ が $(0,0)$ でなくてもおなじである（第3.1図).）故に停留曲線は必ず弱極小を与える．実はこれは強極小でもあり，また最小でもある（§5).



第 3.1 図

例題 2〕 §2.3, 例題3では，$\mathrm{P}_0(a_0,b_0)$ を通る停留曲線群は包絡線 $(2.3.12)$ をもつ．$\mathrm{P}_1(a_1,b_1)$ がこの包絡線の下側にあれば $\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1$ を通る停留曲線は二つある（第2.3.2図)．その一つ II は $\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1$ の間で包絡線に接するが，他の曲線 I は接しない．前者では $\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1$ の間に $\mathrm{P}_0$ の共役点 $\mathrm{P}'$ があるから Jacobi の条件は満足されない．したがってこのよう

(1) 特別の場合には包絡線が退化して一点になることもある．

な停留曲線は極小曲線にはならない．後の場合には Jacobi の条件は満足されている．このとき $J[\bar{u}]$ は弱極小であるが，実は強極小でもある (§5).

例題 3〕 §2.3, 例題4でも事情は前例と同様である．詳細は読者の演習に供する．

問題 2〕 例題2で $P_0(a_0, b_0)$ と $P_1(a_1, b_1)$ とを通る二つの停留曲線の上の，$P_0$ の共役点の座標を求めよ．

問題 3〕 同じ問題で定点 $P_0$ を通る勝手な停留曲線 C の上の $P_0$ の共役点を $P'$ とすると，$P_0$ と $P'$ とで C にひいた接線は $x$ 軸の上で交わることを示し，これを用いて $P'$ を求める作図法を工夫せよ．

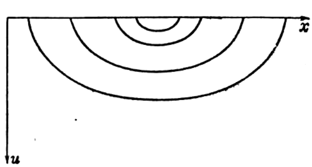
問題 4〕 前題と全く同じことが例題3に対しても成り立つ．もっと一般に §2.3, 問題5の場合にも成り立つ．これを証明せよ．

## §4　停留曲線の場と Hilbert の不変積分

強極小の十分条件を与えるためには，停留曲線の**場** (field) という概念がいる．パラメタ $\alpha$ を含む停留曲線の群 (*3.1*) があって，函数 $u=u(x,\alpha)$ は十分微分可能であり，しかも $x, u$ 面のある領域の各点を通ってこの群に属する曲線が一つあってただ一つにかぎるとき，この停留曲線群はこの領域で場を作るという．$\alpha$ に特定の値 $\bar{\alpha}$ を与えてえられる停留曲線 $u=u(x,\bar{\alpha})$ はこの場に**埋められる**ということにする．

$x$ のある範囲で $u_\alpha(x,\bar{\alpha})\neq 0$ であれば，$|\alpha-\bar{\alpha})|$ が十分小さいような $\alpha$ に対して，(*3.1*) の全体は一つの場を作り，$u=u(x,\bar{\alpha})$ はこの場に埋められる．これは陰函数の定理によって容易に証明できる．この結果を用いると，与えられた停留曲線 $u=\bar{u}(x)$ において，点 $a_0$ の共役点 $a'$ が $a_1$ より大きければ，区間 $[a_0, a_1]$ の範囲で曲線 $u=\bar{u}(x)$ は一つの場に埋められることがわかる．

例題 1〕 Brachistochrone の問題 (§2.3, 例題2) において，たとえば鉛直軸に平行な定直線上に頂点をもつような停留曲線（サイクロイド）の全体は場を作る（第4.1図）．全半平面はこの場でおおわれる．勝手な停留曲線が与えられたとき，これを埋めるように上の場をとることができることは明らかである．



第 4.1 図

第3.1図のように定点 $P_0$ を通る停留曲線の全体も場を作るが，点 $P_0$ はこの場の特異点である．

例題 2〕 放物体の問題 (§2.3, 例題3) では，与えられた停留曲線の弧が包絡線に接していると，これを埋めるような場を作ることはできない．包絡線に接しなければこれができる．このように一つの停留曲線でも，その短い部分は場に埋めることができても，ある程度以上に長くなるとそれができなくなることが多い．極小曲面の問題 (§2.3, 例

題 4) でも同様な事情がある.

$(x, u)$ 平面のある領域 D が一つの停留曲線の場でおおわれているとする. 点 $(x, u)$ を通って, この場に属する停留曲線 $u = u(x, \alpha)$ が定まるから, その勾配 $u' = u_x(x, \alpha)$ も決定する. これを $x, u$ の函数として

$$v = v(x, u) \tag{4.1}$$

と書くと, 仮定によって $v$ は十分微分可能な函数である. $v$ を考えている場の**勾配函数** (slope function) とよぶ.

問題 5〕 第 3.1 図の場の勾配函数を計算せよ. ($\theta$ を媒介変数として表わせ.)

いま D の中に二点 $P_0(a_0, b_0)$, $P_1(a_1, b_1)$ をとり, これを D 内で結ぶ曲線

$$u = u(x) \tag{4.2}$$

をとって, 積分

$$W = W[u] = \int_{a_0}^{a_1} [F(x, u, v) + (u' - v) F_{u'}(x, u, v)]\, dx \tag{4.3}$$

を作る. ここで $u' = du(x)/dx$ であり, $v$ には (4.1) を代入した上 $u = u(x)$ とおくものとする.

(4.3) を **Hilbert の不変積分**という. この積分の値は実は二点 $P_0, P_1$ だけで定まり, これらを結ぶ曲線 (4.2) によらないことを示そう. (4.3) の被積分函数は $u'$ に関して一次式であるから, 退化した変分問題に属する (§2.7). (2.7.1) において

$$\left.\begin{aligned} M &= F(x, u, v(x, u)) - v(x, u) F_{u'}(x, u, v(x, u)), \\ N &= F_{u'}(x, u, v(x, u)) \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

であるが,

$$\begin{aligned} M_u - N_x &= (F_u + F_{u'} v_u - v_u F_{u'} - v F_{u'u} - v F_{u'u'} v_u) - (F_{u'x} + F_{u'u'} v_x) \\ &= F_u - F_{u'x} - v F_{u'u} - (v_x + v v_u) F_{u'u'} \end{aligned} \tag{4.5}$$

はちょうど 0 になる. 何故なら (4.1) は停留曲線の勾配であるから, Euler 方程式 (2.2.10) によって

$$F_u - F_{u'x} - v F_{u'u} - \frac{dv}{dx} F_{u'u'} = 0 \tag{4.6}$$

であり, また $dv/dx = v_x + v_u v$ が成り立っているからである. したがって §2.7 の結果により $W$ は積分路によらない.

## §5　Weierstrass の $E$ 函数．極小の十分条件

Hilbert の不変積分を用いると，$J[u]-J[\overline{u}]$ の値を積分の形に表わすことができる．前節で示したように (4.3) の値は曲線 (4.2) の両端 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ だけで定まるから，いま $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ として場に埋まっている一つの停留曲線 $u=\overline{u}(x)$ の上の二点をとると，この停留曲線に沿って (4.3) を計算しても，$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ を結ぶ勝手な曲線 (4.2) に沿って計算しても，結果は変らない．ところが停留曲線 $u=\overline{u}(x)$ に沿っては $v=\overline{u}'(x)$ であるから，

$$\int_{a_0}^{a_1} F(x, \overline{u}, \overline{u}')dx = \int_{a_0}^{a_1} [F(x, u, v)+(u'-v)F_{u'}(x, u, v)]dx \tag{5.1}$$

を得る．これより

$$J[u]-J[\overline{u}] = \int_{a_0}^{a_1} E(x, u; v, u')dx, \tag{5.2}$$

$$E(x, u; v, u') = F(x, u, u')-F(x, u, v)-(u'-v)F_{u'}(x, u, v) \tag{5.3}$$

という表式がえられる．$E(x, u; v, u')$ を **Weierstrass の $\boldsymbol{E}$ 函数**という．$u'=v$ なら明らかに $E=0$ である．

(5.2) は $u=u(x)$ が許される曲線 (§2.4) で，場でおおわれた領域 D の中に入っていさえすれば成り立ち，$u'(x)$ が $\overline{u}'(x)$ に近いという制限をうけないから，$J[\overline{u}]$ が強極小であるかどうかを調べるのに都合がよい．もし $x, u, u'$ を独立変数と考えるとき，

$$E(x, u; v(x, u), u')>0 \tag{5.4}$$

が $u' \neq v(x, u)$ ならつねに成立する場合には，(5.2) によって，$u(x) \neq \overline{u}(x)$ なら $J[u]>J[\overline{u}]$ となるから，$J[\overline{u}]$ はたしかに狭義の強極小値となる．故に停留曲線の場が作られるという仮定の下では，(5.4) は強極小の十分条件である．

(5.3) に Taylor の定理を適用すると

$$E(x, u; v, u') = \frac{1}{2}(u'-v)^2 F_{u'u'}(x, u, w) \tag{5.5}$$

となる．$w$ は $v$ と $u'$ との間にある数である．したがって $x, u, u'$ を独立変数としてつねに

$$F_{u'u'}>0 \tag{5.6}$$

であれば (5.4) が成立し，$J[\overline{u}]$ は狭義強極小値となる．すなわち（同じく場の存在の仮定の下に），(5.6) は強極小の十分条件である．

われわれは主に正則な問題を取り扱っているから $F_{u'u'} \neq 0$ と仮定している (*2.6.1*). 故に $F_{u'u'}>0$ か $F_{u'u'}<0$ かの一方を仮定していることになり, (*5.6*) は本質的に新らしい仮定ではない. ちなみに (*5.6*) は Legendre の条件 (*1.5*) と同じではないことに注意しておく. Legendre の条件は $F_{u'u'}$ において $u=\bar{u}(x)$, $u'=\bar{u}'(x)$ を代入したものが正であることであるが, (*5.6*) は $x, u, u'$ を独立変数として成立することを意味し, はるかに強い条件である.

なお (*5.6*) で不等号 $>0$ の代りに $\geqq 0$ が成立するときには, 狭義極小の代りに一般に広義極小となるであろう.

例題 1〕 Brachistochrone (§2.3, 例題 2). たびたび注意したように条件 (*5.6*) は満足されており, また勝手な停留曲線は場に埋めることができる (§4, 例題 1). 故に停留曲線はつねに狭義の強極小を与える. しかも全半平面 $u>0$ が場でおおわれるから, この強極小は狭義最小でもある. これで Brachistochrone の問題は一応解決されたとみてよい.

例題 2〕 放物体の問題 (§2.3, 例題 3). やはり (*5.6*) は満足されているから, 停留曲線は場に埋められるかぎり, したがって包絡線に接しないかぎり (§4, 例題 2), 狭義の強極小を与える. $P_1$ が包絡線の下側にあれば, $P_0, P_1$ を結ぶ停留曲線は二つあったが (§3, 例題 2, 第 2.3.2 図), そのうち包絡線に接しない方 I はたしかに極小曲線であることがこれでわかった. しかし極小は最小を意味するわけではないことに注意する必要がある.

実際に極小値 $J[\bar{u}]$ を計算してみよう. 一般に §2.3, 例題 1 において, $u=\bar{u}$ に対して $(1+u'^2)^{1/2}=c^{-1}f(u)$ であるから

$$J[\bar{u}]=c^{-1}\int_{a_0}^{a_1} f(\bar{u})^2 dx \tag{5.7}$$

である.

いまは $f(u)=u^{1/2}$ であるから, (*2.3.9*) に注意して,

$$\begin{aligned} J[\bar{u}] &= c^{-1}\int_{a_0}^{a_1} u\,dx \\ &= (a_1-a_0)\left\{\frac{1}{12c^3}[3\xi^2-3(a_0+a_1)\xi+(a_0{}^2+a_0a_1+a_1{}^2)]+c\right\} \end{aligned} \tag{5.8}$$

を得る. ここに (*2.3.13*) を代入して $\xi, c$ を消去すれば, $J[\bar{u}]$ が $a_0, b_0, a_1, b_1$ で表わされる. 結果は $a_1>a_0$ ならば

$$J[\bar{u}]=\frac{2}{3}(b_0+b_1\pm 2d)^{1/2}(b_0+b_1\mp d) \tag{5.9}$$

となる. (計算は読者に委す. $a_1<a_0$ なら符号が変る.) §2.3 でのべたように上号が曲線 II に相当する. 下号をとった方が $J[\bar{u}]$ の値は小さい. これは $J[\bar{u}]$ が極小値であることからすぐにいえることではないが, 次のようにすれば計算によらずにこれを示すことができる. $P_0$ を通ってその勾配が曲線 II の勾配より小さい停留曲線の全体は, 曲線 II の下

側の領域内で場を作っている(第2.3.2図で斜線を施した部分). この場に対して(*5.2*)を適用し, $u=\bar{u}(x)$ としてIを, $u=u(x)$ としてIIをとれば, $J[u]>J[\bar{u}]$ となることがわかる. このとき実はIIは場でおおわれた領域の境界を走っているが, この困難は簡単な極限移行によってさけることができよう.

曲線Iはたしかに $P_0, P_1$ を結ぶ極小曲線であるが, 最小曲線であるとはすぐに主張できない. その理由は, 第一に $J$ の最小値が存在しないかもしれないこと, 第二に不連続解があるかもしれないことである. いまの問題は $u>0$ で正則であるから, $u>0$ の範囲には不連続解はないが, 曲線の一部が $x$ 軸に沿って走るときには, 不連続解がおこり得る. 実際第2.3.2図の屈折線 $P_0Q_0Q_1P_1$ (これを曲線IIIとよぼう)は不連続"解"である.(解といっても $x$ 軸上では Euler 方程式は満たされない.) 実は $P_0Q_0, P_1Q_1$ のような, $u$ 軸に平行な直線に沿っては, もともと $J[u]$ は定義されていないけれども, 問題を幾何学的に拡張するとこのような曲線も許すことができ, $P_0Q_0, P_1Q_1$ は実際停留曲線になる(§2.10). $Q_0Q_1$ の上では $F=0$ であるから明らかに $J[u]$ への寄与はない. $P_0Q_0, P_1Q_1$ に沿っての積分は(幾何学的解釈では)それぞれ

$$\int_0^{b_0} u^{1/2}du=\frac{2}{3}b_0^{3/2},\quad \int_0^{b_1} u^{1/2}du=\frac{2}{3}b_1^{3/2}$$

となるから, 結局曲線IIIに対しては

$$J[u]=\frac{2}{3}(b_0^{3/2}+b_1^{3/2}) \tag{5.10}$$

となる. もし $P_0Q_0$ のような鉛直な直線や, $x$ 軸上にある $Q_0Q_1$ を許さないにしても, 曲線IIIにいくらでも近い曲線で $u=u(x)>0$ の形に表わせるものがあるから, $J[u]$ はいくらでも(*5.10*)に近い値をとり得るはずである.

(*5.9*)と(*5.10*)とを比較すると, $d$ が十分小さいとき(これは $P_1$ が包絡線に十分近いときにおこる)には(*5.10*)の方が小さく, したがって極小値(*5.9*)は $J$ の最小値を与えない. このとき実は(*5.10*)が最小値であることがわかるのであるが, これは $J$ の最小値の存在を証明してはじめていえることである. もし曲線IIIを許される曲線として認めないならば(はじめの解析的問題は当然そうなる), $d$ が十分小さいときには, (*5.10*)は $J$ の値の下限であるが最小値ではない. $P_1$ が包絡線の上側にあるときにも同様である.

ただし以上は数学的な問題として汎函数(*2.3.3*)の最小値を論じたのであって, 放物体の運動という力学の問題としては, 実現されるのは二つの停留曲線I, IIだけであり, $P_0Q_0Q_1P_1$ あるいはこれに近い曲線ではない. 故に"最小"作用の原理といっても, 実は停留性だけが本質的である.

例題 3〕 極小曲面の問題(§2.3, 例題4)でも定性的には上と同様な結果が成り立つ.

## §6 最小の十分条件

ある種の問題では停留値が最小値であることがすぐにわかることがある. (*1.2*)の左辺の被積分函数が $\eta, \eta'$ を独立な変数と考えて正値二次形式であれば, (*1.2*)はたしかに成立する. このためには

$$F_{u'u'}>0, \quad F_{uu}F_{u'u'}-F_{uu'}^2>0 \tag{6.1}$$

が $x, u$ および $u'$ を独立変数としてつねに成立すれば十分である．第一の不等式は Weierstrass の十分条件と同じである．(6.1) が成り立つときには，考えている停留曲線 $\bar{u}$ が場に埋められるかどうかを調べないでも，(1.2) によって直ちに $J[\bar{u}]$ が最小値を与えることがわかる．(このときはすぐわかるように共役点は存在しないから，停留曲線は実際に場に埋められる.) これはまた固定端でも自由端でも同じように成り立つ．ただしいつでも停留曲線の存在は仮定している．

(6.1) が直接には満足されていなくても，適当な変換によってこれが満足されている問題に帰着できる場合がある．

例題 1〕 前節例題 2 でみたように，放物体の問題では停留曲線は必ずしも最小を与えないから，(6.1) は満足されていないはずである．Brachistochrone の問題 (§2.3, 例題 2) ではどうであろうか．実際に計算してみると

$$F_{uu}F_{u'u'}-F_{uu'}^2=\frac{1}{4}u^{-3}(3-u'^2)(1+u'^2)^{-1} \tag{6.2}$$

となって，やはり (6.1) は満足されていない．

しかし従属変数の変換を行なって

$$u=w^2/4 \tag{6.3}$$

とおくと $u'=ww'/2$ であるから

$$I[w]=J[u]=\int u^{-1/2}(1+u'^2)^{1/2}dx=\int\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{1/2}dx \tag{6.4}$$

となる．最後の被積分函数を $G(w, w')$ とかけば

$$\left.\begin{aligned} G_{w'w'}&=\frac{4}{w^2}\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{-3/2}>0,\\ G_{ww}G_{w'w'}-G_{ww'}^2&=\frac{32}{w^6}\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{-2}>0 \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

となって (6.1) が満足されている．したがって Brachistochrone の問題では停留値がそのまま最小値であることが直ちに結論される．

## §7 凸汎函数と相反定理

(6.1) あるいは少し弱い条件

$$F_{u'u'}\geqq 0, \quad F_{uu}F_{u'u'}-F_{uu'}^2\geqq 0 \tag{7.1}$$

が満足されていると，函数 $F(x, u, u')$ は二変数 $u, u'$ の函数として凸函数であり，したがって

$$J[u, u']=\int_{a_0}^{a_1}F(x, u, u')dx \tag{7.2}$$

は，$u(x)$, $u'(x)$ を二つの独立な函数と考えたとき，**凸汎函数**となる．その意味は (*1.9.1*) と同じように，$0\leqq\alpha\leqq1$ に対して

$$J[\alpha u+(1-\alpha)v, \alpha u'+(1-\alpha)v']\leqq\alpha J[u, u']+(1-\alpha)J[v, v'] \qquad (7.3)$$

が成り立つということである．これを示すには §1.9 と同様にして

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}J[tu+(1-t)v, tu'+(1-t)v']\geqq0 \qquad (7.4)$$

をいえばよい．(*7.2*) からわかるように，左辺は

$$\int[(F_{uu})(u-v)^2+2(F_{uu'})(u-v)(u'-v')+(F_{u'u'})(u'-v')^2]dx$$

となって仮定により (*7.4*) がえられる．$(F_{uu})$ などは $F_{uu}(x, tu+(1-t)v, tu'+(1-t)v')$ などを表わす．

(*7.2*) の汎函数 $J[u, u']$ では $u(x)$, $u'(x)$ を全く別の函数と考えているが，ここで改めて

$$u'(x)=du(x)/dx \qquad (7.5)$$

という線型の付帯条件をつけたとき $J[u, u']=J[u]$ と書けば，これが従来考えてきた汎函数に外ならない．この意味ではふつうの変分法の問題はすべて**条件付変分法**である．

したがって §1.10 で考えたような，最大最小の相反性が成り立つことは当然想像されるであろう．すなわち $J[u]$ の最小値を最大値とするような別の汎函数 $I[v, v']$ が存在する．これは §1.10 の結果を汎函数の場合に拡張すればえられる．ただし §1.10 のベクトル $\boldsymbol{u}$ はここでは二つの函数の対 $\{u(x), u'(x)\}$ に相当することを特に注意することが大切である．

簡単のために固定端の場合をとると，(*7.5*) の外にさらに付帯条件として $u(a_0)=b_0$, $u(a_1)=b_1$ が要求される．いまこの境界条件を満足する函数 $f(x)$ を一つきめておいて

$$u=f(x)+u_0(x), \quad u'=\frac{df}{dx}+u_0'(x) \qquad (7.6)$$

とおくと，$u_0, u_0'$ の満足すべき付帯条件は

$$u_0'=du_0/dx, \quad u_0(a_0)=u_0(a_1)=0 \qquad (7.7)$$

となる．このような $\{u_0, u_0'\}$ の組の全体は一つのベクトル空間 $\mathbf{M}$ を作る．これが §1.10 のベクトル空間 $\mathbf{M}$ に相当し，“ベクトル” $\{f, df/dx\}$ が §1.10 の

ベクトル $\boldsymbol{a}$ に相当する.

相反汎函数 $I[v, v']$ としては (*1. 10. 5*) にならって

$$I[v, v'] = J[v, v'] - \int_{a_0}^{a_1}\left[F_v(x, v, v')(v-f) + F_{v'}(x, v, v')\left(v' - \frac{df}{dx}\right)\right]dx \quad (7.8)$$

をとる. §1. 10 でベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しては grad $J(\boldsymbol{v})$ が部分空間 $\mathbf{N}$ に属する, すなわち $\mathbf{M}$ に直交する, という付帯条件があったのに対して, ここでは"ベクトル" $\{F_v, F_{v'}\}$ が $\mathbf{M}$ に直交するという条件がいる. これは (*7.7*) を満足するすべての $\{u_0, u_0'\}$ に対して

$$\int (F_v u_0 + F_{v'} u_0')dx = 0 \quad (7.9)$$

が成立することを意味する. この条件はちょうど (*2. 2. 5*) とおなじであるから, $v, v'$ の満足すべき付帯条件は Euler の方程式

$$F_v = \frac{d}{dx}F_{v'} \quad (7.10)$$

に外ならない. これに注意すると (*7.8*) の $f$ を含む部分は部分積分ができて, $f(a_0) = b_0$ などに注意すると

$$I[v, v'] = \int_{a_0}^{a_1}(F - vF_v - v'F_{v'})dx + b_1(F_{v'})_1 - b_0(F_{v'})_0 \quad (7.11)$$

となる. ここで $F$ は $F(x, v, v')$ の意味であり, また $(F_{v'})_0$ は $F_{v'}(a_0, v(a_0), v'(a_0))$ を表わす.

こうして $J[u]$ の最小値は, 付帯条件 (*7. 10*) の下での汎函数 (*7. 11*) の最大値に等しい. これを**相反定理**という. ここでは $v$ と $v'$ とは別の函数であって, $v' = dv/dx$ という関係がはじめから課せられているのではないことに特に注意する必要がある. その代りに (*7. 10*) という条件がついている.

## §8 Friedrichs 変換

付帯条件 (*7. 10*) つきで (*7. 11*) を最大にするという変分問題は, 古典的な問題 (*2. 1. 3*) とかなり形が違っているが, これを (*2. 1. 3*) の形にすることができる. それには

$$p = F_{v'}, \quad p' = F_v \quad (8.1)$$

という, いわゆる **Legendre 変換**によって新らしい変数 $p, p'$ を導入する. (*6. 1*) が満足されていれば, あるいはもっと一般に

$$F_{uu}F_{u'u'}-F_{uu'}^2 \neq 0 \tag{8.2}$$

であれば，(8.1) を $v, v'$ について解くことができる．これを代入して

$$\Phi(x, p, p') = vF_v + v'F_{v'} - F = vp' + v'p - F \tag{8.3}$$

という函数を作ると，(7.11) は

$$I[v, v'] = I[p] = -\int_{a_0}^{a_1} \Phi(x, p, p')dx + b_1 p(a_1) - b_0 p(a_0) \tag{8.4}$$

となる．条件 (7.10) は

$$p' = \frac{dp}{dx} \tag{8.5}$$

となる．（これを予想して (8.4) を単に $I[p]$ と書いたのである．）$I[v, v']$ の最大値問題は汎函数 $I[p]$ の最大値問題となり，そこでは $p' = dp/dx$ であるから古典的な問題 (2.1.3) と同じ形となる．これを **Friedrichs の変換**という．

(8.4) の右辺には積分でない項があるが，これはその Euler 方程式

$$\Phi_p - \frac{d}{dx}\Phi_{p'} = 0 \tag{8.6}$$

には影響がなく，ただ自然の境界条件に関係するだけである．自然の境界条件は，その出し方 (§2.11) を省みればすぐわかるように，

$$(\Phi_{p'})_1 = b_1, \quad (\Phi_{p'})_0 = b_0 \tag{8.7}$$

で与えられる．

Legendre の変換 (8.1), (8.3) は $v, v'; p, p'$ について全く対称的である．

$$\begin{aligned} d\Phi &= dv\cdot p' + v\,dp' + dv'\cdot p + v'dp - F_v dv - F_{v'}dv' \\ &= v\,dp' + v'dp \end{aligned}$$

であるから，(8.1) に対して

$$\Phi_p = v', \quad \Phi_{p'} = v \tag{8.8}$$

が成り立つ．故に $p$ に関する Euler 方程式 (8.6) と自然の境界条件 (8.7) とは，$u$ に関する付帯条件 (7.5) と (2.1.4) とに外ならない．逆に $u$ に関する Euler 方程式 (7.10) は $p$ に関する付帯条件 (8.5) である．

Friedrichs 変換は実は条件 (6.1) がなくても遂行することができ，(8.2) だけを仮定すれば十分である．ただし一般には最小値；最大値という性質は失われ，ただ $J[u]$, $I[p]$ が同じ停留値をもち，停留函数が上のような関係で結ばれるということが成り立つにすぎない．

例題〕 §6 の例のように変換した形の Brachistochrone の問題 (*6.4*) に Friedrichs 変換を施してみよう．

$$p' = G_w = -\frac{4}{w^3}\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{-1/2}, \quad p = G_{w'} = w'\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{-1/2} \tag{8.9}$$

を解けば

$$\left.\begin{aligned} &w = 2^{1/2}(1-p^2)^{1/4}(-p')^{-1/2}, \quad w' = 2^{1/2}p(1-p^2)^{-3/4}(-p')^{1/2},\\ &G = 2^{1/2}(1-p^2)^{-3/4}(-p')^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

したがって

$$\Phi = -2^{3/2}(1-p^2)^{1/4}(-p')^{1/2} \tag{8.11}$$

となる．もちろん $p, p'$ には

$$-1 \leqq p \leqq 1, \qquad p' < 0 \tag{8.12}$$

という領域だけが許される．

問題 1〕 §2.3, 問題 4 について共役点，場，極小条件，Friedrichs 変換などを論ぜよ．

問題 2〕 §2.3, 例題 1 において $f(u) = u^k$ のときに §6 の例題のような変換を施した上で Friedrichs の変換を適用せよ．相反定理が成立するためには $k$ の値はどうであればよいか．

問題 3〕 (*8.11*) を用いて (*8.4*) に対する Euler 方程式を作り，これを解け．

問題 4〕 二変数 $x, y$ の問題 (*2.9.1*) に対して相反定理を論じ，

$$J[u] = \int_G (1+u_x{}^2+u_y{}^2)^{1/2} dx\, dy$$

にこれを適用せよ．

## §9 多くの函数の場合

この章ではもっぱら一つの変数 $x$ の一つの函数 $u$ の一階導函数だけを含む汎函数 (*2.1.3*) を取り扱ってきたが，大部分の結果は二つ以上の函数 $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ (これをまとめて $\boldsymbol{u}(x)$ と書こう) に対する (*2.8.1*) の形の汎函数の場合に拡張される．Legendre の条件 (*1.5*) は，行列

$$(\overline{F}_{u_i' u_k'}) \tag{9.1}$$

が正値行列であるという条件になる．また共役点という概念も前と同じように定義することができて，弱極小に関しては Jacobi の条件が十分条件になる．$(n+1)$ 次元空間の与えられた点 $x = a_0$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}_0$ を通る停留曲線の全体は $n$ 個のパラメタ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を含む曲線群

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \boldsymbol{u}(x, \boldsymbol{\alpha}) \tag{9.2}$$

となるが，その Jacobi 行列式が 0 になる条件，すなわち

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_n)}{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)} = 0 \tag{9.3}$$

と $(9.2)$ とから定まる点が，停留曲線 $(9.2)$ の上の共役点である．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が変化するときのこのような点の軌跡は一般には曲線群 $(9.2)$ の包絡面であり，共役点は停留曲線とこの包絡面との接点に外ならない．

停留曲線の場およびその勾配函数 $\boldsymbol{v}(x, \boldsymbol{u})$ という概念も前と同様に定義でき，また Hilbert の不変積分は

$$W = \int_{a_0}^{a_1} [F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \sum_i (u_i' - v_i) F_{u_i'}(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})] dx \tag{9.4}$$

で定義される．しかし今度は勝手な場に対しては，$W$ が曲線 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x)$ の両端だけで定まるという定理は成立しない．この性質をもつ場を **Mayer 場**という．定点 $x = a_0,\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}_0$ を通る停留曲線の全体は，包絡面に接しない範囲においてMayer 場を作る．(証明は §5.4 をみよ.) この性質を用いて Weierstrass の十分条件を論ずることができることは前と同様である．Weierstrass の函数は

$$\begin{aligned} E(x, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}') = F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') \\ - F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \sum (u_i' - v_i) F_{u_i'}(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{9.5}$$

で定義される．条件 $(5.6)$ は行列

$$(F_{u_i' u_k'}) \tag{9.6}$$

がつねに正値という条件でおきかえられる．

§6 で論じた最小の十分条件 $(6.1)$ に対応するのは，

$$\begin{pmatrix} (F_{u_i u_k}) & (F_{u_i u_k'}) \\ (F_{u_i' u_k}) & (F_{u_i' u_k'}) \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

で表わされる $2n$ 行 $2n$ 次の行列が正値であるという条件である．$(7.1)$ に対しても同様であって，これに応じて §7 以下の議論が容易に拡張される．詳細は省略するが興味のある読者が自分で試みるのに特に困難はないはずである．

# 第 5 章　Hamilton-Jacobi の理論

## §1　定点を通る停留曲線の場

本書では物理学の種々の変分原理を論ずることはできないが，解析力学に現われる Hamilton-Jacobi の理論は数学的に特に重要であるから，ここにその大要をのべ，併せて測地線について論及する．

この章では $x$ の函数 $u_1, \cdots, u_n$ を含む汎函数 (*2.8.1*) を取り扱う．前節でしたように，$\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n)$ と書くと，これは

$$J[\boldsymbol{u}]=\int F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')dx \qquad (1.1)$$

のように，形式的には (*2.1.3*) と同じ形をとる．Euler 方程式は (*2.8.4*)

$$\frac{d}{dx}F_{u_i'}=F_{u_i} \qquad (i=1, \cdots, n) \qquad (1.2)$$

である．正則性の条件 (*2.8.5*)

$$\det(F_{u_i'u_k'})\neq 0 \qquad (1.3)$$

は満足されているものとする．

停留曲線 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ は $(n+1)$ 次元空間 $\mathrm{R}_{n+1}$ の中の曲線である．定点

$$\mathrm{P}_0: \quad x=a_0, \quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_0 \qquad (1.4)$$

を通る停留曲線の全体が少なくも $\mathrm{P}_0$ の近所では場を作ることは微分方程式の解の一般的性質から結論される．故に $\mathrm{P}_0$ の近所の点

$$\mathrm{P}_1: \quad x=a_1, \quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_1 \qquad (a_1>a_0) \qquad (1.5)$$

と $\mathrm{P}_0$ とを，この場に属する停留曲線で結ぶことができ，その仕方は一義的に定まる．この停留曲線を

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x; a_1, \boldsymbol{b}_1) \quad すなわち \quad u_i=u_i(x; a_1, \boldsymbol{b}_1) \qquad (1.6)$$

で表わそう．この停留函数を (*1.1*) に代入して $a_0$ から $a_1$ まで積分したものは ($\mathrm{P}_0$ を固定すれば) $\mathrm{P}_1$ の函数である．これを $W(a_1, \boldsymbol{b}_1)$ と書き，物理的問題の性質に応じて，**Hamilton の主函数**あるいは**特性函数**，あるいは**アイコナル** (Eikonal) などと呼ぶ．一般には $\mathrm{P}_0$ も変化するものと考えて $W$ を $\mathrm{P}_0$ と $\mathrm{P}_1$ との函数と考えるのであるが，以下簡単のために $\mathrm{P}_0$ は固定しておく．

例題〕 §2.3, 例題 3 についていうと，$n=1$ であって，(*1.6*) の $u$ は (*2.3.9*) に (*2.*

*3. 13*) を代入すればえられる．すなわち

$$u = u(x; a_1, b_1) = \frac{b_0+b_1-2d}{(a_1-a_0)^2}\left[x - \frac{(a_0b_1+a_1b_0)-(a_0+a_1)d}{b_0+b_1-2d}\right]^2 + \frac{(a_1-a_0)^2}{4(b_0+b_1-2d)}, \quad 2d = [4b_0b_1-(a_1-a_0)^2]^{1/2}. \tag{1.7}$$

ただし (*2.3.13*) の複号の下号をとってある．これが場を作る停留曲線群 I に相当するからである．$W(a_1, b_1)$ は (*4.5.9*) に外ならない：

$$W(a_1, b_1) = \frac{2}{3}(b_0+b_1-2d)^{1/2}(b_0+b_1+d). \tag{1.8}$$

## §2　特性函数の微分係数

以下 $W$ を特性函数と呼んでおく．$W(a_1, \boldsymbol{b}_1)$ の微分係数を求めてみよう．$W(a_1, \boldsymbol{b}_1)$ は (*1. 1*) に (*1.6*) を代入したものであるが，積分の上端が $a_1$ であることに注意して

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = F(a_1, \boldsymbol{u}(a_1; a_1, \boldsymbol{b}_1), \boldsymbol{u}'(a_1; a_1, b_1)) + \sum_{i=1}^{n}\int_{a_0}^{a_1}\left(F_{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial a_1} + F_{u_i'}\frac{\partial u_i'}{\partial a_1}\right)dx. \tag{2. 1}$$

ここで $u_i'$ は (*1.6*) の函数 $u_i$ で作った $\partial u_i/\partial x$ に外ならないが $\partial u_i'/\partial a_1 = (\partial/\partial x)(\partial u_i/\partial a_1)$ であり，(*2. 1*) の積分においては $a_1, \boldsymbol{b}_1$ は定数と考えるから $\partial/\partial x = d/dx$ とかいてよい．故にこの項を部分積分すると，Euler 方程式 (*1. 2*) によって積分は 0 となり，境界値だけが残る．(*1.6*) が定点 $P_0$ を通ることから，$x = a_0$ においては $\partial u_i/\partial a_1 = 0$ となり，結局

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = (F)_{a_1} + \sum_{i=1}^{n}\left(F_{u_i'}\frac{\partial u_i}{\partial a_1}\right)_{a_1}. \tag{2. 2}$$

$(F)_{a_1}$ は (*2. 1*) の第一項を略記したものであり，$(F_{u_i'}\partial u_i/\partial a_1)_{a_1}$ の意味もこれに準ずる．同様にして

$$\frac{\partial W}{\partial b_{1k}} = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{u_i'}\frac{\partial u_i}{\partial b_{1k}}\right)_{a_1} \tag{2. 3}$$

がえられる．

一方曲線 (*1. 6*) が $P_1$ を通るから

$$b_{1i} = u_i(a_1; a_1, \boldsymbol{b}_1) \tag{2. 4}$$

が成立する．これを $a_1, \boldsymbol{b}_1$ で微分すれば

$$0 = (u_i')_{a_1} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_1}\right)_{a_1}, \quad \delta_{ik} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial b_{1k}}\right)_{a_1}. \tag{2.5}$$

これを用いると (*2.2*), (*2.3*) は

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}=\left(F-\sum_{i=1}^{n}u_i'F_{u_i'}\right)_{a_1},\quad \frac{\partial W}{\partial b_{1i}}=(F_{u_i'})_{a_1} \tag{2.6}$$

となる.

この式で $a_1, \boldsymbol{b}_1$ をそれぞれ $x, \boldsymbol{u}$ とかき改めることにすると

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}&=F(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-\sum_{i=1}^{n}v_iF_{v_i}(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\\ \frac{\partial W}{\partial u_i}&=F_{v_i}(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

と書かれる. ここで $u_i'$ を $v_i$ とおきかえてある. (*2.6*) の右辺の意味に戻って考えると, この $v_i$ は $x, \boldsymbol{u}$ の函数であって, 点 $x, \boldsymbol{u}$ を通る場の曲線の勾配を表わす勾配函数に外ならない (§4.4).

例題〕 前節で考えた例では (*1.8*) において $d$ が $a_1, b_1$ の函数であることに注意して,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial a_1}&=\frac{1}{2}(a_1-a_0)(b_0+b_1-2d)^{-1/2},\\ \frac{\partial W}{\partial b_1}&=(b_1-d)(b_0+b_1-2d)^{-1/2}\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

となる. これが果して (*2.6*) を満足しているかどうか調べてみよう. (*2.3.4*) により $F-u'F'=c$, また $F=f(u)(1+u'^2)^{1/2}$ であるから $F_{u'}=f(u)(1+u'^2)^{-1/2}u'=cu'$, (*2.3.9*) によって $F_{u'}=(x-\xi)/2c$ となり, $c$ に (*2.3.13*) を入れると

$$\left.\begin{aligned}F-u'F_{u'}&=\frac{1}{2}(a_1-a_0)(b_0+b_1-2d)^{-1/2},\\ (F_{u'})_{a_1}&=(a_1-\xi)/2c=(b_1-d)(b_0+b_1-2d)^{-1/2}\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

となって, それぞれ (*2.8*) と一致する.

## §3 Legendre 変換, 正準方程式, Hamilton-Jacobi の方程式

(*2.7*) で $\boldsymbol{v}$ は考えている場の勾配函数であって, 場が違えば (したがって $P_0$ が違えば) 変るのであるが, (*2.7*) から $\boldsymbol{v}$ を消去してしまえば, 結果は $W$ の偏微分方程式となり, その形は $F$ の形だけで定まって特殊な場にはよらないはずである.

この消去は形式的な操作であるから, $x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を独立変数として取り扱ってよろしい. このためには Legendre 変換

$$F_{v_i}(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=p_i, \tag{3.1}$$

$$\sum_i v_ip_i-F=H=H(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) \tag{3.2}$$

を行うと都合がよい. この Legendre 変換は §4.8 で用いたものと違う. §4.8

では $u, u'$ の両方が変換にあずかっているが，ここでは $u'=v$ だけが関係し，$u$ はパラメタとみなされている．(3.1) を $v$ について解いて $v$ を $x, u, p$ の函数と考え，これを (3.2) に代入して $H$ を $x, u, p$ の函数と考えるのである．正則性の仮定によって (3.1) の Jacobi 行列式が 0 でないから，これが可能である．

Legendre 変換は相反的で，逆の変換が全く同じ形に行われる．(3.1), (3.2) によって

$$dH = \sum(v_i dp_i + p_i dv_i) - \sum(F_{u_i} du_i + F_{v_i} dv_i)$$
$$= \sum(v_i dp_i - F_{u_i} du_i)$$

となるから

$$H_{p_i} = v_i, \quad \sum p_i v_i - H = F \tag{3.3}$$

となる．これは (3.1), (3.2) と全く同形の変換である．ついでに

$$H_{u_i} = -F_{u_i} \tag{3.4}$$

もえられた．

解析力学では $x$ が時間，$u$ が一般座標，$v$ が速度，$p$ が運動量，$F$ が Lagrange 函数，$H$ が Hamilton 函数を表わす．

例題 1〕 (2.3.3) に対しては

$$p = F_v = f(u)v(1+v^2)^{-1/2}. \tag{3.5}$$

これを解いて ($f(u)>0$ とする)

$$v = p(f(u)^2 - p^2)^{-1/2}. \tag{3.6}$$

したがって

$$H = -(f(u)^2 - p^2)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Legendre 変換 (3.1), (3.2) を用いると，Euler 方程式 (1.2) をかきかえることができる．これらの式で，$u$ として停留函数 $u=u(x)$ をとり，$v$ として $v=u'(x)$ をとれば，(3.3), (3.4) に注意して

$$\frac{du_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{u_i} \tag{3.8}$$

がえられる．こうして停留条件が $2n$ 個の函数 $u, p$ に関する一階の連立微分方程式として表わされ，その形は $u, p$ について対称である．(3.8) を Hamilton の**正準方程式** (canonical equation) という．

Legendre の逆変換を用いれば，(3.8) からもとの Euler 方程式 (1.2) に戻

ることも容易である.

例題 2〕 例題1では $(3.8)$ は

$$\frac{du}{dx}=(f(u)^2-p^2)^{-1/2}p,\quad \frac{dp}{dx}=(f(u)^2-p^2)^{-1/2}f(u)f'(u). \tag{3.9}$$

問題〕 $F(x,u,u')$ が $x$ を陽に含まないときには，正準方程式は $H=$ 定数 という積分をもつことを示せ. $(2.3.1)$ および§2.8問題2はこれと同等であることに注意せよ.

さて $(2.7)$ から $\boldsymbol{v}$ を消去することは，Legendre 変換を用いると簡単にできる. Legendre 変換の式 $(3.1)$, $(3.2)$ と $(2.7)$ とを比較すれば，消去の結果として

$$\frac{\partial W}{\partial x}+H\left(x,\boldsymbol{u},\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{u}}\right)=0, \tag{3.10}$$

詳しくは

$$\frac{\partial W}{\partial x}+H\left(x,u_1,\cdots,u_n,\frac{\partial W}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial u_n}\right)=0 \tag{3.11}$$

がえられる. これを **Hamilton-Jacobi の方程式**といい，$W$ についての一階偏微分方程式である.

こうして定点 $\mathrm{P}_0$ を通る停留曲線の場を用いて作った特性函数 $W$ は，場に無関係な偏微分方程式 $(3.11)$ を満足することがわかった.

例題 3〕 $(1.8)$ が実際 $(3.11)$ を満足することを験証してみよう. $\partial W/\partial x$, $\partial W/\partial u$ は $(2.8)$ で $a_1, b_1$ を $x, u$ でおきかえればよい. また $H$ の形は $(3.7)$ で $f(u)=u^{1/2}$ とおけばよい. 故に

$$\begin{aligned} H\left(x,u,\frac{\partial W}{\partial u}\right) &= -\left[u-\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2\right]^{1/2} \\ &= -[u-(u-d)^2(b_0+u-2d)^{-1}]^{1/2} = -\frac{1}{2}(x-a_0)(b_0+u-2d)^{-1/2} \end{aligned}$$

となり，これは $-\partial W/\partial x$ に等しい. この計算で $4d^2=4b_0u-(x-a_0)^2$ を用いてある $(1.7)$.

つぎにこの逆の問題を考え，$(3.11)$ を満足する函数 $W=W(x,\boldsymbol{u})$ が与えられたときに，これを用いて停留曲線の場が作られることを示そう. それには

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial u_i},\quad \frac{du_i}{dx}=H_{p_i} \tag{3.12}$$

を解けばよい. 第一式によって $\boldsymbol{p}$ を $x,\boldsymbol{u}$ の函数として定め，これを第二式の右辺に代入すれば，$n$ 個の函数 $\boldsymbol{u}$ に関する一階連立微分方程式となるから，これを解けば $x,\boldsymbol{u}$ の空間 $\mathrm{R}_{n+1}$ における曲線の場がえられるはずである. これが実際に停留曲線の場であることを示すには，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}$ が正準方程式 $(3.8)$ を満足する

ことを確かめればよい．(*3.8*) の第一式はすでに成立している．また

$$\frac{dp_i}{dx}=\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial u_i}+\sum_k\frac{\partial^2 W}{\partial u_i\partial u_k}\frac{du_k}{dx}$$

$$=\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial u_i}+\sum_k\frac{\partial^2 W}{\partial u_i\partial u_k}H_{p_k}\tag{3.13}$$

であるが，一方 $W$ が満足する式 (*3.11*) を $u_i$ で微分して

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial u_i}+H_{u_i}+\sum H_{p_k}\frac{\partial^2 W}{\partial u_i\partial u_k}=0\tag{3.14}$$

を得るから，(*3.8*) の第二式も成立する．

問題 1〕 $W(x,\boldsymbol{u})$ が Hamilton-Jacobi の方程式の解であれば，$W$ から作った停留曲線の場の各曲線は，$W=$ 定数 という曲面に対して横断であることを示せ．ただし横断性は一変数の場合の条件 (*2.11.8*) に準じて定義される．

問題 2〕 §2.3, 問題 4 に対して Hamilton-Jacobi の方程式を作って解け．

問題 3〕 Hamilton-Jacobi の方程式が

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial u_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial u_n}\right)^2=f(x,\boldsymbol{u})$$

の形になるような $F(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')$ を決定せよ．$f(x,\boldsymbol{u})=\varphi(x)+\sum_i\psi_i(u_i)$ の形ならば，変数分離の方法で上の方程式の完全解を求めることができることに注意せよ．

## §4　Hilbert の不変積分と Hamilton-Jacobi の定理

前節で Hamilton-Jacobi の方程式の勝手な解 $W$ から作った停留曲線の場に対して，Hilbert の“不変”積分 (*4.9.4*) を考える．Legendre 変換を用いると，これは

$$\int_{a_0}^{a}\left[\sum_i u_i' p_i-H(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\right]dx\tag{4.1}$$

と書かれる．ここで $\boldsymbol{p}=\partial W/\partial\boldsymbol{u}$ は考えている場の量 (*3.12*) であるが，$u_i'$ は (*3.12*) の $du_i/dx$ とは違って，考えている積分路に沿ってとった微分である．したがって Hamilton-Jacobi の方程式 (*3.11*) を用いると，(*4.1*) は

$$\int_{a_0}^{a}\left(\sum_i u_i'\frac{\partial W}{\partial u_i}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)dx=\int_{a_0}^{a}dW=W(\mathrm{P})-W(\mathrm{P}_0)\tag{4.2}$$

となり，その値は積分をとる曲線の両端 $\mathrm{P}_0$, P だけで定まって途中の路にはよらない．考えている停留曲線の場に対して，Hilbert の不変積分は実際に不変である．いいかえるとこの場は Mayer 場である (§4.9)．特に §1 で作った，定点 $\mathrm{P}_0$ を通る停留曲線の場が Mayer 場であることがこれで証明された (§4.9).

上に示したように，Hamilton-Jacobi の方程式の一つの解 $W(x, u)$ が求まると，これによって停留曲線の場が一つ求められる．これは $n$ 個のパラメタを含む $\infty^n$ の停留曲線群に外ならないが，停留曲線の全体は $\infty^{2n}$ あるから，これですべての停留曲線がえられたわけではない．また $W$ からこの場を作るときには，微分方程式 (*3. 12*) を解かねばならなかった．これは $n$ 元一階の連立微分方程式であるから，$n$ 元二階の Euler 方程式 (*1. 2*)，あるいはこれと同等な $2n$ 元一階の正準方程式 (*3. 8*) にくらべれば簡単であるが，実際にはなおかなりめんどうである．

これらの困難は Hamilton-Jacobi の方程式の $\infty^n$ 個の解，すなわち $n$ 個のパラメタ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を含む解

$$W = W(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{4.3}$$

がえられると除かれる．このとき上の方法によれば，$\infty^n$ 個の場が作られるから，$\infty^n \times \infty^n = \infty^{2n}$ の停留曲線がえられることは明らかであるが，実はこの場を求めるのに微分方程式 (*3. 12*) を解く必要がないのである．

前節で示したように，パラメタの値 $\boldsymbol{\alpha}$ に対応する場に関する Hilbert の不変積分は実際不変であって

$$\int_{a_0}^{a} [F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \sum (u_i' - v_i) p_i] dx = W(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}) - W(a_0, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{\alpha}) \tag{4.4}$$

で与えられる．ここで場の函数

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}, \qquad v_i = H_{p_i}(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \tag{4.5}$$

はパラメタ $\boldsymbol{\alpha}$ による．一方不変性により (*4. 4*) の $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x)$ は $\boldsymbol{u}(a_0) = \boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{u}(a) = \boldsymbol{b}$ を満足すれば何であってもよい．よって $\boldsymbol{u}(x)$ を $\boldsymbol{\alpha}$ に無関係にきめておいて (*4. 4*) を $\alpha_k$ で微分すると，$F_{v_i} = p_i$ によって $\partial v_i / \partial \alpha_k$ をふくむ項は消え

$$W_{\alpha_k}(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}) - W_{\alpha_k}(a_0, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{a_0}^{a} \sum_i (u_i' - v_i) \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} dx \tag{4.6}$$

となる．その上で $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x)$ がパラメタ $\boldsymbol{\alpha}$ に対する場の停留曲線であるとすると，$u_i' = v_i$ となるから (*4. 6*) の右辺は 0 で $W_{\alpha_k}(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}) = W_{\alpha_k}(a_0, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{\alpha})$ となり，$a$ が何であってもこれが成立するから，この停留曲線に沿って

$$W_{\alpha_k}(x, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{\alpha}) = \beta_k = \text{定数} \qquad (k = 1, \cdots, n) \tag{4.7}$$

が成立する.

逆に定数の組 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ を与えて $(4.7)$ を解いて $\boldsymbol{u}(x)$ を定めることができれば，これは停留函数になるであろう．ただし函数行列式が 0 でないこと，すなわち

$$\det\left(W_{u_i\alpha_k}(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha})\right)\neq 0 \tag{4.8}$$

を仮定する[(1)]．実際 $(4.7)$ を満足する $\boldsymbol{u}(x)$ に対して $(4.6)$ を考えれば，左辺が 0 であるから右辺も 0 となり，

$$\sum_i (u_i'-v_i)\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}=0 \tag{4.9}$$

がこの曲線に沿っていたるところ成り立つ．（$p_i, v_i$ は $(4.5)$ で与えられるが，その $\boldsymbol{u}$ に $\boldsymbol{u}(x)$ が代入されている.）ところが $\partial p_i/\partial\alpha_k=\partial^2 W/\partial u_i\partial\alpha_k$ であって，その作る行列式は $(4.8)$ によって 0 でないから，$(4.9)$ が成り立つためには $u_i'=v_i$ でなければならない．これは $(4.7)$ から定めた $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ が停留曲線であることを示している.

以上を要約すると，$n$ 個のパラメタ $\boldsymbol{\alpha}$ を含む Hamilton-Jacobi の方程式の解（これを**完全解**という）$(4.3)$ が得られたならば，別に勝手な $n$ 個の定数 $\boldsymbol{\beta}$ をとって，$(4.7)$ を解いて $\boldsymbol{u}(x)$ を定めれば停留函数がえられ，しかも勝手な停留函数はこの方法でえられる．これを **Hamilton-Jacobi の定理**という．これによって Euler 方程式 $(1.2)$ あるいは正準方程式 $(3.8)$ を解くことは，偏微分方程式 $(3.10)$ の完全解を求めることに帰着する.

〔例題〕 §2.3, 例題 3 に対する Hamilton-Jacobi の方程式は，$(3.7)$ で $f(u)=u^{1/2}$ とおいて

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\left[u-\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{4.10}$$

特性函数 $(1.8)$ が実際これを満足することは §3 の例題 3 で示したが，今度は逆に $(4.10)$ の完全解を求めてみよう．$(4.10)$ は変数の分離された偏微分方程式であるから，$W=X(x)+U(u)$ とおいて完全解を求めることができる．すると

$$X'(x)=[u-U'(u)^2]^{1/2} \tag{4.11}$$

となるから，両辺は定数 $\alpha$ に等しく，これを解いて

(1)　もともと $(n+1)$ 変数の偏微分方程式 $(3.10)$ の解は $(n+1)$ 箇の任意定数を含むことができるが，$(3.10)$ が $W$ を陽に含まないので，その一つ $\alpha_0$ は $W=\cdots+\alpha_0$ のように加法的に含まれる．このようなものは $(4.7)$ を作ると落ちてしまうから役に立たず，残りの $n$ 個のパラメタだけが有効である.

$$\left.\begin{aligned} &X=\alpha x, \quad U=\frac{2}{3}(u-\alpha^2)^{3/2}, \qquad \alpha>0, \\ &W=\alpha x+\frac{2}{3}(u-\alpha^2)^{3/2} \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

を得る．(*4.7*) を作ると

$$x-2\alpha(u-\alpha^2)^{1/2}=\beta \tag{4.13}$$

が停留函数を与えるはずである．かきかえると

$$u=\alpha^2+\frac{(x-\beta)^2}{4\alpha^2} \tag{4.14}$$

となり，(*2.3.9*) で $c$ を $\alpha$, $\xi$ を $\beta$ とかきかえたものと一致する．

## §5　測 地 線

Hamilton-Jacobi の定理は解析力学への応用が特に重要であるが，ここではこれを**測地線** (geodesic) の問題に応用してみる．線素が正値二次形式

$$ds^2=\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(\boldsymbol{u})du_idu_k, \qquad g_{ik}=g_{ki} \tag{5.1}$$

で与えられる Riemann 空間 $R_n$ を考えると，その二点 $P_0:\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_0$, $P_1:\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_1$ を結ぶ測地線

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x) \qquad (0\leqq x\leqq 1), \quad \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{u}(1)=\boldsymbol{b}_1 \tag{5.2}$$

とは $P_0, P_1$ を結ぶ最短曲線，すなわち

$$J[\boldsymbol{u}]=\int_0^1\left(\sum_{i,k} g_{ik}(u)u_i'u_k'\right)^{1/2}dx \tag{5.3}$$

の最小曲線として定義される．

この変分問題には特異性がある．測地線は $R_n$ の曲線であって，これをパラメタ $x$ で表わす仕方は無数にあり，$x, \boldsymbol{u}$ 空間 $R_{n+1}$ の停留曲線 (*5.2*) は決して一義的には定まらない．これは (*5.3*) の被積分函数が $\boldsymbol{u}'$ に関して一次の同次式であることによる (§2.10 参照)．この特異性はまた (*5.3*) が正則な問題ではないというところにも現われている (§2.10, 問題)．したがってすべての停留函数が二回微分可能であるとは保証されない．

しかし二回微分可能であるような停留函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ があると仮定すると，Euler の方程式が成立することに変りはない．

$$Q(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=\sum_{i,k} g_{ik}(\boldsymbol{u})u_i'u_k' \tag{5.4}$$

とおくと，Euler 方程式は

$$\frac{d}{dx}(Q^{-1/2}Q_{u_i'}) = Q^{-1/2}Q_{u_i} \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.5}$$

で与えられる.

(5.5) はこのままでは複雑であるが，曲線 (5.2) を表わすパラメタのとり方に任意性のあることを利用して，例えば $x$ として，考えている停留曲線の上の定点 $\mathrm{P}_0$ と動点 P との間の弧 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$ の長さの全長 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 = l$ に対する比をとると，(5.5) で $Q =$ 定数 $= l^2$ であるから

$$\frac{d}{dx}Q_{u_i'} = Q_{u_i} \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{5.6}$$

となる．これをいまの問題の Euler 方程式と考えてもよい．ただしこれを解いた結果が $Q = l^2$ という条件と矛盾しては困るが，その心配はない．$Q$ は $u'$ について二次の同次式であるから，Euler の定理[(1)]によって恒等式

$$\sum_i u_i' Q_{u_i'} = 2Q \tag{5.7}$$

が成り立つ．ここに (5.6) の解を代入して $x$ で微分すると

$$\sum_i (u_i'' Q_{u_i'} + u_i' Q_{u_i}) = 2\frac{dQ}{dx} \tag{5.8}$$

となるが，左辺は $dQ/dx$ に等しいから，$dQ/dx = 0$ となり，$Q$ は実は定数である．すると (5.3) によって必然的に $Q = l^2$ となる．

## §6 正則な問題への変換

(5.6) の形をみれば明らかであるように，これは汎函数

$$I[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2}\int Q\,dx = \frac{1}{2}\int\Big(\sum_{i,k} g_{ik}(u)u_i'u_k'\Big)dx \tag{6.1}$$

に関する Euler 方程式に外ならない．(因子 1/2 は便宜上つけたにすぎない.) $I[\boldsymbol{u}]$ と $J[\boldsymbol{u}]$ とは違った汎函数であるのに同じ Euler 方程式をもつ．しかも (6.1) に対しては正則条件 (1.3) が満足されているばかりでなく，行列 $(Q_{u_i'u_k'})$ は正値である．これは線素 (5.1) が正値形式であることによる．故に共役点を含まない範囲において，停留曲線は $I[\boldsymbol{u}]$ の狭義の極小値を与える．

$J[\boldsymbol{u}]$ は正則な問題ではなく，$F = Q^{1/2}$ に対して $(F_{u_i'u_k'})$ は正値行列ではないが，ともかくそれは非負値である．何故なら簡単な計算によって

$$\sum_{i,k} F_{u_i'u_k'}\xi_i\xi_k = 2\,Q^{-3/2}[(\boldsymbol{u}', G\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{\xi}, G\boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{u}', G\boldsymbol{\xi})^2] \tag{6.2}$$

---

(1) I, 31 頁.

が勝手なベクトル $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ に対して成り立つことがわかる．$G$ は行列 $(g_{ik}(\boldsymbol{u}))$ を表わし，( , ) はベクトルの内積である．$G$ が正値行列であるから，Schwarz の不等式によって (6.2) の [ ] の中は決して負にならないのである．

したがって§4.5の結果により，停留曲線は場の存在する範囲において $J[\boldsymbol{u}]$ の広義強極小を与える．これが狭義極小でないことは，おなじ $\mathrm{R}_n$ の測地線がパラメタのとり方によって $\mathrm{R}_{n+1}$ の別の停留曲線になることから明らかである．$\mathrm{R}_n$ の曲線としては測地線は実は狭義極小を与えるのであるが，これを示すにはもっと詳しい議論が必要である．

$J[\boldsymbol{u}]$ と $I[\boldsymbol{u}]$ とはおなじ極小函数をもつから，極小値についても密接な関係がある．極小曲線 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}(x)$ に沿っては $Q=l^2=$ 定数 であったから $J[\bar{\boldsymbol{u}}]=l$, $I[\bar{\boldsymbol{u}}]=\dfrac{1}{2}l^2$ であり，

$$I[\bar{\boldsymbol{u}}]=\frac{1}{2}J[\bar{\boldsymbol{u}}]^2 \tag{6.3}$$

が成り立つ．ただしここでは測地線を表わすパラメタ $x$ を (5.2) のように $0\leqq x\leqq 1$ の間に動かしている．$J[\bar{\boldsymbol{u}}]$ の方はパラメタのとり方に無関係であるが，$I[\bar{\boldsymbol{u}}]$ の方はそうでない．

もし $x$ の範囲を一般に $a_0\leqq x\leqq a_1$ とすると，$Q=$ 定数 $=c$ という性質は変らないで $J[\bar{\boldsymbol{u}}]=c^{1/2}(a_1-a_0)$, $I[\bar{\boldsymbol{u}}]=\dfrac{1}{2}c(a_1-a_0)$ となり

$$I[\bar{\boldsymbol{u}}]=\frac{1}{2}(a_1-a_0)^{-1}J[\bar{\boldsymbol{u}}]^2 \tag{6.4}$$

を得る．

これらの事情を考えると測地線を論ずるには特異な汎函数 $J[\boldsymbol{u}]$ を取り扱う代りに，正則で形も簡単な $I[\boldsymbol{u}]$ を用いる方がはるかに便利であることがわかる．

〔例題〕 $n$ 次元 Euclid 空間では

$$ds^2=du_1{}^2+\cdots+du_n{}^2 \tag{6.5}$$

であるから $Q=\sum u_i'^2$, (5.6) は

$$u_i''=0 \quad \text{すなわち} \quad u_i=\bar{u}_i=\alpha_i(x-a_0)+b_{0i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6.6}$$

となって測地線は直線である．これに対し $Q=\sum\alpha_i{}^2$, したがって (6.4) より

$$\begin{aligned}J[\bar{\boldsymbol{u}}]^2&=2(a_1-a_0)I[\bar{\boldsymbol{u}}]=(a_1-a_0)\int_{a_0}^{a_1}Q\,dx=(a_1-a_0)^2\sum\alpha_i{}^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(b_{1i}-b_{0i})^2=|\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_0|^2.\end{aligned} \tag{6.7}$$

ただし $x=a_1$ のとき $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_1$ とした．当然のことであるがこれが二点 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1$ の"測地的距離"の平方に等しい．

問題〕 測地線についてのべた事柄は，$F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')>0$ が $x$ を陽に含まず，$\boldsymbol{u}'$ に関して同次である場合に大部分拡張できる．例えば $F$ が $\boldsymbol{u}'$ の一次の同次式ならば

$$J_\alpha[\boldsymbol{u}]=\int_{a_0}^{a_1} F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')^\alpha dx$$

の Euler 方程式はすべての $\alpha \neq 1$ に対して同等であり，したがって同じ停留函数 $\bar{\boldsymbol{u}}$ をもち，$F(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{u}}')=c$ は定数であって

$$J_\alpha[\bar{\boldsymbol{u}}]=(a_1-a_0)c^\alpha$$

が成り立つことを示せ．

## §7　Hamilton-Jacobi の理論の測地線への応用

(6.1) の被積分函数

$$F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=\frac{1}{2}\sum g_{ik}(\boldsymbol{u})u_i'u_k' \tag{7.1}$$

に Legendre 変換 (3.1～2) をあてはめると ($v_i=u_i'$)

$$p_i=\sum_k g_{ik}(\boldsymbol{u})u_k' \qquad (i=1, \cdots, n). \tag{7.2}$$

これを $\boldsymbol{u}'$ について解くため，行列 $(g_{ik}(\boldsymbol{u}))$ の逆行列 $(h_{ik}(\boldsymbol{u}))$ を導入すると

$$u_i'=\sum_k h_{ik}(\boldsymbol{u})p_k. \tag{7.3}$$

したがって

$$H=\sum_i p_i u_i'-F=\frac{1}{2}\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u})p_i p_k. \tag{7.4}$$

正準方程式 (3.8) は

$$\frac{du_i}{dx}=\sum_k h_{ik}(\boldsymbol{u})p_k, \quad \frac{dp_i}{dx}=-\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial h_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial u_i}p_j p_k. \tag{7.5}$$

Hamilton-Jacobi の方程式 (3.11) は

$$\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{1}{2}\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u})\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial W}{\partial u_k}=0. \tag{7.6}$$

この式は $x$ を陽にふくまない．このような場合には，例えば

$$W=\alpha_1^{1/2}V(\boldsymbol{u})-\frac{1}{2}\alpha_1 x \tag{7.7}$$

とおいて解を求めることができる．これを (7.6) に代入すると $V$ の満たすべき方程式として

$$\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u})\frac{\partial V}{\partial u_i}\frac{\partial V}{\partial u_k}=1 \tag{7.8}$$

がえられる．この微分方程式の解で $(n-1)$ 個のパラメタ $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を含むものが求められれば，$(7.7)$ によって $n$ 個のパラメタ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を含む $(7.6)$ の解が得られる．これを $(4.7)$ に代入すれば測地線の方程式がえられるはずであるが，このうち $k=2, \cdots, n$ に対するものは $x$ を含まず，それだけで測地線は決定される．$\alpha_1^{-1/2}\beta_k = \beta_k'$ とすれば，これは結局 $\alpha_k, \beta_k' (k \geqq 2)$ の $2n-2$ 個の任意定数を含む．

特に定点 $\mathrm{P}_0(a_0, b_0)$ を通る停留曲線に沿って $I[\boldsymbol{u}]$ を積分して得られる特性函数 (§1) を $U(x, \boldsymbol{u})$ とすれば $(6.4)$ によって

$$U = \frac{1}{2}(x-a_0)^{-1}R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0) \tag{7.9}$$

である．$R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0)$ は点 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{b}_0$ との測地的距離の平方に外ならない．§3 によって $U$ は $(7.6)$ の解であるはずである．$U$ を $(7.6)$ に代入すると，$R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0)$ が微分方程式

$$\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u}) \frac{\partial R}{\partial u_i}\frac{\partial R}{\partial u_k} = 4R \tag{7.10}$$

を満足するという結果がえられる．したがって測地的距離

$$r(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0) = R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0)^{1/2} \tag{7.11}$$

自身は

$$\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u}) \frac{\partial r}{\partial u_i}\frac{\partial r}{\partial u_k} = 1 \tag{7.12}$$

を満足する．

例題 1〕 Euclid 空間では $(6.7)$ によって

$$R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0) = |\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}_0\,|^2 = \sum_i (u_i - b_{0i})^2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_i} = 2(u_i - b_{0i}), \quad \sum\left(\frac{\partial R_i}{\partial u_i}\right)^2 = 4\sum (u_i - b_{0i})^2 = 4R$$

となり，$g_{ik}(u) = \delta_{ik}, h_{ik}(u) = \delta_{ik}$ であるから $(7.10)$ が満足されている．

例題 2〕 回転面の上の測地線．直交座標 $x, y, z$ をもつ空間で，$\rho = (x^2+y^2)^{1/2} = \rho(z)$ で表わされる回転面を考える．面上の曲線座標として $z$ と，$z$ 軸のまわりの角 $\phi$ をとれば，線素は

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right] dz^2 + \rho^2 d\phi^2$$

である．

$$\int^z \left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]^{1/2} dz = u_1, \quad \phi = u_2$$

と書けば

$$\rho = \rho(z) = f(u_1),$$
$$ds^2 = du_1{}^2 + f(u_1)^2 du_2{}^2$$

の形になる．故に

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = f^2, \quad h_{11} = 1, \quad h_{22} = 1/f^2$$

で $g_{12}$, $h_{12}$ は 0 となり，(7.8) は

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{1}{f(u_1)^2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2 = 1$$

となる．この方程式はさらに変数分離ができて，すぐわかるように，解

$$V = \pm \int^{u_1} \left[1 - \frac{\alpha_2{}^2}{f(u)^2}\right]^{1/2} du + \alpha_2 u_2$$

をもつ ($\alpha_2$ は積分定数)．これを (7.7) に代入し，(4.7) に従って $\partial W/\partial \alpha_2 = \beta_2$ とおけば

$$\pm \int^{u_1} [f(u)^2 - \alpha_2{}^2]^{-1/2} f(u)^{-1} du = u_2 - \alpha_1^{-1/2} \beta_2$$

を得る．これが測地線の方程式である．($\alpha_1^{-1/2}\beta_2 = \beta_2'$ を積分定数と考えてよい．)

# 第 6 章　変分法による近似解法 I Rayleigh-Ritz の方法

## §1　Poisson の問題と直接法

変分法の問題を解くのに，Euler の方程式によらない直接解法という方法があることは，前にのべた (§2.14)．むしろ Euler の方程式を解くのに，相当する変分問題を直接法で解くのが便利であることが多い．以下応用上の見地から，近似解法という点に重きをおいて，この方法を説明する．

一例として二次元の Poisson の問題を考える．これは平面の有界領域 G で Poisson の方程式

$$\nabla^2 u = f(x, y) \tag{1.1}$$

を満たし，G の境界 Γ の上で，境界条件

$$u = 0 \tag{1.2}$$

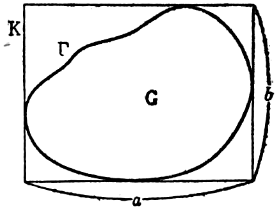
を満足する函数 $u = u(x, y)$ を求めよという，いわゆる境界値問題のひとつである．

すでに §3.1 で注意したように，この問題は汎函数

$$J[u] = \iint_G (u_x{}^2 + u_y{}^2 + 2fu)\, dx\, dy \tag{1.3}$$

の停留値（実は最小値）を求めよという変分法の問題と同等である．ただし $J[u]$ を作るとき，許される函数としては，境界条件 (*1.2*) を満足するものだけを考える．$J[u]$ を停留にする函数 $u = \bar{u}$ が求められれば，与えられた Poisson の問題が解けたことになる．

しかし $J[u]$ の停留函数を求めるために，その Euler 方程式を作るとしたら，(*1.1*) を得るだけで出発点に戻ってしまう．したがって，この考えを役に立たせようとすれば，Euler の方程式を使わずに $J[u]$ の停留函数を求めなければならない．



第 1.1 図

それには次のような方法が考えられる．まず汎函数 $J[u]$ がとる値には下界があることを示そう．領域 G を含むような，座標軸に平行な辺をもつ矩形 K をとって (第 1.1 図)，その二辺の長さを

$a,b$ とすると，不等式

$$\iint_G (u_x{}^2+u_y{}^2)\,dx\,dy \geqq \pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_G u^2 dx\,dy \tag{1.4}$$

が成り立つ．これは (3.4.5) を考えている $u(x,y)$ に適用して証明することができる．ただし (3.4.5) では積分範囲が長さ1の区間であったが，これを長さ $a$ の区間でおきかえれば，係数 $\pi^2$ は $\pi^2/a^2$ でおきかえられ，(3.4.5) を $y$ で積分することによって

$$\iint_K u_x{}^2 dx\,dy \geqq \frac{\pi^2}{a^2}\iint_K u^2 dx\,dy$$

を得る．ただし G の外では $u=0$ とおいて，$u$ の定義範囲を K まで拡大したと考えている．同様な式が $u_x$ を $u_y$, $a$ を $b$ でおきかえても成り立つから，これらを加えて，G の外では $u=0$ であることに注意すれば (1.4) が得られるのである．

勝手な正数 $\varepsilon$ に対して $2|fu|\leqq\varepsilon^2u^2+\varepsilon^{-2}f^2$ が成り立つから，

$$J[u]\geqq\iint_G (u_x{}^2+u_y{}^2)\,dx\,dy-\varepsilon^2\iint_G u^2 dx\,dy-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_G f^2\,dx\,dy$$

となり，$\varepsilon^2=\pi^2(a^{-2}+b^{-2})$ とえらんでおけば (1.4) と組み合せて，

$$J[u]\geqq-\frac{1}{\pi^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}\iint_G f^2\,dx\,dy \tag{1.5}$$

がえられる．この式はたしかに $J[u]$ が下界をもつことを示している．

したがって $J[u]$ の値には下限 $d$ があることになる．$d$ が $J[u]$ の最小値であるかどうかはまだわからないが，いずれにしても

$$J[u_n]\to d,\quad n\to\infty \tag{1.6}$$

のような函数列 $\{u_n\}$ が存在するはずである．このような函数列を $J$ に関する**極小列** (minimizing sequence) とよぶ．この $\{u_n\}$ に対して

$$u_n\to\bar{u},\quad n\to\infty \tag{1.7}$$

のような函数 $\bar{u}$ があって，$J[\bar{u}]=d$ であることが証明されるならば，$\bar{u}$ は $J$ の最小函数，したがってまた停留函数となり，$d$ が $J$ の最小値であることになる．

以上が直接解法の基本的な考え方であって，Poisson の問題とかぎらず，多くの問題に応用されるのであるが，ここには多くの理論的，実際的な問題が残っている．まず極小列をどうして作るかという問題である．$J[u]$ の下限 $d$ の

値ははじめからわかっているのではない（むしろそれを求めることが重要な問題である場合が多い）から，ある函数列 $\{u_n\}$ が極小列であるかどうかを判定することは，一般に簡単ではない．また $\{u_n\}$ が極小列であっても，(1.7) のような $\bar{u}$ があるとはかぎらないし，あってもそれが直ちに $J[u]$ の最小函数であると主張できない．このような理論的な問題のほかに，実際的な問題としては，あまり大きくない $n$ に対して $u_n$ を近似解として採用したいのであるが，その誤差を小さくするにはどうしたらよいかという問題が生ずる．

## §2　Ritz の方法

Ritz の方法は，前節で説明した直接法を実行するための便利な方法である．以下与えられた汎函数 $J[u]$ は下界をもつものとし，これに対する極小列を作ることを考えるのであるが，そのために $n$ 個のパラメタ $c_1, c_2, \cdots, c_n$ を含む適当な函数族［これを**試験函数** (trial function) という］

$$u = \Phi_n(x, y\,;\, c_1, \cdots, c_n) \tag{2.1}$$

のうちから $J[u]$ の値を最小にするものをとり，これを第 $n$ 近似函数 $u_n$ に採用しようというのである．(2.1) を $J[u]$ に代入すれば $J[u]$ は $c_1, \cdots, c_n$ だけの函数となるから，これを最小にする $c_i$ の値は

$$\partial J/\partial c_i = 0, \qquad i = 1, \cdots, n \tag{2.2}$$

から求められることになる．

(2.1) の函数は一般的であるが，たとえば $u$ に課せられている境界条件が同次線型であるときには，許される函数の列（基底）$w_1, w_2, \cdots$ を定めておいて

$$u = \Phi_n = c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n \tag{2.3}$$

を採用することが最もふつうに行われている（**線型試験函数**）．この方法は特に $J[u]$ が $u$ について二次（例えば (1.3)）の場合に便利である．このとき $J$ を二次，一次，零次の同次の項に分けて

$$J[u] = J_2[u] + 2J_1[u] + J_0 \tag{2.4}$$

とおくと

$$J[\Phi_n] = \sum_{i,k=1}^{n} c_i c_k J_2[w_i, w_k] + 2\sum_{k=1}^{n} c_k J_1[w_k] + J_0 \tag{2.5}$$

のような $c_k$ の二次整式がえられる．ここに $J_2[u, v]$ は二次形式 $J_2[u]$ に関する**極形式**である．たとえば (1.3) に対してはつぎのようになる：

$$J_2[u]=\iint_G (u_x{}^2+u_y{}^2)\,dx\,dy,\quad J_2[u,v]=\iint_G (u_x v_x+u_y v_y)\,dx\,dy,$$

$$J_1[u]=\iint_G fu\,dx\,dy,\quad J_0=0.$$

(2.5) に対して (2.2) を作ると，$c_i$ を定めるべき連立一次方程式

$$\sum_{k=1}^{n} c_k J_2[w_i, w_k]+J_1[w_i]=0,\qquad i=1,\cdots,n \tag{2.6}$$

がえられる．

このようにして作った $u_n$ が実際に極小列を与えるためには，試験函数が全く勝手ではいけない．たとえば $J[u]$ が (2.9.1) の形をもち，G が有界であるとすれば，函数族 (2.1) は，勝手な許される函数 $u$ に対して，$\Phi_n, \partial\Phi_n/\partial x, \partial\Phi_n/\partial y$ が $n\to\infty$ のとき $u, u_x, u_y$ を同時に一様に近似できるようにえらばれていれば十分である．境界条件がない場合には，例えば基底 $\{w_n\}$ として $x, y$ のあらゆる単項式 $x^m y^n$ をとっておけば，この条件は満足される．境界条件 $u=0$ があるときには，G で $w_0>0$，$\Gamma$ で $w_0=0$ であるような $w_0$ をひとつえらんで，$\{x^n y^m w_0\}$ を基底にとればよい場合が多い．

しかし実際の近似計算では $n\to\infty$ とすることは不可能であって，あまり大きくない $n$ で満足せねばならない．したがって基底 $\{\varphi_n\}$ は，そのはじめの数項で，正しい解 $\overline{u}$ が十分よく近似できるようなものでなければならない．このような基底を見出すには，直観と経験とが必要である．

例題 1〕 常微分方程式

$$xu''+u'+\frac{x^2-1}{x}u+x^2=0,\qquad 1\leqq x\leqq 2,$$

境界条件は

$$u(1)=u(2)=0$$

とする．相当する変分問題の汎函数は

$$J[u]=\int_1^2\left(xu'^2-\frac{x^2-1}{x}u^2-2x^2u\right)dx$$

である．

いま基底の最初の函数として，境界条件を満足する函数 $w_1(x)=(x-1)(2-x)$ をとり，$\Phi_1=c_1w_1$ とおいて，パラメタ $c_1$ を変えて第一近似 $u_1$ を定めてみる．(2.6) より

$$c_1=-\frac{J_1[w_1]}{J_2[w_1]}=\frac{\displaystyle\int_1^2 x^2 w_1\,dx}{\displaystyle\int_1^2\left(xw_1'^2-\frac{x^2-1}{x}w_1{}^2\right)dx}=0.8110,$$

$$u_1(x) = 0.8110\, w_1(x).$$

正しい解は

$$\bar{u}(x) = 3.6072\ J_1(x) + 0.75195\ Y_1(x) - x \quad (J_1, Y_1 \text{ は Bessel 函数})$$

である．$x = 1.5$ における値は

$$u_1(1.5) = 0.2027, \quad \bar{u}(1.5) = 0.2024.$$

この問題ではただ一個のパラメタで十分の近似がえられている．

例題 2〕 境界条件 $u(0) = 4$, $u(1) = 1$ に対する非線型微分方程式

$$u'' = \frac{3}{2} u^2$$

を考えよう．これに対する変分問題の汎函数は

$$J[u] = \int_0^1 (u'^2 + u^3)\, dx, \quad u(0) = 4, \quad u(1) = 1.$$

試験函数として

$$u = 4 - 3x + a_1(x - x^2) + a_2(x - x^3)$$

を採用すれば，$a_1, a_2$ を決定すべき式は，

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = \int_0^1 [2u'(1-2x) + 3u^2(x - x^2)]\, dx = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_2} = \int_0^1 [2u'(1-3x^2) + 3u^2(x - x^3)]\, dx = 0.$$

これを具体的に書けば，

$$\begin{cases} 1407 - 490a_1 + 726a_2 + 9a_1^2 + 27a_1a_2 + \dfrac{41}{2} a_2^2 = 0, \\ 1302 + 484a_1 + 750a_2 + 9a_1^2 + \dfrac{82}{3} a_1a_2 + 21a_2^2 = 0. \end{cases}$$

(問題が非線型であったから，これも連立二次方程式となった．) これを解くと，

$$\begin{cases} a_1 = -7.07004, \\ a_2 = \quad 2.72044, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -32.20, \\ a_2 = -12.60 \end{cases}$$

なる二組の解を得る．このうち前者は，初等的な解

$$\bar{u}(x) = 4/(1+x)^2$$

に対応するものである．この $a_1, a_2$ を用いて近似函数 $u_2$ を作ると，

$$u(0.5) = 1.7627. \qquad \text{正しい値は} \quad \bar{u}(0.5) = 1.7778.$$

誤差は約 1 % である．

後者は，楕円函数で表わされるもう一つの解の近似解を与える．

## §3 常微分方程式への帰着

Ritz の方法は，変分法の問題を近似的に有限変数の極値問題に帰着させるのであるが，問題をそこまで単純化しないで，例えば二変数以上の偏微分方程式に関する問題を，常微分方程式に帰着させる方法も考えられる．これは連続

無限個のパラメタを用いることに相当している．次に例をあげて説明しよう．

例題〕 矩形 $[-a\leqq x\leqq a, -b\leqq y\leqq b]$ に対する Poisson の方程式

$$\text{矩形内で}\ \nabla^2 u=-1,\quad \text{周上で}\ u=0$$

を考えよう．対応する変分問題の汎函数は (*1.3*) により

$$J[u]=\int\int[u_x{}^2+u_y{}^2-2u]dx\,dy$$

である．試験函数 $u$ を次の形にとってみる．

$$u=(b^2-y^2)f(x).$$

これは $y=\pm b$ における境界条件をすでに満たしている．この $u$ を $J[u]$ に代入すると，

$$J[u]=\int_{-a}^{a}dx\int_{-b}^{b}[(b^2-y^2)^2f'^2+4y^2f^2-2f(b^2-y^2)]dy$$
$$=\int_{-a}^{a}\left[\frac{16}{15}b^5f'^2+\frac{8}{3}b^3f^2-\frac{8}{3}b^3f\right]dx.$$

これを最小にするという変分問題は，微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{32}{15}b^5f'\right]-\frac{16}{3}b^3f+\frac{8}{3}b^3=0\quad \text{すなわち}\quad f''-\frac{5}{2b^2}f=-\frac{5}{4b^2}$$

を解くことに帰着する．この解は直ちに

$$f(x)=a_1\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b}+a_2\sinh\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b}+\frac{1}{2}.$$

$u$ が $x=\pm a$ でも境界条件を満たすという要求に対応して，積分定数を $f(\pm a)=0$ となるよう定めると，

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{g(x)}{g(a)}\right],\qquad u(x,y)=\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left[1-\frac{g(x)}{g(a)}\right],$$

ただし　$g(x)=\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b}$　である．

この方法による近似函数 $u$ は，比 $a/b$ が大きいほど真の解 $\bar{u}$ の良い近似を与える．

## §4　固有値問題

Ritz の方法は固有値問題にも応用できる．§3.2 以下で取り扱った Sturm-Liouville 型固有値問題 (*3.2.3*), (*3.2.4*) について，これを説明しよう．

§3.2 でのべたように，この固有値問題は (*3.2.2*) の汎函数 $K[u]=1$ という条件の下で (*3.2.1*) の汎函数 $J[u]$ を最小にする変分の問題と同等である(少なくも最小固有値 $\lambda_1$ に関するかぎり)．あるいは問題の同次性に注目すれば，付帯条件なしで

$$I[u]=J[u]/K[u] \tag{4.1}$$

を最小にする変分問題を考えてもおなじことである．そこで Ritz の方法を応用するには，境界条件 (*3.2.4*) を満足する函数から成る基底 $w_1, w_2, \cdots$ を定

めておいて，線型試験函数 (*2.3*) を作り，これを (*4.1*) に代入する．その結果分母子ともにパラメタ $c_1, \cdots, c_n$ の二次形式となり

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}c_ic_k \bigg/ \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}c_ic_k \tag{4.2}$$

の形となる．ここに

$$a_{ik} = a_{ki} = J[w_i, w_k], \quad b_{ik} = b_{ki} = K[w_i, w_k] \tag{4.3}$$

で，$J[u,v]$，$K[u,v]$ はそれぞれ $J[u]$，$K[u]$ の極形式である．すなわち (*3.2.1*)，(*3.2.2*) に対し

$$\left.\begin{aligned} J[u,v] &= \int [puv + q(uv' + u'v) + ru'v']\,dx, \\ K[u,v] &= \int \rho uv\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

(*4.2*) の分母は正値形式である．これは $K[u]>0$ $(u \neq 0)$ であることによる．したがって (*4.2*) の最小値問題には §1.5 の結果が適用でき，解は代数的な固有値問題

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \lambda' b_{ik})c_k = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{4.5}$$

を解けばえられる．特に (*4.5*) の固有値のうち最小のもの $\lambda_1'$ は函数 (*4.2*) の最小値であって，これはもとの問題の最小固有値 $\lambda_1$ の近似値であり，$\lambda_1'$ に相当する解 $c_1, \cdots, c_n$ で作った $u_n = \Phi_n$ ((*2.3*)) は最小函数 $\bar{u}$ の近似函数である．

§1.5 でみたように，解 $c_1, \cdots, c_n$ に対する (*4.2*) の値はちょうど $\lambda_1'$ に等しいから $\lambda_1' = J[u_n]/K[u_n]$ となり，これは当然 (*4.1*) の最小値 $\lambda_1$ より小さくない．すなわち $\lambda_1'$ は $\lambda_1$ の近似値であるばかりでなく，その上界である：

$$\lambda_1' \geqq \lambda_1. \tag{4.6}$$

なお $\lambda_1'$ は

$$\det(a_{ik} - \lambda' b_{ik}) = 0 \tag{4.7}$$

の最小根であるから，$\lambda_1'$ だけを求めるのには $c_1, \cdots, c_n$ を計算する必要がない．

特に $n=1$ としたときには (*4.7*) は一次方程式 $a_{11} - \lambda' b_{11} = 0$ となり，$w_1$ の代りに $w$ と書けば，

$$\lambda_1' = a_{11}/b_{11} = J[w]/K[w] \tag{4.8}$$

となる．このとき (*4.6*) は，$J[w]/K[w]$ がその最小値 $\lambda_1$ より小でないという，

自明の事実に帰着するが，応用上有用な結果を与えることが多く，**Rayleigh の原理**とよばれることがある．

上の結果はそのままもっと一般な固有値問題に拡張される．

**例題〕 絃の振動**　一様な絃の振動の方程式は，適当な単位系において

$$u''+\lambda u=0, \qquad -1\leqq x\leqq 1 \tag{4.9}$$

の形をとる．固有値 $\lambda$ は振動数の平方に比例する．両端の固定された絃では，境界条件

$$u(1)=u(-1)=0 \tag{4.10}$$

が課せられる．相当する変分問題では

$$J[u]=\int_{-1}^{1}u'^2\,dx, \quad K[u]=\int_{-1}^{1}u^2\,dx \tag{4.11}$$

である．いま境界条件を満足する函数 $w=1-x^2$ をとって (4.8) を計算すると

$$\lambda_1'=\frac{8}{3}\Big/\frac{16}{15}=2.5 \tag{4.12}$$

となる．正しい $\lambda_1$ の値は $\lambda_1=\pi^2/4=2.46740110$ であるから，近似値 $\lambda_1'$ はかなりよい．

近似を進めるために $w_1=1-x^2$, $w_2=x^2(1-x^2)$ とおいて (4.3) を計算すると

$$a_{11}=\frac{8}{3}, \quad a_{12}=\frac{8}{15}, \quad a_{22}=\frac{88}{105},$$

$$b_{11}=\frac{16}{15}, \quad b_{12}=\frac{16}{105}, \quad b_{22}=\frac{16}{315}.$$

これを用いて (4.7) を作ると

$$\lambda'^2-28\lambda'+63=0$$

となり，その二根は $14\pm\sqrt{133}$ すなわち

$$\lambda_1'=2.467437, \quad \lambda_2'=25.532563 \tag{4.13}$$

となる．$\lambda_1'$ は正しい値 $\lambda_1$ (前出) にきわめて近く，誤差は 0.002 % 以下である．

$\lambda'=\lambda_1'$ に対して (4.5) から $c_2/c_1$ が計算できる．これより近似固有函数 $u_1$ が求まるが，$u_1$ は定数因子だけ不定であるから，$K[u_1]=b_{11}c_1{}^2+2b_{12}c_1c_2+b_{22}c_2{}^2=1$ のように正

第 4.1 表

| $x$ | $u_1(x)$ | $\varphi_1(x)$ | $u_1(x)-\varphi_1(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.99907 | 1.00000 | −0.00093 |
| ±0.1 | 0.98690 | 0.98769 | −0.00079 |
| ±0.2 | 0.95064 | 0.95106 | −0.00042 |
| ±0.3 | 0.89109 | 0.89101 | +0.00008 |
| ±0.4 | 0.80958 | 0.80902 | +0.00056 |
| ±0.5 | 0.70795 | 0.70711 | +0.00084 |
| ±0.6 | 0.58859 | 0.58779 | +0.00080 |
| ±0.7 | 0.45441 | 0.45399 | +0.00042 |
| ±0.8 | 0.30885 | 0.30902 | −0.00017 |
| ±0.9 | 0.15588 | 0.15643 | −0.00055 |
| ±1.0 | 0 | 0 | 0 |

規化すると，結局

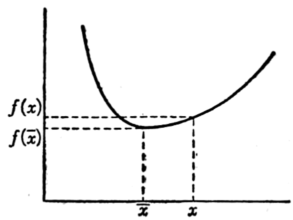
$$u_1 = (0.99907 - 0.22055\,x^2)(1 - x^2). \tag{4.14}$$

正しい固有函数は $\varphi_1 = \cos(\pi x/2)$ である．$u_1(x)$ の値を $\varphi_1(x)$ と比較すると第4.1表のようになり，誤差はいたるところ ±0.001 以内になっている．

## §5 停留性の効果

前節で例示した固有値問題に対する Ritz の方法において，最低固有値 $\lambda_1$ に対する近似値は，第一近似においてすでに十分の近似度が得られ，第二近似ではこれはさらに改良されている．これは理由のないことではなく，最小値 $\lambda_1$ の停留性にもとづくのである．

これを理解するには，変数 $x$ のふつうの函数 $f(x)$ の最小値 $f(\bar{x})$ を考えてみるのがよい(第5.1図)．$f(x)$ が微分可能であれば，最小点 $\bar{x}$ は停留点であって，$f(x)$ のグラフは $x=\bar{x}$ において増減を停止する．したがって $x$ がちょうど $\bar{x}$ に一致しなくても，$\bar{x}$ の近所にあれば，$f(x)$ は最小値 $f(\bar{x})$ にきわめて近く，$|f(x)-f(\bar{x})|$ は $|x-\bar{x}|$ にくらべて高位の微小量になる．解析的には，$f'(\bar{x})=0$ によってえられる展開式

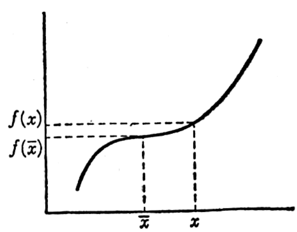


第 5.1 図

$$f(x)-f(\bar{x}) = \frac{1}{2}f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + \cdots\cdots$$

がこの事実を表わしている．ここにのべたことは，実は $\bar{x}$ が最小点あるいは極小点でなくても，停留点であればよいことは明らかであろう(第5.2図)．

したがって，$\bar{x}$ の近似値 $x$ を用いて $f(\bar{x})$ を $f(x)$ で近似したとき，その誤差は $x$ 自身の誤差にくらべて，はるかに小さくなるわけである．おなじ事情が函数 $f(x)$ のかわりに汎函数 $J[u]$ あるいは $J[u]/K[u]$ を考えたときにも存在するので，汎函数の停留値は，比較的粗い近似函数を用いても，精密に計算することができるのである．これが，Rayleigh あるいは Ritz の方法によって固有値を計算するときに，精密な結果の得られた理由である．



第 5.2 図

ここにのべたことは，函数あるいは汎函数の停留値に対してだけ適用できる；

停留点 (停留函数) に対してはこのような事情はない．とくに，停留値 $J[\bar{u}]$ によい近似がえられたから，用いた近似函数 $u$ は停留函数 $\bar{u}$ に対しておなじ程度の近似度をもつと考えると誤りである．これは上の議論を逆にみれば明らかなことである．粗くいって，$|J[u]-J[\bar{u}]|$ が $\varepsilon^2$ の程度ならば，$|u-\bar{u}|$ は $\varepsilon$ の程度であると考えられる．この命題を正確に定式化することはここには省略するが，つぎのことだけ注意しておく．$\bar{u}$ が最小点または最大点ならば，このことはだいたい成立すると考えてよいが，その他の場合には必ずしも成立しない．特に $\bar{u}$ が鞍点であるときにはこの命題は正しくない．これは，人が峠とおなじ高さの点にいることから峠の近くにいると結論するのが誤りであるのと同様である．

停留性を利用して固有値の精密な近似値を求めることを，最初に意識的に行なったのは Rayleigh である．これに対して Ritz の考えは，むしろ固有函数に対する極小列を求めることを目的としており，停留性という考えがうすいようにみえる．固有値および固有函数の近似計算における，上にのべた方法は **Rayleigh-Ritz の方法** (以下 R-R の方法と略記する) と通称されているが，二人の考え方にはこのような相違がみられるのである．

R-R の方法は，前節の例にみられるように，少なくも固有値に関するかぎりでは，きわめて強力なものであるが，難点がないでもない．この例では正確な固有値と比較して近似値がなるほど精密であることがわかったのであるが，正確な固有値がわからないとき (これがふつうのばあいである)，近似値の精度をどうして判断したらよいか？　R-R の方法はこの精度を判定する方法を与えない．ただ経験によって多くのばあい結果は精密であると信ぜられているにすぎない．この種の判定には別の理論が必要であるが，これについては次章でのべることにし，本章では R-R の方法を，種々の場合に形式的に応用することで満足することにする．

## §6　高位の固有値

§4 では最低の固有値 $\lambda_1$ だけを考えたが，R-R の方法は高位の固有値 $\lambda_2, \lambda_3, \cdots$ にも適用できる．近似的な固有値問題 (*4.5*) は $n$ 個の固有値

$$\lambda_1' \leqq \lambda_2' \leqq \cdots \leqq \lambda_n' \tag{6.1}$$

をもつが，実はこれらは $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の**上界**を与えるのである．すなわち

$$\lambda_i' \geqq \lambda_i, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{6.2}$$

が成り立つ.

これは固有値の最大-最小性(§1.6)を用いて証明される. (*4.2*)は$J[u]/K[u]$の$u$に特別な形を代入したものであるから, 汎函数$J/K$の変域を制限したことになる. したがって, おなじ$(i-1)$個の同次束縛をさらに加えた場合, (*4.2*)の最小値は(*4.1*)の最小値より小さくなく, したがって最小値の最大値, すなわち第$i$固有値についても, おなじことが成り立つのである.

上の$\lambda_i'$は用いた基底函数の数$n$によるから, これを$\lambda_i^{(n)}$と書くことにすると, 一定の基底$w_1, w_2, \cdots$に対して$n$を増してゆけば, $\lambda_i^{(n)}$は上から$\lambda_i$を近似する:

$$\lambda_i^{(i)} \geqq \lambda_i^{(i+1)} \geqq \cdots \geqq \lambda_i, \qquad i=1,2,\cdots. \tag{6.3}$$

$n$を増せば許される函数の範囲がひろがることになるから, (*6.3*)も最大-最小性によって証明される. (*6.3*)で$\lim_{n\to\infty}\lambda_i^{(n)}=\lambda_i$が成立するかどうかは, 基底$\{w_n\}$が適当にえらばれているかどうかに依存する. たとえば§4で考えた問題(*4.1*)では, 正しい固有函数$\varphi_i$に対して, $\{w_n\}$の一次結合およびその導函数が$\varphi_i$および$d\varphi_i/dx$を同時に任意の精度で近似できるように, 基底がえらばれていれば十分である. しかし実際の計算では$n\to\infty$とすることはできないので, (*6.3*)のはじめの数項がある値に収束するようにみえれば満足される.

高位の固有値も汎函数$J[u]/K[u]$の停留値であるから, R-Rの方法でえられる上界は精密なものと考えられるが, 精度は最低固有値$\lambda_1$のばあいにくらべて劣る. これは$i$が大きくなると, 固有函数の形が複雑になるため, 簡単でよい近似函数をうることがしだいに困難になるためである.

例題〕 §4の例において, $w_1, w_2$を用いて計算した$\lambda_2'$は, 実は絃の振動の第三固有値$\lambda_3$の固有値である. これは問題の対称性によるので, $w_1$も$w_2$も原点に関して対称な函数であるが, 対称な振動だけを考えれば$\lambda_1$のつぎの固有値は$\lambda_3=9\pi^2/4=22.20661$となるからである. $\lambda_2'=25.5$はこれにくらべてかなり大きく, 誤差は10%以上あって, 精度は$\lambda_1'$の場合よりもはるかに劣る.

## §7 自然な境界条件

§4では境界条件(*3.2.4*)を採用したが, その代りに(*3.2.6*)を採用したとすれば, 相当する変分問題の汎函数$J[u]$として, (*3.1.1*)に(*3.1.10*)を加えたものをとり, そのかわり境界条件は不用となる(自然な境界条件, §3.

2). $K[u]$ の方は前の通りである. これだけの修正をすれば, §4の方法がそのまま適用できる.

また§4ではSturm-Liouville型の固有値問題について論じたが, もっと一般の固有値問題に対しても, おなじ結果の成り立つことは明らかであろう. ここでは自然な境界条件の現われる例として, 一端固定, 一端自由な棒の振動を取り扱ってみよう.

〔例題〕 適当な単位系において, このような棒の運動は, 固有値問題

$$u'''' = \lambda u, \quad 0 \leqq x \leqq 1, \tag{7.1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \tag{7.2}$$

$$u''(1) = u'''(1) = 0 \tag{7.3}$$

から決定される. 相当する変分問題は, §4 と同様に $J/K$ の形の汎函数の最小値問題であるが, $J, K$ は

$$J[u] = \int_0^1 u''^2\, dx, \quad K[u] = \int u^2\, dx \tag{7.4}$$

で与えられる. ここで $u$ には境界条件 (7.2) が課せられるが, (7.3) は自由端での自然な境界条件であって (§2.11, 問題参照), 停留函数はこれを満足せねばならないのであるが, 許される函数 $u$ にはこの条件をつける必要がないのである. むろんつけて悪いことはなく, つけた方が結果はよくなるが, 計算は複雑になる.

(7.2) を満足する函数として

$$w_1 = x^2, \quad w_2 = x^3, \quad w_3 = x^4, \quad \cdots \tag{7.5}$$

をとり, これに対して (4.3) を計算すると $\left(J[u, v] = \int u''v''\, dx\right)$,

$$a_{ik} = \frac{i(i+1)k(k+1)}{i+k-1}, \quad b_{ik} = \frac{1}{i+k+3}. \tag{7.6}$$

$n = 1, 2$ としてえられる結果は (記号は§6参照),

$$\begin{aligned} &\lambda_1^{(1)} = 20, \\ &\lambda_1^{(2)} = 12.480, \quad \lambda_2^{(2)} = 1211.520. \end{aligned} \tag{7.7}$$

正しい $\lambda_i$ の値は $\cos\theta\cosh\theta + 1 = 0$ の根の四乗であることが知られている[(1)]. 特に $\lambda_1 = 12.36236$ であるから, $\lambda_1^{(2)}$ は約1%の誤差をもつ.

$\lambda_1^{(3)}$ を計算しようとすると, 解くべき方程式 (4.7) は三次方程式になるので, 計算がやっかいである[(2)]. これをさけるには, 基底 (7.5) を改良するのがひとつの方法である. 自然な境界条件 (7.3) まで満足する函数をとって

$$w_1 = x^2(6-4x+x^2), \quad w_2 = x^3(10-10x+3x^2), \quad \cdots \tag{7.8}$$

を基底とすれば, 前よりもよい結果が得られるであろう. 実際今度は, 計算の結果

(1) Lord Rayleigh, Theory of Sound, I, §174 参照.

(2) ただし高速度計算機を用いれば計算は容易であり, 行列要素 (7.6) が簡単であるだけに, (7.8) よりも (7.5) の方がかえって便利であろう.

$$\lambda_1^{(1)} = 12.4615,$$
$$\lambda_1^{(2)} = 12.36250, \quad \lambda_2^{(2)} = 515.86 \tag{7.9}$$

となって，$\lambda_1^{(1)}$ ですら前の $\lambda_1^{(2)}$ よりもよい．$\lambda_1^{(2)}$ の誤差は 0.001 % の程度である．$\lambda_2$ の正しい値は $\lambda_2 = 485.5217$ であるから，$\lambda_2^{(2)}$ の方にはまだ 6 % 程度の誤差がある．(7.5) を用いて計算した (7.7) の $\lambda_2^{(2)}$ には 100 % 以上の誤差があって，役に立たない．

以上は固有値 $\lambda_i$ の誤差を考えたのであって，振動数は $\lambda_i^{1/2}$ に比例するから，振動数の相対誤差は上の値の半分になることに注意されたい．

固有函数の近似函数 $u_1$ は §4 の例と同様にして計算できる．便宜上 $u_1(1) = 1$ のように正規化すると

$$u_1 = 0.291350\,x^2(6-4\,x+x^2)+0.041983\,x^3(10-10\,x+3\,x^2) \tag{7.10}$$

となる．これを正しい固有函数 $\varphi_1$ とくらべると第7.1表のようになり，誤差は 0.0003 程度以内になる．

第 7.1 表

| $x$ | $u_1(x)$ | $\varphi_1(x)$ | $u_1(x)-\varphi_1(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.06379 | 0.06387 | −0.00008 |
| 0.4 | 0.22998 | 0.22988 | +0.00010 |
| 0.6 | 0.46142 | 0.46113 | +0.00029 |
| 0.8 | 0.72570 | 0.72548 | +0.00022 |
| 1.0 | 1.00000 | 1.00000 | 0 |

## §8 膜の振動

偏微分方程式の固有値問題の例として，薄い膜の振動を考えてみよう．$xy$ 面の領域 G に，縁 Γ を固定して一様な張力で張られた膜の振動は，次の固有値問題で決定される：

$$\text{G で} \qquad \nabla^2 u + \lambda u = 0, \tag{8.1}$$

$$\Gamma \text{ で} \qquad u = 0. \tag{8.2}$$

相当する変分問題の汎函数は $J/K$ の形で，

$$J[u] = \iint_G (u_x{}^2 + u_y{}^2)\,dx\,dy, \quad K[u] = \iint_G u^2 dx\,dy \tag{8.3}$$

で与えられる (§3.2)．許される函数 $u$ には境界条件 (8.2) が課せられる．

例題〕 楕円膜[(1)] 楕円の長半径，短半径をそれぞれ $a, b$ とすると，Γ の方程式は $(x/a)^2+(y/b)^2 = 1$ である．許される函数として

$$w = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{8.4}$$

を採用して計算すれば，Rayleigh の原理により

(1) これに類似の問題に楕円の切口をもつ導波管の問題がある．D §3.5 参照．

$$\lambda_1' = \frac{J[w]}{K[w]} = 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \tag{8.5}$$

を得る．特に半径1の円では $\lambda_1' = 6$ となるが，正しい値 $\lambda_1$ は Bessel 函数 $J_0(r)$ の最小の零点の平方に等しく，$\lambda_1 = 5.779$ である[1]から，精度は割合よい．離心率が大きくなれば，誤差はもっと大きくなるであろう．一方において，辺の長さが $2a, 2b$ である矩形膜の最小固有値は $(\pi^2/4)(a^{-2}+b^{-2})$ である $\left(\text{頂点を } (0,0), (2a,0), (0,2b), (2a,2b) \text{ とすれば固有函数系は } \sin\frac{m\pi x}{2a}\sin\frac{n\pi y}{2b},\ m, n = 1, 2, \cdots\right)$ が，上の楕円はこの矩形に含まれるので，その固有値はこれよりも大きいことがわかっている（§7.1）．こうして

$$2.4674\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \leqq \lambda_1 \leqq 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \tag{8.6}$$

という評価がえられた．これはあまり精密ではないが，上下界の平均をとれば，$\lambda_1$ が誤差10％程度で，振動数は $\lambda_1^{1/2}$ に比例するから，誤差5％程度で求められる．パラメタの数をふやして Ritz の方法を用いれば，結果は改良される．

なお上で考えた矩形膜の第二の固有値は $(\pi^2/4)(4a^{-2}+b^{-2})$ であるから

$$2.4674\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \leqq \lambda_2 \tag{8.7}$$

が成り立つことに注意しておく（§7.1参照）．

特に $a=2,\ a=1$ のとき

$$u = \left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right)\left(c_1-c_2\frac{x^2}{4}-c_3y^2\right) \tag{8.8}$$

とおいて $c_1, c_2, c_3$ を変化させ $J[u]/K[u]$ を最小にすると[2]

$$c_1 = 0.7845,\quad c_2 = 0.5923,\quad c_3 = 0.2005 \tag{8.9}$$

のとき（このとき $K[u]=1$）$\lambda_1$ の上界として

$$\lambda_1' = 3.569 \tag{8.10}$$

を得る．(8.6) の与える上界は 3.75 であるから，かなり改良されている．(8.6) の与える下界は 3.084 である．なお (8.7) によると $\lambda_2 \geqq 4.934$ である．もっと精密な $\lambda_1$ の下界は §7.12, 例題3で与える．

## §9　板の振動

自然な境界条件の現われる問題として，自由縁をもつ板の振動について一言しておく．平衡状態で $xy$ 平面の領域 G を占める薄い板の振動は，適当な単位系において，次の微分方程式で記述される：

$$\nabla^2\nabla^2 u = \lambda u. \tag{9.1}$$

境界条件は板を支持する方法によって異なるが，自由縁の板では次の形をとる：

$$\sigma\nabla^2 w+(1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0,\quad \frac{\partial\nabla^2 w}{\partial n}+(1-\sigma)\frac{d}{ds}\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial t} = 0, \tag{9.2}$$

(1) Lord Rayleigh, 前掲書, §202.
(2) F. Trefftz, Math. Ann., **108** (1933), 595–604 による．

ここに $\sigma$ は板の物質の Poisson 比である．$s$ は境界 $\Gamma$ に沿っての弧長，$\partial/\partial t$, $\partial/\partial n$ は考えている点で $\Gamma$ への切線および外向き法線方向に沿う微分を表わす．もし $\Gamma$ が角(カド)をもつ場合には，その点の両側で $\partial^2 w/\partial n\partial t$ が等しいという条件を加えなければならない．

このように自由縁の板の振動では，微分方程式 (9.1) は割合に簡単であるが，境界条件が複雑であって，問題を正確に解くことは困難である．しかしこれに対する変分問題は，境界条件を考えなくてもよいために，このような複雑さをもたない．すなわち汎函数は再び $J/K$ の形をとるが，$J, K$ は次の式で与えられる：

$$J[u]=\iint_G[(\nabla^2u)^2-2(1-\sigma)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)]\,dx\,dy, \tag{9.3}$$

$$K[u]=\iint_G u^2\,dx\,dy. \tag{9.4}$$

しかも問題は自由な境界の場合に属し，許される函数 $u$ には境界条件が不用である．境界条件 (9.2) は，自然な境界条件として，この変分問題から導かれたのであって独立に与えられたのではない．もともとこの変分問題は力学の原理 (Hamilton の原理) に由来するのであって，この意味では固有値問題 (9.1), (9.2) よりも，変分問題 (9.3), (9.4) の方がより基本的なのである．(この事情は，実はいままでに述べた絃，棒，膜などの振動についてもあてはまる．) したがって変分問題をそのままの形で直接法によって解くことは，問題をその根源において取り扱うことを意味する．数学的には，こうすることによって複雑な境界条件を無視することができるという，大きな利益がある．

例題〕 自由辺をもつ正方形の板の振動　これは R-R の方法によって Ritz によってはじめて計算され，直接法による最初の著しい成果であった．この計算はかなり複雑であるから，ここにのべることは差し控える．ただ，きわめて簡単な試験函数 $w=xy$ を用いて，四点 $(\pm 1, \pm 1)$ を頂点とする辺長 2 の正方形の最低固有値の上界を出しておこう．計算はきわめて簡単で，$\lambda_1$ の上界として

$$\lambda_1'=18(1-\sigma)$$

を与える．$\sigma=0.225$ のときには $\lambda_1'=13.95$ となるが，正しい値は 0.1 % 以内の誤差で $\lambda_1=12.44$ である (§7.12, 例題 4 参照)．

注意 1〕 数学的には自由縁の板の最小の固有値は 0 であって，三重に縮重している．これは板が剛体として運動できることに対応するもので，$\alpha x+\beta y+\gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma$ は任意定数) が固有函数である．実際の振動はこの三次元函数空間に直交する函数で表わされる．

上の $w=xy$ はこの条件を満足しているので，$\lambda_1'$ は 0 でない最低固有値の上界を与えるのである．

注意 2〕 上の $w$ は $\lambda=0$ とした運動方程式 (9.1) および境界条件 (9.2) を満足しているが，頂点での境界条件 (前述) が満たされていないので，正しい固有函数ではない．しかし上に注意したように，境界条件は満足されていなくても変分法の応用には差支えないのである．

## §10 Schrödinger 方程式

R-R の方法は，量子力学の Schrödinger 方程式にもひろく応用されている．

例題 1〕 ヘリウム型原子のエネルギー準位　ヘリウム型原子の波動方程式は，原子単位系で次の形をとる：

$$\left(\frac{1}{2}\nabla_1^2+\frac{1}{2}\nabla_2^2+\frac{Z}{r_1}+\frac{Z}{r_2}-\frac{1}{r_{12}}+\lambda\right)u=0, \qquad (10.1)$$

ただし $u$ は六変数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ の全空間で定義された函数，$\nabla_1^2=(\partial^2/\partial x_1^2)+(\partial^2/\partial y_1^2)+(\partial^2/\partial z_1^2)$，$r_1=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)^{1/2}$，$r_{12}=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{1/2}$ などである．$Z$ は原子番号を表わす定数である．

(10.1) は固有値問題であって，相当する変分問題の汎函数は例によって $J/K$ の形をもち

$$J[u]=\int\left[\frac{1}{2}(\mathrm{grad}_1 u)^2+\frac{1}{2}(\mathrm{grad}_2 u)^2+\left(-\frac{Z}{r_1}-\frac{Z}{r_2}+\frac{1}{r_{12}}\right)u^2\right]dx_1\cdots dz_2, \qquad (10.2)$$

$$K[u]=\int u^2\,dx_1\cdots dz_2 \qquad (10.3)$$

である．ここに $(\mathrm{grad}_1 u)^2=u_{x_1}^2+u_{y_1}^2+u_{z_1}^2$ などである．

(10.1) の $u$ には実は $K[u]$ が有限という“境界条件”がついている．変分問題でも，許される函数は当然この条件を満足するものとする．

R-R の方法で最小固有値 $\lambda_1$ の近似値を求めるのに，次のような非線型試験函数を用いてみよう．

$$u=e^{-c(r_1+r_2)}, \qquad c>0. \qquad (10.4)$$

$J[u]$，$K[u]$ は初等的に計算されて

$$\frac{J[u]}{K[u]}=c^2-2\left(Z-\frac{5}{16}\right)c$$

となる．これが最小になるように $c$ をきめると

$$c=Z-\frac{5}{16}, \quad \lambda_1'=-\left(Z-\frac{5}{16}\right)^2 \qquad (10.5)$$

がえられる．$\lambda_1'$ は $\lambda_1$ の上界であるから，$\lambda_1$ は負であることがわかる．ヘリウムでは $Z=2$ であるから $\lambda_1'=-2.848$ となるが，実測値は $-2.904$ の程度であって，用いた試験函数が簡単な割合には，結果は精密である．実際はもっと詳しい計算が行われている．(10.4) の函数に，38 個のパラメタをもつ線型試験函数を乗じたものを用いた大掛

りな計算の結果, $\lambda_1' = -2.9037225$ という値がえられている(1).

イオン化エネルギーは $-\frac{1}{2}Z^2-\lambda_1$ に等しいので,

$$-\frac{1}{2}Z^2-\lambda_1' = \frac{1}{2}Z^2-\frac{5}{8}Z+\frac{25}{256} \tag{10.6}$$

がその下界を与える. $Z=1$ のときその値は $-0.0273$ となって負になるので, 上のような簡単な近似からは, 負の水素イオン $H^-$ の存在は結論できない.

例題 2〕 一次元の固有値問題

$$u''+\lambda\frac{e^{-x}}{x}u=0, \qquad 0<x<\infty \tag{10.7}$$

を考える. これは湯川ポテンシアル $e^{-x}/x$ の強さ $\lambda$ がどんな値をとれば, ちょうどエネルギー 0 の“定常状態”が存在するかという問題 (零エネルギー共鳴) である. したがって

$$u(0)=0, \qquad u(\infty)\ \text{有限} \tag{10.8}$$

という境界条件を要求する.

この問題は Sturm-Liouville 型 (§3.2) で, $p=q=0$, $r=1$, $\rho=e^{-x}/x$ の場合であるから, 相当する変分問題の汎函数は $J/K$ の形で, $J, K$ は次式で与えられる:

$$J[u]=\int_0^\infty u'^2\,dx, \quad K[u]=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}u^2\,dx. \tag{10.9}$$

$u$ に対して, 境界条件を満足する非線型試験函数

$$u=1-e^{-cx}, \qquad c>0 \tag{10.10}$$

を採用すると

$$J[u]/K[u]=\frac{c}{2\log\dfrac{(c+1)^2}{2c+1}} \tag{10.11}$$

となる. $c$ を適当にえらんでこの値をなるべく小さくすると, たとえば $c=1.5$ のとき最小固有値 $\lambda_1$ の上界

$$\lambda_1'=1.6804 \tag{10.12}$$

を与える. 正しい値はほとんど 1.6800 に等しいと考えられているから, この上界はかなり精密である. 下界については §7.12, 例題 6 をみよ.

## §11　停留値と停留函数

以上変分法による近似計算の例をいくつかあげてきたが, これらの計算は大別して, 汎函数の停留値および停留函数の計算に分けられる. 固有値問題では, 固有値が $J/K$ という形の汎函数の停留値に等しいので, 停留値の計算が重要な意味をもっている. これに反して §1 の Poisson の問題などでは, ふつう停留函数だけが目的で, 停留値そのものは要求されない. ところが, §5 で注意

(1) T. Kinoshita, Phys. Rev., **105** (1957), 1490–1502.

したように，変分法による近似計算は停留値そのものの計算において特別の威力を発揮するのであるから，求める量が停留値であるかどうかによって，変分法の応用の効果はかなり違ってくるのである．

一体応用上の問題では，窮極的に要求されるのは一個あるいは数個の量 $Q$ の値であって，ある函数そのものを知りたいという場合はむしろ少ないであろう．もし求める $Q$ の値を停留値とするような汎函数 $J[u]$ があれば，変分法によって $Q$ の精密な近似値を求めることができるであろう．このような $J$ を量 $Q$ の**変分表式**と呼ぶことにする．上にみたように，弾性体の固有振動数の平方は $J/K$ の形の変分表式をもっている．他の量についても，それぞれ変分表式が存在するに違いない．これを見出すことは応用数学のひとつの課題である(1)．

§1の Poisson の問題のように，考えた汎函数 $J[u]$ の停留函数 $\bar{u}$ だけが要求されて，その停留値そのものが重要でなかった問題でも，問題を適当に変形することによって，停留値を求める問題に帰着させることが可能である．すなわち，求めるものが函数 $\bar{u}$ であっても，ある一点 $(x_0, y_0)$ における函数 $\bar{u}$ の値 $\bar{u}(x_0, y_0)$ が，ある汎函数 $I[v]$ の停留値に等しいか，少なくも停留値と簡単な関係にあるようにすることができる．ただし $v$ は $u$ とは一致しないかもしれない．これは興味ある方法なのであるが，本書ではそこまで立ち入る余裕がない(2)．

変分法による計算において，もうひとつ考えるべき問題がある．たとえば§10，例題1の方法で Schrödinger 方程式の近似解 $u$ を求め，これに対して $\int r_1 u^2 dx_1 \cdots dz_2$ を計算したとき，結果はどのくらい精密であろうか．一般に，汎函数 $J[u]$ に変分法を適用して，停留函数 $\bar{u}$ の近似函数 $u$ を求めたとき，別の汎函数 $H$ に対して，$H[u]$ は $H[\bar{u}]$ のよい近似になるであろうかという問題である．$H=J$ であれば，近似はきわめてよいというのが変分法の特徴であった(§5)が，その他の場合には答は簡単に与えられない．$\bar{u}$ が $J$ の最小函数であるときには，$u-\bar{u}$ はともかく“小さい”と考えられるから(§5)，もし $H[u]$ が“連続”な汎函数であれば答は肯定的である．しかしふつう現われる汎函数は必ずしも連続ではない（上にあげた $r_1 u^2$ の積分は汎函数として“不連続”で

(1)　次章以下にも変分表式の例は多数現われる．

(2)　たとえば次の文献を参照されたい．J. B. Diaz and H. J. Greenberg, J. Math. Phys., 27 (1948), 193–201; T. Kato, Math. Ann., **126** (1953), 253–262.

ある）ので，$H[u]-H[\bar{u}]$ は必ずしも小さいとはいえない．この点は変分法の応用にあたって十分注意する必要がある．この問題についてもある程度研究はなされているが，ここでは立ち入らない．

## §12　散乱位相，散乱長

いままで考えたものとやや違った種類の問題として，波の散乱の問題の変分法による近似解法がある．いままではだいたい汎函数の最小値が問題であったが，今度は最小でも最大でもない鞍点の現われるのがふつうで，それだけ数学的な困難は大きいが，実際上はかなり有効に応用されている．以下簡単のために一次元の問題についてこれを説明する．

散乱の理論には次の形の微分方程式が現われる：

$$-Lu \equiv u''+[k^2-V(x)]u=0, \qquad 0<x<\infty. \tag{12.1}$$

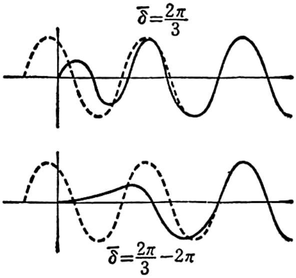
$k$ は与えられた正の定数，$V(x)$ は“ポテンシアル”を表わす与えられた函数である．境界条件として

$$u(0)=0 \tag{12.2}$$

が課せられる．$V(x)$ が $x\to\infty$ のとき十分速く 0 に向うとすると（以下の議論には $\int_0^\infty |V(x)|x\,dx<\infty$ ならば十分である）正しい解 $\bar{u}(x)\not\equiv 0$ は $x\to\infty$ で漸近形

$$\bar{u}(x)\sim A\sin(kx+\bar{\delta}) \tag{12.3}$$

をとる．以下記号 ～ は，両辺の差が $x\to\infty$ で十分速く 0 に近づくことを意味するものと約束する．$\bar{\delta}$ は**散乱位相** (scattering phase) あるいは**位相のずれ** (phase shift) と呼ばれ，散乱の模様を決定する重要な量である．(12.3)から定まる $\bar{\delta}$ は $\pi$ の整数倍だけ不定であるが，この不定な整数は，十分長い区間 $0<x<a$ にある $\bar{u}(x)$ の節（零点）の数を $\sin kx$ の節の数とくらべることによって，一義的に決定することができる（第 12.1 図）．



第 12.1 図

このようにして定めた $\bar{\delta}=\bar{\delta}(k)$ は次の性質をもつ．（証明は大部分省略する．）

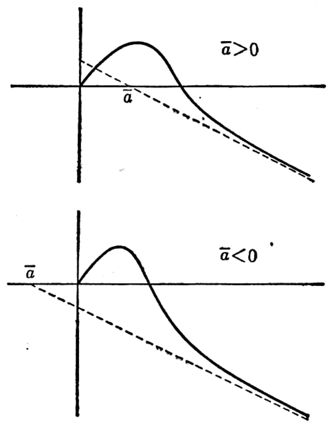
i）$\bar{\delta}=\bar{\delta}(k)$ は $0<k<\infty$ で $k$ の連続函数である．

ii)　$k\to\infty$ のとき $\bar{\delta}(k)\to 0$ である．

iii)　$k\to 0$ ならば，ふつう $\bar{\delta}(k)\to N\pi$ となり，$N$ は固有値問題 $u''+(\lambda-V)u=0$（境界条件 $u(0)=0,\ u(\infty)=$ 有限）の固有値 $\lambda$ で負のものの数に等しい．ただし例外として $\bar{\delta}(k)\to\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi$ になることがある．これは $\lambda=0$ が上の問題の固有値になるときにおこる．

iv)
$$\lim_{k\to 0} k\cot\bar{\delta}(k)=-\frac{1}{\bar{a}} \tag{12.4}$$

は存在する．$\bar{a}$ は**散乱長**(scattering length) とよばれる．(12.1) において $k=0$ としたときの解は遠方で $A\left(1-\frac{x}{\bar{a}}\right)$ という漸近形をもつが，この $\bar{a}$ が散乱長にほかならない（第12.2図）．iii) にのべた例外の場合は $\bar{a}=\infty$ の場合に相当する．



第 12.2 図

v)　$V(x)$ が増せば $\bar{\delta}(k)$ は減る．詳しくいえば，いたるところ $V_1(x)\leqq V_2(x)$ である二つのポテンシアルに対する散乱位相を $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2$ とすれば，$\bar{\delta}_1(k)\geqq\bar{\delta}_2(k)$ が成り立つ．これは $V(x)$ が増せば (12.1) の解はおそく振動する (I, 295 頁) ことから容易に証明される．恒等的に $V(x)=0$ ならば $\bar{\delta}=0$ であるから，$V(x)\geqq 0$ ならば $\bar{\delta}(k)\leqq 0$，$V(x)\leqq 0$ ならば $\bar{\delta}(k)\geqq 0$ である．

## §13　函数の比勾配

(12.1) で最も取り扱いやすいのは，ある有限区間 $0<x\leqq b$ の外で $V(x)$ が恒等的に0になる場合である．このときには，$x\geqq b$ では $\bar{u}(x)$ は正確に (12.3) の形の解をもつので，

$$\frac{\bar{u}'(b)}{\bar{u}(b)}=k\cot(kb+\bar{\delta}) \tag{13.1}$$

が成り立つ．したがって $\bar{\delta}$ を計算することは，$\bar{u}$ の “比勾配” $\bar{u}'(x)/\bar{u}(x)$ の，$x=b$ における値を求めることと同等である．このためには方程式 (12.1) を，有限区間 $0<x\leqq b$ で取り扱えば十分である．

この問題をやや一般化すると次の形になる．微分方程式

$$-(r(x)u')'+p(x)u=0,\quad a_0\leqq x\leqq a_1,\quad r(x)>0 \tag{13.2}$$

を考える．初期条件

$$u(a_0)=0 \tag{13.3}$$

を満足する解 $u=\overline{u}$ は定数因子を除いて定まるから，量

$$Q=\frac{r(a_1)\overline{u}'(a_1)}{\overline{u}(a_1)} \tag{13.4}$$

は一義的に定まる．この $Q$ を求めよう．(*13.4*) は $\overline{u}$ について同次式であるから，問題をいいかえて，境界条件

$$u(a_0)=0,\quad u(a_1)=1 \tag{13.5}$$

を満足する解 $u=\overline{u}$ に対して

$$Q=r(a_1)\overline{u}'(a_1) \tag{13.6}$$

を求めると考えてもよい．以下しばらくこの形で問題を取り扱う．

さて微分方程式 (*13.2*) は，汎函数

$$J[u]=\frac{1}{2}\int_{a_0}^{a_1}[p(x)u^2+r(x)u'^2]\,dx \tag{13.7}$$

に対する Euler 方程式になっている (§3.1)．$u=\overline{u}$ は $J[u]$ の停留函数であるが，境界条件 (*13.5*) に注意して部分積分を行うと

$$J[\overline{u}]=Q/2 \tag{13.8}$$

を得る．したがって $J$ は量 $Q/2$ の変分表式 (§11) である．これによって $Q$ を近似的に計算する方法がえられたことになる．この場合 $Q/2$ が $J$ の最小値であるための条件は，微分方程式 (*13.2*) に対して，$a_0$ の共役点が $a_1$ よりも右にあることである (§3.4)．

境界条件を (*13.3*) だけにして，そのかわり

$$J_1[u]=J[u]/u(a_1)^2 \tag{13.9}$$

を用いても全くおなじ結果になることは明らかであろう．

例題〕 $a_0=0$, $a_1=b$, $p(x)=1/x$, $r(x)=1$ の場合．線型試験函数

$$u=c_1\frac{x}{b}+c_2\left(\frac{x}{b}\right)^2 \tag{13.10}$$

を用いて (*13.9*) を計算すると

$$2J_1[u]=\frac{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)c_1{}^2+2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{3}\right)c_1c_2+\left(\frac{4}{3b}+\frac{1}{4}\right)c_1{}^2}{(c_1+c_2)^2}. \tag{13.11}$$

$c_1, c_2$ をかえて (*13.11*) の停留値を計算することは，消去法で簡単に行われる (§1.4, 問題1)．$p(x)>0$ であるため (*13.2*) の共役点は存在しないので，$Q/2$ は $J$ の最小値とな

り，(*13. 11*) の最小値は $Q/2$ の上界を与える．こうして

$$Q \leqq \frac{b^2+18b+24}{6b(b+4)} \tag{13. 12}$$

を得る．たとえば $b=1$ のとき $Q \leqq 1.43333$ である．この例では実は $Q$ の下界も評価することができる (§7. 2).

問題 1〕 $u(a_0)=0$ という境界条件の下で汎函数 $-2J[u]+2u(a_1)$ の最大値は $Q^{-1}$ に等しいことを示せ．

## §14　散乱位相の変分表式

$V(x)$ が遠方で恒等的に 0 にならないときでも，散乱位相 $\bar{\delta}$ の変分表式が求められる．このために汎函数

$$J[u]=\gamma+\int_0^\infty uLu\,dx=\gamma-\int_0^\infty u[u''+(k^2-V)u]dx \tag{14. 1}$$

を考える．ただし許される函数 $u$ としては，境界条件 (*12. 2*) を満足した上，$x\to\infty$ のとき

$$u(x)\sim\cos kx+\frac{\gamma}{k}\sin kx \tag{14. 2}$$

のような漸近形をもつものだけを考える[1]．(*14. 1*) の $\gamma$ にはこの $\gamma$ をとるのである．このような $u$ に対しては，$x\to\infty$ のとき $Lu\sim V(x)u$ となるから，(*14. 1*) の積分は絶対収束である．

正しい解 $\bar{u}$ は (*14. 1*) の停留函数になっている．実際

$$\delta J[u]=\delta\gamma+\int\delta u\,Lu\,dx+\int uL\,\delta u\,dx \tag{14. 3}$$

であるが，$u(0)=0$ を用いて

$$\int_0^\infty(uL\delta u-\delta u\,Lu)\,dx=\lim_{x\to\infty}(u'\delta u-u\,\delta u')=-\delta\gamma$$

となるので，$L\bar{u}=0$ によって $u=\bar{u}$ のとき $\delta J=0$ となるのである．

停留値 $J[\bar{u}]$ を計算すると，$L\bar{u}=0$ より直ちに

$$J[\bar{u}]=\bar{\gamma}=k\cot\bar{\delta} \tag{14. 4}$$

を得る．$\bar{\gamma}$ は正しい解 $\bar{u}$ の漸近形を (*14. 2*) の形に書いたときの $\gamma$ の値であるから，(*12. 3*) と比較してすぐわかるように，$k\cot\bar{\delta}$ に等しいのである．こうして $J[u]$ は $k\cot\bar{\delta}$ の変分表式であることがわかる．これを利用して $\bar{\delta}$ を近似

---

(1)　(*14. 2*) は二回微分してもよいものと仮定する．

的に計算することができる．

その計算は次のようにするのがよい．

$$u=\cos kx+\frac{\gamma}{k}\sin kx-y(x) \tag{14.5}$$

とおくと，$y$ の満足すべき条件は

$$y(0)=1,\quad x\to\infty \text{ で } y(x)\sim 0 \tag{14.6}$$

である．(14.5) を (14.1) に代入すると

$$\left.\begin{aligned}
&J[u]=A+2(1+B)\gamma+C\gamma^2,\\
&A=A[y]=\int^\infty[y'^2-k^2y^2+V(x)(\cos kx-y)^2]\,dx,\\
&B=B[y]=\frac{1}{k}\int^\infty \sin kx(\cos kx-y)\,V(x)\,dx,\\
&C=\frac{1}{k^2}\int_0^\infty \sin^2 kx\,V(x)\,dx
\end{aligned}\right\} \tag{14.7}$$

の形になる．$C$ は $V(x)$ だけで定まり，$y$ にはよらない．

$y$ を固定しておき，$\gamma$ を変化させて (14.7) の停留値を求めると次のようになる．

$$I[y]=A[y]-\frac{1}{C}(1+B[y])^2. \tag{14.8}$$

$y$ として

$$y=y_0(x)+\sum_{m=1}^{n}c_m w_m(x) \tag{14.9}$$

の形の試験函数をとるのが便利である．ただし $y_0, w_m$ は遠方では速かに 0 に近づき，$x=0$ では境界条件

$$y_0(0)=1,\quad w_m(0)=0 \tag{14.10}$$

を満足するものとする．(14.9) を (14.8) に代入すると $c_1,\cdots,c_n$ の二次式が得られるから，その停留値および停留点は §3 の方法で計算することができる．

例題〕 湯川ポテンシアル $V(x)=-be^{-x}/x$ のとき (12.1) は

$$u''+\left(k^2+b\frac{e^{-x}}{x}\right)u=0, \tag{14.11}$$

基底として

$$y_0=e^{-x},\qquad w_m=e^{-mx}(1-e^{-x}) \tag{14.12}$$

をとると[1]

$$
\left.\begin{aligned}
A=&\frac{1}{2}(1-k^2)-2(1+k^2)\sum_{m=1}^{n}\frac{c_m}{(m+1)(m+2)}\\
&+\sum_{m,p=1}^{n}\frac{(2mp+m+p-2k^2)c_mc_p}{(m+p)(m+p+1)(m+p+2)}-b\Big[\log\frac{4+k^2}{3}-\frac{1}{4}\log(1+4k^2)\\
&-\sum_{m=1}^{n}c_m\log\frac{(m+2)^2((m+2)^2+k^2)}{(m+3)^2((m+1)^2+k^2)}+\sum_{m,p=1}^{n}c_mc_p\log\frac{(m+p+2)^2}{(m+p+1)(m+p+3)}\Big],\\
B=&\frac{b}{k}\Big[\arctan\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\arctan 2k+\sum_{m=1}^{n}c_m\Big(\arctan\frac{k}{m+1}-\arctan\frac{k}{m+2}\Big)\Big],\\
C=&-\frac{b}{4k^2}\log(1+4k^2).
\end{aligned}\right\}\quad(14.13)
$$

数値計算の例をあげると，第14.1表，第14.2表のようになる．

第 14.1 表　$b=1.5,\ k=1$

| $n$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $\gamma$ | $J[u]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −0.9758 | | | 1.0893 | 1.01871 |
| 2 | −1.5606 | 0.5744 | | 0.9926 | 1.01897 |
| 3 | −1.3199 | 0.3733 | −0.0447 | 1.0339 | 1.01892 |

第 14.2 表　$b=1.6,\ k=1$

| $n$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $\gamma$ | $J[u]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1.0445 | | | 0.9615 | 0.89934 |
| 2 | −1.1526 | 0.1060 | | 0.9436 | 0.89936 |
| 3 | −1.3101 | 0.2356 | 0.0314 | 0.9165 | 0.89933 |

$n$ をふやしたときに $J[u]$ の値がほとんど変らないのは，求めた近似値がきわめて精密であろうと想像させるに十分である．

注意 1〕 パラメタ $\gamma$ の値は $J[u]$ の値と同じく，$k\cot\bar{\delta}$ の近似値である ($\bar{\gamma}=k\cot\bar{\delta}$ に注意)．しかしその精度は $J[u]$ の方が高い．$J[u]$ は $k\cot\bar{\delta}$ の変分表式であるが，$\gamma$ はそうでないからである．実際 (*14. 1*) の右辺第二項は，$\gamma$ に対する補正項の役目を果しているのである．このことは上の計算例からも明らかに読みとられる．$J[u]$ の値は $n$ をかえてもほとんど変らないのに，$\gamma$ の方はかなり変動している．

注意 2〕 $J[u]$ の停留値は一般に最小値でも最大値でもない．上の例で停留値が $n$ と共に単調に変化していないのはその証拠である．このような問題では，$n$ を増せばそれだけ精密な近似値がえられるという保証はないし，近似値が正しい値より大きいか小さいか不明である．数学的に厳格な評価を得る方法については次章 (§7.10〜11) でのべる．

注意 3〕 この種の精密計算では，停留値の方が停留点よりも多くの桁数まで計算できる．例えば上の例で $\gamma, c_1, c_2, c_3$ の数値は小数点以下3桁だけしか与えなくても，$J[u]$ は5桁まではほとんど正しく求められる．ただしこの3桁の数は正確なものとみなし，計算の途中では5桁以上を保存しておかなくてはならない．

(1) 以下次の論文による．L. Hulthén, Arkiv. Mat. Astr. Fys. 35A, No. 25 (1948).

問題〕 次の汎函数は散乱長の逆数 $1/\bar{a}$ の変分表式であることを示せ：

$$J[u]=\frac{1}{a}+\int_0^\infty[u''-V(x)u]u\,dx. \tag{14.14}$$

ただし許される函数は (12.2) を満たすほか，漸近形

$$u(x)\sim 1-\frac{x}{a} \tag{14.15}$$

をもつものとし，(14.14) の $a$ はこの $a$ を意味する．

## §15 他の変分表式

(14.1) は散乱位相 $\bar{\delta}$ に対する唯一の変分表式ではない．このほか多くの変分表式が知られている．

勝手な定数 $\theta$ をきめておいて，(14.2) のかわりに漸近形

$$u(x)\sim\cos(kx+\theta)+\frac{\gamma}{k}\sin(kx+\theta) \tag{15.1}$$

をもつ函数 $u$ に対して（ただし $u(0)=0$）

$$J_\theta[u]=\gamma+\int_0^\infty uLu\,dx \tag{15.2}$$

とおけば，これは $k\cot(\bar{\delta}-\theta)$ に対する変分表式となる．証明は前節と全く同様である．$\theta=0$ とすれば前節の結果と一致し，$\theta=\pi/2$ とすれば $-k\tan\bar{\delta}$ の変分表式がえられる．

また

$$u(x)\sim\sin(kx+\delta) \tag{15.3}$$

の形の漸近形をもつ $u$ に対して

$$J'[u]=k\delta-\int_0^\infty uLu\,dx \tag{15.4}$$

とおけば，$k\bar{\delta}$ に対する変分表式がえられる．証明は読者に委す．(15.4) は未定パラメタ $\delta$ を非線型の形で含むので，実際の計算には便利でない．

次に (14.1) の右辺に新しい項を加えて

$$J_S[u]=\gamma+\int_0^\infty uLu\,dx-\int_0^\infty(Lu)^2V(x)^{-1}\,dx \tag{15.5}$$

とおく．ただし $u$ は (14.2) と同様の函数とし，もし $V(x)=0$ となる点があれば，その点で $Lu=0$ となって積分が収束するような函数 $u$ だけを許すものとする．つけ加えた項は $(Lu)^2$ をふくむので，$u=\bar{u}$ のときそれ自身 0 となるばかりでなく，その第一変分も 0 になる．したがって $J_S[u]$ は $J[u]$ とおな

じく $k\cot\bar{\delta}$ の変分表式である[1].

(*14.5*) を (*15.5*) に代入し，境界条件 (*14.6*) に注意して部分積分を行うと，$z(x)=\cos kx-y(x)$ とおいて

$$J_S[u]=\int_0^\infty z(z''+k^2z)\,dx-\int_0^\infty (z''+k^2z)^2V(x)^{-1}dx \tag{15.6}$$

を得る．さらに

$$z''+k^2x=V(x)\,v \tag{15.7}$$

とおき，$z(0)=0$，$z(x)\sim\cos kx$，$x\to\infty$ に注意して Green の定理を使うと，

$$z(x)=-\int_0^\infty G(x,\xi)\,V(\xi)\,v(\xi)\,d\xi \tag{15.8}$$

が得られる．ただし $G$ は Green の函数

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\sin kx\cos k\xi, & 0\leqq x\leqq\xi<\infty,\\[2ex] \dfrac{1}{k}\cos kx\sin k\xi, & 0\leqq\xi\leqq x<\infty\end{cases} \tag{15.9}$$

である．

(*15.7*), (*15.8*) を (*15.6*) に代入すると

$$J_S[u]=I_S[v]=-\int_0^\infty V(x)v^2dx-\int_0^\infty V(x)v(x)\,dx\int_0^\infty G(x,\xi)V(\xi)v(\xi)\,d\xi \tag{15.10}$$

となる．これも $k\cot\bar{\delta}$ の変分表式であるが，許される函数 $v$ に対しては

$$K[v]=-\frac{1}{k}\int_0^\infty V(x)v\sin kx\,dx=1 \tag{15.11}$$

という付帯条件がある．これは境界条件 $y(0)=1$ に由来する．

$K[v]=1$ という条件で $I_S[v]$ の停留値を求めるかわりに，条件なしで $I_S[v]/K[v]^2$ の停留値を求めてもおなじことになる．($I_S$ は $v$ について二次，$K$ は一次の同次式である.) これは Schwinger の与えた変分表式であって，$v$ に線型試験函数を採用すれば，パラメタに関する二次同次式の比となり，§4, 問題1の形となる．

汎函数 $J_S$ および $I_S/K^2$ で興味があるのは，適当な条件の下でその停留値が最大値または最小値となることである．すなわち，$V(x)\geqq 0$ であって（このとき

(1)　このような変分表式がいくらでも作られることは明らかであろう．

$\bar{\delta}\leqq 0$ である．§12, v) 参照) しかも $|\bar{\delta}|<\pi$ であれば，$J_S$ および $I_S/K^2$ は最大値 $k\cot\bar{\delta}$ をもつ．また $V(x)\leqq 0$ であって（したがって $\bar{\delta}\geqq 0$) $\bar{\delta}<\pi$ であれば，$J_S$ および $I_S/K^2$ は最小値 $k\cot\bar{\delta}$ をもつのである[1]．（証明は§7.10であたえる.）したがって Ritz の方法を適用すれば，第一の場合には $k\cot\bar{\delta}$ の下界が，第二の場合には上界が求められ，パラメタの数を増せば結果は必ず改良される．ただし $|\bar{\delta}|<\pi$ という条件が満たされているかどうかは，別の方法で調べなければわからない．

問題〕 次の汎函数も散乱長 $a$ の変分表式であることを示せ．

$$J[u]=a-\int_0^\infty [u''-V(x)u]u\,dx. \tag{15.12}$$

ただし許される函数 $u$ は

$$u(0)=0\,;\; x\to\infty \text{ で } u\sim x-a \tag{15.13}$$

の形をとるものとし，(15.12) の $a$ にはこの $a$ をとる．

(1) (14.1) や (14.2) の汎函数にはこのような都合のよい性質がない．

# 第 7 章　変分法による近似解法 II　上下界の評価

## §1　比較法

前章で取り扱ったR-Rの方法では，都合のよい場合でも，求めた近似値が正しい値の上界（あるいは下界）であることが知られるだけで，理論的に誤差の限界を判定することができなかった．本章ではこれを補い，誤差評価のいろいろな方法を論ずる．前章で扱った問題ばかりでなく，新らしい型の問題も取り入れてある．

最も簡単な方法としていわゆる**比較法**からはじめる．

二つの汎函数 $J[u], J'[u]$ があって，許される函数の範囲はおなじで，つねに

$$J[u] \geqq J'[u] \tag{1.1}$$

が成立しているとすれば，$J, J'$ の最小値 $\bar{J}, \bar{J}'$ に対しても

$$\bar{J} \geqq \bar{J}' \tag{1.2}$$

という関係がある．これは，最小函数をそれぞれ $\bar{u}, \bar{u}'$ とすると，

$$\bar{J} = J[\bar{u}] \geqq J'[\bar{u}] \geqq J'[\bar{u}'] = \bar{J}'$$

となるからである．第一の不等式は (*1. 1*) により，第二の不等式は $\bar{u}'$ が $J'$ の最小函数であることによる．

比較法の第二の形として，ある汎函数 $J'$ とその**縮小** $J$ との最小値に関係するものがある．$J'$ の縮小とは，$J'$ の許される函数の範囲を狭めてえられる汎函数である．$J$ および $J'$ の最小値をそれぞれ $\bar{J}, \bar{J}'$ とすれば

$$\bar{J} \geqq \bar{J}' \tag{1.3}$$

が成り立つことは明らかであろう．

これらの比較法はすでに §1.6 において暗に用いたものである．§1.6 の例題に示したように，固有値問題では，各固有値に対して比較法が適用できる．なお §6.8 の例題で用いた楕円膜と矩形膜の固有値の比較も，実は比較法による結果である．

例題 1〕 ヘリウム型原子（§6.10 例題 1）．(*6. 10. 2*) において $1/r_{12}$ を省略してえられる汎函数を $J'$ とすれば，(*1. 1*) が成り立つから，$J/K \geqq J'/K$ であり，$J/K$ の最小値（すなわち求める固有値）は，$J'/K$ の最小値より小さくない．後者は結局 (*6. 10. 1*) で $1/r_{12}$ を省略した問題の固有値であるが，この方程式は変数分離ができ，その最低固有値は

$-Z^2$, その次の固有値は $-\frac{5}{8}Z^2$ に等しいことが知られる.(A §1.8 をみよ.) こうして $\lambda_1, \lambda_2$ の下界として $-Z^2, -\frac{5}{8}Z^2$ が得られ, 上界 (*6.10.5*) と組み合せて

$$-Z^2 \leqq \lambda_1 \leqq -\left(Z-\frac{5}{16}\right)^2, \quad -\frac{5}{8}Z^2 \leqq \lambda_2 \tag{1.4}$$

という評価を得る. この評価では, $Z$ が大きいほど相対誤差は小さい. $Z$ が大きいと, 省略した項 $1/r_{12}$ は残した項 $Z/r_1$ などにくらべて小さいから, 当然の結果である.

例題 2〕 湯川ポテンシアル (§6.10 例題 2). 不等式

$$\frac{e^{-x}}{x} < \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, \quad 0<x<\infty \tag{1.5}$$

に注意すると,

$$K'[u] = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} u^2 dx \geqq K[u] \tag{1.6}$$

が成り立つ. ((*6.10.9*) をみよ.) したがって $J/K \geqq J/K'$ であり, $J/K$ の最小値 (すなわち考えている (*6.10.7*) の最低固有値) は $J/K'$ の最小値より小さくない. 後者は固有値問題

$$u'' + \lambda \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} u = 0 \tag{1.7}$$

の解である.(境界条件は (*6.10.8*) とおなじ.) (*1.7*) は正確に解かれていて, はじめの二組の固有値, 固有函数は

$$\lambda_1 = 1, \ \varphi_1 = 1-e^{-x}; \ \lambda_2 = 4, \ \varphi_2 = (1-e^{-x})(1-3e^{-x})$$

である. したがって, (*6.10.12*) と組み合せれば (*6.10.7*) の固有値に対して

$$1 \leqq \lambda_1 \leqq 1.6804, \quad 4 \leqq \lambda_2 \tag{1.8}$$

という評価がえられる. ($\lambda_1$ の下界は §12 例題 6 で改良される.)

例題 3〕 おなじ湯川ポテンシアルに関する散乱位相の問題 (*6.14.11*) を考える. $b>0$ のとき, (*1.5*) に注意すると, 求める位相 $\bar{\delta}$ は, 補助の問題

$$u'' + \left(k^2 + b\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)u = 0, \quad u(0) = 0 \tag{1.9}$$

に対する位相よりも小さい. (§6.12 v) の性質による.) この方程式に対しては正確な解が求められる. すなわち, $u = e^{ikx}v$ とおいて (*1.9*) を $v$ についての方程式にした上で $e^{-x} = t$ とおけば, 超幾何微分方程式 (I §7.15) となり, $t=1$ で 0 になる解は I, 310 頁, [2] の $y_2$ で与えられる. このようにして

$$u(x) = e^{ikx}(1-e^{-x})F(p, q, 2, 1-e^{-x}) \tag{1.10}$$

を得る. ここに $F$ は超幾何函数で, $p, q$ は次の式で与えられる:

$$\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = 1 - ik \pm \sqrt{b-k^2}.$$

(*1.10*) の漸近的位相 $\delta$ を求めるためには, $x\to\infty$ のときの $F(p, q, 2, 1-e^{-x})$ の漸近形を知る必要がある. これは I, 第 7 章, 問題 21 において $x$ のかわりに $1-e^{-x}$ を代入すればえられる. その結果は

$$u(x) \sim e^{ikx}\left[\frac{\Gamma(2-p-q)}{\Gamma(2-p)\Gamma(2-q)} + \frac{\Gamma(p+q-2)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} e^{-(2-p-q)x}\right].$$

$p, q$ の値を代入すると

$$u(x) \sim \frac{\Gamma(2ik)e^{ikx}}{\Gamma(1+ik+\sqrt{b-k^2})\Gamma(1+ik-\sqrt{b-k^2})} + \frac{\Gamma(-2ik)e^{-ikx}}{\Gamma(1-ik+\sqrt{b-k^2})\Gamma(1-ik-\sqrt{b-k^2})}.$$

したがって (*1.9*) の位相は

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \arg\Gamma(2ik) - \arg\Gamma(1+ik+\sqrt{b-k^2}) - \arg\Gamma(1+ik-\sqrt{b-k^2}).$$

これが (*6.14.11*) の位相 $\bar{\delta}$ の上界を与える．$\delta$ を計算するには複素変数の $\Gamma$ 函数の表が必要である．

注意〕 これらの例でみられるように，比較法による評価はあまり精密でないのがふつうであるが，もっと精密な結果を得るための補助手段として役に立つことが多い．例えば例題 2 の (*1.8*) において $\lambda_2$ の粗い下界が知られたことによって，$\lambda_1$ の精密な下界を求める準備ができたのであるが，これは §12 で述べる．おなじことが例題 1 や例題 3 についてもいえる．

## §2 相反定理と Friedrichs 変換の応用．比勾配

ある汎函数の停留値の上界と下界とをともに求める有力な方法として，相反定理とその定理とその特別の場合である Friedrichs 変換がある．便宜上 §1.10 の結果をここに要約すると，ベクトル $\boldsymbol{u}$ の函数 $J(\boldsymbol{u})$ が凸であるとき，与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ と部分空間 $\mathbf{M}$ に対して，

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a} \text{ が } \mathbf{M} \text{ に属する} \tag{2.1}$$

という条件つきで $J(\boldsymbol{u})$ を最小にする問題は，

$$\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}) \text{ が } \mathbf{M} \text{ に直交する} \tag{2.2}$$

という条件つきで，函数

$$I(\boldsymbol{v}) = J(\boldsymbol{v}) - (\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}) \tag{2.3}$$

を最大にする問題と同等であり，$J$ の最小値と $I$ の最大値は相等しい．これを $Q$ と書くと

$$I(\boldsymbol{v}) \leqq Q \leqq J(\boldsymbol{u}) \tag{2.4}$$

が (*2.1*) を満足する勝手な $\boldsymbol{u}$，(*2.2*) を満足する勝手な $\boldsymbol{v}$ に対して成り立つ．したがって $J(\boldsymbol{u}), I(\boldsymbol{v})$ はともに $Q$ の変分表式であるばかりでなく，$Q$ の上界 $J(\boldsymbol{u})$，下界 $I(\boldsymbol{v})$ が容易に計算されることになる．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を適当にとれば精密な $Q$ の近似値がえられるであろう．

ここでは便宜上 $n$ 変数 $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n)$ の函数について相反定理をのべたが，結果はそのまま函数 $u=u(x)$ などの凸汎函数 $J[u]$ に拡張される．古典的汎函数 (*2.1.3*) への応用については §4.7 で論じたが，もっと一般の凸汎函数に

ついても同様な結果が成り立つことは明らかであろう．特に一変数 $x$ の場合には §4.8 の Friedrichs 変換が適用できる．以下いくつかの例について，この方法がどんなふうに応用されるかをみよう．

まず §6.13 で取り扱った函数の比勾配 (*6.13.4*) を考える．(*6.13.7*) で与えられる汎函数 $J[u]$ は

$$p(x)>0, \quad r(x)>0 \tag{2.5}$$

を仮定すれば凸である．これに対して Friedrichs 変換 (§4.8) を行うと(係数 $p(x)$ との混同をさけるため (*4.8.1*) の $p, p'$ の代りに $\varphi, \varphi'$ と書き，$v, v'$ の代りに $u, u'$ と書く)

$$\left.\begin{aligned} &F=\frac{1}{2}(pu^2+ru'^2), \quad \varphi=ru', \quad \varphi'=pu, \\ &\Phi=2F-F=F=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\varphi^2+\frac{1}{p}\varphi'^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

となるから，(*4.8.4*) によって ($b_0=0,\ b_1=1$ に注意)

$$2I[\varphi]=2\varphi(a_1)-\int_{a_0}^{a_1}\left(\frac{1}{r}\varphi^2+\frac{1}{p}\varphi'^2\right)dx \tag{2.7}$$

で与えられる $I$ が相反汎函数である．$\varphi$ に対しては境界条件は課せられない．

$Q$ は $2J[u]$ の最小値，$2I[\varphi]$ の最大値であるから

$$2I[\varphi]\leqq Q\leqq 2J[u] \tag{2.8}$$

が (*6.13.5*) を満足する勝手な $u$，境界条件のない勝手な $\varphi$ に対して成り立つ．

(*2.8*) は簡単な関係であるから Friedrichs 変換の公式を用いないでも直接に証明できるはずである．実際上のような勝手な $u, \varphi$ に対して

$$\begin{aligned} 2J[u]-2I[\varphi] &= \int_{a_0}^{a_1}\left(pu^2+ru'^2+\frac{1}{r}\varphi^2+\frac{1}{p}\varphi'^2\right)dx-2\varphi(a_1) \\ &= \int_{a_0}^{a_1}\left[p\left(u-\frac{1}{p}\varphi'\right)^2+r\left(u'-\frac{1}{r}\varphi\right)^2+2(u\varphi)'\right]dx-2\varphi(a_1) \\ &= \int_{a_0}^{a_1}\left[p\left(u-\frac{1}{p}\varphi'\right)^2+r\left(u'-\frac{1}{r}\varphi\right)^2\right]dx\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

となって，つねに $2J[u]\geqq 2I[\varphi]$ である．しかも $\varphi'=pu,\ \varphi=ru'$ の成立するときに，かつこのときにかぎって $2J[u]=2I[\varphi]$ となる．このとき実は $(ru')'=pu$ となって $u$ は (*6.13.2*) を満足するから $u=\bar{u}$ であり，この共通の値は $Q$ に外ならない．これより直ちに (*2.8*) を得る．

$J[u]$ のかわりに境界条件なしで $J_1[u]=J[u]/u(a_1)^2$ (*6. 13. 9*) を考えてもよかったのに対して，$I[\varphi]$ も"同次化"することができる．$\varphi(x)$ とともに，勝手な数 $\alpha$ を用いて作った $\alpha\varphi(x)$ も $I$ の許される函数であるから，$\varphi$ をきめた上で，$\alpha$ をかえて $2I[\alpha\varphi]$ を最大にすると

$$2I_1[\varphi]=\frac{\varphi(a_1)^2}{\displaystyle\int_{a_0}^{a_1}\left[\frac{\varphi^2}{r(x)}+\frac{\varphi'^2}{p(x)}\right]dx} \tag{2.10}$$

となる．明らかに (*2.8*) は $I, J$ を $I_1, J_1$ でおきかえても成り立つ．

例題〕 数値例として §6. 13 の例題の場合を考えると，(*2.5*) は満足されている．$I[\varphi]$ の試験函数として $\varphi=c_1+c_2\dfrac{x}{b}$ をとると

$$2I_1[\varphi]=\frac{(c_1+c_2)^2}{bc_1{}^2+bc_1c_2+\left(\dfrac{b}{3}+\dfrac{1}{2}\right)c_2{}^2}. \tag{2.11}$$

この最大値は $J_1$ の場合と同様に計算されて，$Q$ の下界を与える．結果は

$$Q\geqq\frac{2(2b+3)}{b(b+6)}. \tag{2.12}$$

$b=1$ なら $Q\geqq 1.4285$ となる．上のものよりも一項多い試験函数 $\varphi=c_1+c_2\dfrac{x}{b}+c_3\left(\dfrac{x}{b}\right)^2$ を用いて同様な計算を行うと，結果は

$$Q\geqq\frac{3(3b^2+32b+40)}{b(b^2+36b+120)} \tag{2.13}$$

のように改良される．$b=1$ なら $Q\geqq 1.43312$ となる．§6. 13 で求めた上界と組み合せると，

$$1.43312\leqq Q\leqq 1.43333 \tag{2.14}$$

を得て，$Q$ が誤差 0.01% 以内で厳密に求められた．

問題〕 $I_1[\varphi]\leqq J_1[u]$ を直接に証明せよ．((*4. 15*) にならって Schwarz の不等式を使え．)

## §3　近似函数の評価

凸汎函数に関係する問題では，停留値ばかりでなく，停留函数も厳密に評価することができる．再び比勾配の例 (前節) についてこれを説明しよう．

同次化されない汎函数 $J, I$ に戻って (*2.9*) を考える．正しい解を $u=\bar{u}$ とし，また $r\bar{u}'=\bar{\varphi}$ とおいて，(*2.9*) に $\varphi=\bar{\varphi}$ を代入すれば $2I(\bar{\varphi})=Q$, $\bar{\varphi}'=p\bar{u}$ であるから

$$2J[u]-Q=\int_{a_0}^{a_1}[p(u-\bar{u})^2+r(u'-\bar{u}')^2]dx. \tag{3.1}$$

一方 (*2.9*) において $u=\bar{u}$ とすれば $2J[\bar{u}]=Q$ であるから

$$Q-2I[\varphi]=\int_{a_0}^{a_1}\left[p\left(\overline{u}-\frac{1}{p}\varphi'\right)^2+r\left(\overline{u}'-\frac{1}{r}\varphi\right)^2\right]dx. \tag{3.2}$$

これら二式を加えて2で割り恒等式 $\frac{1}{2}(a^2+b^2)\geqq[(a-b)/2]^2$ に注意すると

$$\frac{1}{2}(2J[u]-2I[\varphi])\geqq\int_{a_0}^{a_1}\left[p\left(\frac{u+\frac{1}{p}\varphi'}{2}-\overline{u}\right)^2+r\left(\frac{u'+\frac{1}{r}\varphi}{2}-\overline{u}'\right)^2\right]dx. \tag{3.3}$$

もしわれわれの用いた試験函数 $u, \varphi$ が十分精密であれば $2J[u]-2I[\varphi]$ は小さくなるであろう．いずれにしてもこれは計算できる量であるから

$$2J[u]-2I[\varphi]=\varepsilon^2 \tag{3.4}$$

とおくと，(3.1), (3.2) の和は $\varepsilon^2$ であるから各々は $\varepsilon^2$ より大きくない．また (3.3) の左辺は $\varepsilon^2/2$ である．よってこれらの式からまず

$$\left.\begin{aligned}&\int p(u-\overline{u})^2dx\leqq\varepsilon^2,\quad \int p\left(\frac{1}{p}\varphi'-\overline{u}\right)^2dx\leqq\varepsilon^2,\\&\int p\left[\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{p}\varphi'\right)-\overline{u}\right]^2dx\leqq\frac{1}{2}\varepsilon^2\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

が得られ，$u,\ \frac{1}{p}\varphi',\ \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{p}\varphi'\right)$ はいずれも正しい解 $\overline{u}$ の近似函数であることがわかる．この中で一般には最後のものが精度は一番よい．ただし近似という意味は，正しい解 $\overline{u}$ との差の二乗に $p$ を乗じて積分したものが小さいこと，すなわち**重荷 $p$ による二乗平均近似**を意味する．故に例えば $u(x)-\overline{u}(x)$ は平均において $\varepsilon$ の程度であるということができるにすぎない（§6.5 参照）．$Q$ の誤差は $\varepsilon^2$ の程度で求められることに注意すべきである．すなわち

$$\left|Q-\frac{1}{2}(2J[u]+2I[\varphi])\right|\leqq\frac{1}{2}\varepsilon^2. \tag{3.6}$$

同様に (3.1～3) から

$$\left.\begin{aligned}&\int r(u'-\overline{u}')^2dx\leqq\varepsilon^2,\quad \int r\left(\frac{1}{r}\varphi-\overline{u}'\right)^2dx\leqq\varepsilon^2,\\&\int r\left[\frac{1}{2}\left(u'+\frac{1}{r}\varphi\right)-\overline{u}'\right]^2dx\leqq\frac{\varepsilon^2}{2}\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

となって $u',\ \frac{1}{r}\varphi,\ \frac{1}{2}\left(u'+\frac{1}{r}\varphi\right)$ はいずれも $\overline{u}'$ の近似函数である．精度は一般には最後のものが最もよい．ここでは近似という意味は重荷 $r$ による二乗平均近似である．

このような意味では例えば $u, u'$ はそれぞれ $\overline{u}, \overline{u}'$ の近似函数であるが，近似度 $\varepsilon$ を知るには $J[u]$ だけでは足りず，別に $ru'$ の近似函数 $\varphi$ を用いて $I[\varphi]$ を計算しなければわからない．$u$ はあるいはよい近似函数であるかもしれないが，実際にそれをたしかめるには別の近似函数 $\varphi$ を必要とするのである．

$u, u'$ は正しい解の二乗平均近似にすぎないから，たとえ $\varepsilon$ は小さくても個々の点 $x$ で $u(x)-\overline{u}(x)$ が小さいという保証はない．このことを無視すると誤りをおかすことがある．例えば前節の例で (6.13.11) を最小にする $u(x)$ を求めてみる．定数因子を適当にとって，$u'(0)=1$ のように $u(x)$ を規準化すると

$$u = x+\frac{2}{4-b}x^2 \tag{3.8}$$

となる．しかしこの函数から作った比勾配

$$\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{4-b+4x}{(4-b)x+2x^2} \tag{3.9}$$

が各点 $x$ で正しい値 $\overline{u}'(x)/\overline{u}(x)$ に近いという根拠はない．それは"平均において"正しい値に近いかもしれないが，その誤差は $\varepsilon$ の程度である．特に $x=b$ において (3.9) を計算してみると $(4+3b)/b(4+b)$ となり，$b=1$ のときには 1.4000 となる．正しい $Q$ は (2.14) で与えられることがわかっているのであるから，この値は決してよい近似ではない．故にこのような方法で近似函数 $u$ を定め，それを用いて $u(a), u'(a)$ を計算し，それから $Q=u'(a)/u(a)$ を出すのはまずい方法である．

個々の点で $\overline{u}(x)$ の値自身が知りたいならば，次のようにすればよい．(6.13.12), (2.12) で $b$ を $x$ とかきかえれば $Q=\overline{u}'/\overline{u}$ は

$$\frac{2(2x+3)}{x(x+6)} \leqq \frac{\overline{u}'(x)}{\overline{u}(x)} \leqq \frac{x^2+18x+24}{6x(x+4)} \tag{3.10}$$

を満足する．これを積分すれば，$\overline{u}'(0)=1$ のように規準化して

$$x\left(1+\frac{x}{6}\right)^3 \leqq \overline{u}(x) \leqq x\left(1+\frac{x}{4}\right)^{4/3} e^{x/6} \tag{3.11}$$

を得る．ここで $x=1$ とすれば $1.588 \leqq \overline{u}(1) \leqq 1.591$ となって誤差は 0.1% 程度である．(3.8) に対してはこのような評価はできない．

一般的原則としては，(3.8) のように $J[u]$ を用いて定めた近似函数は，それを汎函数 $J[u]$ の $u$ に代入するときにかぎって近似函数としての役に立つのであって，他の目的に使用してよいかどうかは保証のかぎりでない (§6.11)．

## §4 容　　量

他の例として誘電体中におかれた導体の容量をとってみる．誘電率 $\varepsilon(x, y, z)$ の物質で占められた三次元空間におかれた導体の表面を $\Gamma$，その外部を G とする．この導体に電荷を与えると G に静電場が生じるが，そのポテンシアル $u$ は G で微分方程式

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = 0 \tag{4.1}$$

を満たし，Γ の上で

$$u = k = \text{定数} \tag{4.2}$$

という境界条件を満たす．導体の全電荷は表面積分

$$e = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \qquad (\nu\ \text{は外向き法線}) \tag{4.3}$$

で与えられる．

$$C = e/k \tag{4.4}$$

が導体の電気容量と呼ばれる量である．

(4.1) は汎函数

$$2J[u] = \int_G (\operatorname{grad} u)^2 \varepsilon\, dx\, dy\, dz \tag{4.5}$$

に対する Euler 方程式に外ならない．(4.2) を満たす (4.1) の解 $u = \overline{u}$ に対して $J[\overline{u}]$ を計算すると，部分積分を行なって

$$2J[\overline{u}] = -\int_\Gamma \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}\varepsilon\, dS - \int_G \overline{u} \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \overline{u}) dx\, dy\, dz$$
$$= 4\pi k\, e = 4\pi k^2 C.$$

したがって (4.2) を満足する $u$ に対して

$$2J_1[u] = \frac{1}{k^2} 2J[u] = \frac{1}{k^2}\int_G (\operatorname{grad} u)^2 \varepsilon\, dx\, dy\, dz \tag{4.6}$$

の最小値はちょうど容量 $C$ の $4\pi$ 倍に等しい．実際これが最小値であることは (4.5) が凸汎函数であることからわかる (§1.10, 問題).

同じ理由でこの問題には相反定理が適用できる．相反汎函数を求めるには §4.7 の方法に従えばよい．問題の同次性によって $k=1$ としておいても差支えないから，$J_1 = J$ として

$$2J[u, u_x, u_y, u_z] = \int (u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z{}^2)\varepsilon\, dx\, dy\, dz \tag{4.6'}$$

とかき，$u_x, u_y, u_z$ を独立の函数とみておく．すると (4.7.11) に相当するものは

$$2I = -\int_G (v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2)\varepsilon\, dx\, dy\, dz$$
$$+2\int_\Gamma [v_x \cos(\nu, x) + v_y \cos(\nu, y) + v_z \cos(\nu, z)]\varepsilon\, dS. \tag{4.7}$$

ただしここでは $v_x, v_y, v_z$ は独立の函数で，$v_x=\partial v/\partial x$ のような意味はない．その代り (*4.7.10*) に相当して

$$0=\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon v_z) \tag{4.8}$$

という付帯条件が課せられる．よっていま $\varepsilon v_x, \varepsilon v_y, \varepsilon v_z$ を成分とするベクトル函数を $\boldsymbol{v}$ と書くと，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0 \tag{4.9}$$

という付帯条件を満足する $\boldsymbol{v}$ に対して，汎函数

$$2I[\boldsymbol{v}]=-\int_G \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}dx\,dy\,dz+2\int_\Gamma v_\nu dS \tag{4.10}$$

の最大値がちょうど $4\pi C$ に一致するはずである ($v_\nu$ は $\boldsymbol{v}$ の法線成分)．§2 の方法に従い，$\boldsymbol{v}$ の代りに $\alpha\boldsymbol{v}$ とおいて $I[\alpha\boldsymbol{v}]$ の最大値を求めることによって $I$ を同次化すると

$$2I_1[\boldsymbol{v}]=\frac{\left(\int_\Gamma v_\nu dS\right)^2}{\int_G \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}dx\,dy\,dz}=\frac{(4\pi e)^2}{\int_G \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}dx\,dy\,dz} \tag{4.11}$$

がえられる．$e$ は $\Gamma$ の上の“全電荷”に等しい．故に

$$2I_1[\boldsymbol{v}]\leqq 4\pi C\leqq 2J_1[u] \tag{4.12}$$

によって $C$ の上下界が求められることになる．

この式はまた直接たしかめることもできる．§2 と同じように $J[u]-I[\boldsymbol{v}]\geqq 0$ を証明できるが，また次のようにしてもよい．(*4.9*) によって

$$\mathrm{div}\,u\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\,u\cdot\boldsymbol{v} \tag{4.13}$$

であるから，これを積分して (*4.2*) を使うと

$$-k\int_\Gamma v_\nu dS=\int_G \mathrm{grad}\,u\cdot\boldsymbol{v}\,dx\,dy\,dz. \tag{4.14}$$

故に Schwarz の不等式によって

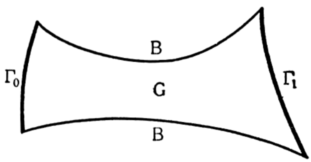
$$k^2\left(\int_\Gamma v_\nu dS\right)^2\leqq\left[\int_G(\mathrm{grad}\,u)^2\varepsilon\,dx\,dy\,dz\right]\left[\int_G \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}dx\,dy\,dz\right]. \tag{4.15}$$

これを (*4.6*), (*4.11*) と比較すると $I_1[\boldsymbol{v}]\leqq J_1[u]$ となり，これがそれぞれ許される勝手な $u, \boldsymbol{v}$ に対して成り立つことから (*4.12*) がえられる．

正しい解に対しては $u$ は静電ポテンシアル，$\boldsymbol{v}$ は電束密度を表わす．近似値

$J_1[u]$ では"静電ポテンシアル" $u$ を用いるが，$u$ は場の方程式を満たすとは仮定しない．一方 $I_1[v]$ では"電束密度" $v$ を用い，$v$ は湧き口なしのベクトルと仮定するが，$\varepsilon^{-1}v$ がポテンシアルをもつとは仮定しない．このように変分法による近似計算では，正しい解の満たすべき方程式を二部に分け，その各ゝ一つだけを正確に満足するが必ずしも他を満足しない試験函数を用いて，求める量の上下界を出すことが多い．

上の結果は導体が二つ以上ある場合にも拡張できる．特にこの方法で二つの導体の間の電気容量を計算することができる．また上で誘電体の代りに比伝導度が $\varepsilon(x,y,z)$ に等しい不完全導体を考え，その中に埋めた二つの完全導体の間の電気伝導度を $C_0$ とすれば，上の結果はそのまま成り立つ．ただし $C_0 = 4\pi C$ となり，$u$ は電位，$v$ は電流密度を表わす．この場合には不完全導体は無限にひろがっていなくてもよいから，自由境界をもつこともあり，$\Gamma$ は閉曲面とかぎらない．例えば第4.1図では G が不完全導体，B が自由境界，$\Gamma_0$ と $\Gamma_1$ とは完全導体から成る正負の電極である．$\Gamma_0$ の電位を 0，$\Gamma_1$ の電位を一定値 $k$ に保ったと考えて，$\Gamma_0$ の上で $u=0$，$\Gamma_1$ の上で $u=k$ とおいて上と同じ取扱いをすれば，$2J_1[u]$ は $C_0$ の上界を与える．同様に $2I_1[v]$ は $C_0$ の下界を与えるが，$v$ には自由境界では $v_\nu=0$ という付帯条件がつけ加わる．また (4.11) の分子の積分 $\int_\Gamma$ は $\Gamma_0$ または $\Gamma_1$ の一方だけでとる．



第 4.1 図

## §5 容量の上下界

(4.6) によって $4\pi C$ の上界を求めるのにどのような $u$ を用いたらよいかを考えてみよう．正しい解 $u=\bar{u}$ をとれば正確な $4\pi C$ がえられるが，これは一般にいうべくして行われない．しかしひとつの函数 $\mu(x,y,z)$ を定めたときに，$u=f(\mu)$ の形に表わされる函数 $u$ の中で最もよいものを定めることはできる．ただし $\Gamma$ の上で $\mu=\text{const}$ でなければならない．この形の函数はすべて共通の"等電位面"をもつ．したがってこの方法は，仮想的な等電位面を仮定した上で，最もよい近似を求めることに帰着する．$u=f(\mu)$ により $\operatorname{grad} u = f'(\mu)\operatorname{grad}\mu$ であるから

$$2J_1[u] = \frac{1}{k^2}\int f'(\mu)^2(\operatorname{grad}\mu)^2\varepsilon\, dx\, dy\, dz. \tag{5.1}$$

"等電位面" $\mu=\text{const}$ の上の面積素片を $dS$ とし，相隣る二つの等電位面の間の法線を $dn$ とすれば $dx\,dy\,dz = dS\,dn$ であり，$\operatorname{grad}\mu = d\mu/dn$ であるから

$$2J_1[u]=\frac{1}{k^2}\int f'(\mu)^2\left(\frac{d\mu}{dn}\right)^2\varepsilon\,dS\,dn=\frac{1}{k^2}\int f'(\mu)^2d\mu\int\varepsilon\frac{d\mu}{dn}dS. \tag{5.2}$$

ここで

$$j(\mu)=\int\varepsilon\frac{d\mu}{dn}dS \tag{5.3}$$

は“等電位面” $\mu=\text{const}$ によって定まる $\mu$ の函数で，既知と考えてよい．故に

$$2J_1[u]=\frac{1}{k^2}\int_0^\infty f'(\mu)^2j(\mu)d\mu. \tag{5.4}$$

ただしかりに $\Gamma$ の上で $\mu=0$，無限遠で $\mu=\infty$ としたが，これは本質的な制限ではない．他方 $\Gamma$ の上で $f(\mu)=u=k$ であり，無限遠では $u=0$ であるから，Schwarz の不等式によって

$$k^2=\left(\int_0^\infty f'(\mu)d\mu\right)^2\leqq\int f'(\mu)^2j(\mu)d\mu\int\frac{d\mu}{j(\mu)}. \tag{5.5}$$

したがって

$$2J_1[u]\geqq\frac{1}{\displaystyle\int\frac{d\mu}{j(u)}}. \tag{5.6}$$

しかし特に $f'(\mu)=1/j(\mu)$ のように $f$ をとっておけば (5.5) したがってまた (5.6) で等号が成立する．よって

$$4\pi C\leqq\frac{1}{\displaystyle\int\frac{d\mu}{j(\mu)}} \tag{5.7}$$

であり，考えている函数 $u=f(\mu)$ を用いてえられる範囲内ではこれが最もよい上界である．

例題 1〕 真空中 ($\varepsilon=1$) におかれた稜の長さ 1 の立方体の容量の上界を求めよう．“等電位面” $\mu$ として立方体の表面から等距離 $\mu$ にある点の軌跡をとると明らかに $d\mu/dn=1$ であるから (5.3) によって $j(\mu)$ は面 $\mu$ の表面積に外ならず，容易にわかるように

$$j(\mu)=6+6\pi\mu+4\pi\mu^2 \tag{5.8}$$

である．よって (5.7) より

$$C\leqq\frac{1}{4\pi\displaystyle\int_0^\infty\frac{d\mu}{6+6\pi\mu+4\pi\mu^2}}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{6}{\pi}}\Big/\log\left[\frac{\pi}{6}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{6}{\pi}}\right)^2\right]$$
$$=0.7106. \tag{5.9}$$

(4.11) によって容量の下界を求めるには，(4.9) を満足する（湧き口なしの）ベクトル函数 $\boldsymbol{v}$ を用いる．上界の計算に仮想的電位を用いたのに対し，これは仮想的電束密度 $\boldsymbol{v}$ を考えることに外ならない．このような電束密度を表わすのに“電束線”を用いると便利である．一つの湧き口なしベクトル $\boldsymbol{v}_0$ ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0$) が与えられたとすると，各点で $\boldsymbol{v}_0$ の方向をもつ一群の電束線が定まるが，各電束線上で一定の値をとる函数 $g(\omega)$ を $\boldsymbol{v}_0$ に乗じて $\boldsymbol{v}=g(\omega)\boldsymbol{v}_0$ としても $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ という性質は変らない（$\omega$ は電束線を表わすパラメタ）．何故なら $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=g\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0+\operatorname{grad}g\cdot\boldsymbol{v}_0$ において，$\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0$ であり，また $\operatorname{grad}g$ は $\boldsymbol{v}_0$ に直交するからである．

そこで $\boldsymbol{v}=g(\omega)\boldsymbol{v}_0$ の形のベクトル場だけを考えて (*4.11*) の値を最大にすると，一定の電束線を考えているかぎりでは最もよい近似がえられることになる．実際この $g$ を定めることは次のようにしてできる．電束線に沿っての長さを $dn$, 電束線が集って作る細い電束管の断面積を $d\sigma$ とすると

$$\int \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}dx\,dy\,dz=\int g(\omega)^2\boldsymbol{v}_0{}^2\varepsilon^{-1}d\sigma\,dn.$$

各電束管に沿っては $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0$ によって $|\boldsymbol{v}_0|d\sigma$ は一定で $|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|d\sigma_\Gamma$ に等しい．(添字 $\Gamma$ は物体の表面 $\Gamma$ での値を表わす.) 故に $\boldsymbol{v}_0{}^2d\sigma=\boldsymbol{v}_{0\Gamma}^2d\sigma_\Gamma(d\sigma_\Gamma/d\sigma)$ となり

$$\int \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}dx\,dy\,dz=\int g(\omega)^2\boldsymbol{v}_{0\Gamma}^2 l(\omega)d\sigma_\Gamma. \tag{5.10}$$

ただし

$$l(\omega)=\int\frac{d\sigma_\Gamma}{d\sigma}\varepsilon^{-1}dn \tag{5.11}$$

は電束線を指定すれば定まる量であるから既知とみなされる． $v_\nu dS=g(\omega)v_{0\nu}dS=g(\omega)|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|d\sigma_\Gamma$ に注意すると (電束線は仮想的なもので物体表面に直交している必要はないことに注意), (*4.11*) は (*5.10*) によって

$$2I_1[\boldsymbol{v}]=\frac{\left(\int g(\omega)|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|d\sigma_\Gamma\right)^2}{\int g(\omega)^2\boldsymbol{v}_{0\Gamma}^2 l(\omega)d\sigma_\Gamma} \tag{5.12}$$

となる．Schwarz の不等式により

$$\left(\int g(\omega)|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|d\sigma_\Gamma\right)^2\leqq\int g(\omega)^2\boldsymbol{v}_{0\Gamma}^2 l(\omega)d\sigma_\Gamma\int\frac{d\sigma_\Gamma}{l(\omega)} \tag{5.13}$$

であるから，

$$2I_1[\boldsymbol{v}]\leqq\int_\Gamma\frac{d\sigma_\Gamma}{l(\omega)} \tag{5.14}$$

となる．故にこの方法では $I_1[\boldsymbol{v}]$ を (*5.14*) の右辺より大きくすることはできないが， $g(\omega)=1/|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|l(\omega)$ ととっておけば (*5.13*) で等号が成立するから，(*5.14*) の右辺の値は実現可能である．したがって

$$4\pi C\geqq\int\frac{d\sigma_\Gamma}{l(\omega)} \tag{5.15}$$

が，与えられた仮想電束線を用いてえられる範囲で最良の近似値である．

例題 2〕 例題 1 で考えた立方体の容量の下界を (*5.15*) で計算してみる．電束線として立方体の中心を通る直線群をとる．それには $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{r}/r^3$ とすればよい．これは $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0$ を満たす．$\omega$ としては立体角をとる．すると (*5.11*) で $d\sigma_\Gamma/d\sigma=r_\Gamma{}^2/r^2$ であるから

$$l(\omega)=r_\Gamma{}^2\int_{r_\Gamma}^\infty r^{-2}dr=r_\Gamma. \tag{5.16}$$

$r_\Gamma$ は中心から立方体の表面までの距離である．$d\sigma_\Gamma=r_\Gamma{}^2d\omega$ であるから，(*5.15*) は

$$C\geqq\frac{1}{4\pi}\int r_\Gamma d\omega \tag{5.17}$$

を与える[1]. 対称性を考えて立方体の一つの面（例えば $z=1/2$, 中心に原点をとる）に沿ってこれを計算すると

$$C \geqq \frac{6\times 8}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{\alpha(\phi)} \frac{\sin\theta}{2\cos\theta} d\theta, \quad \cos\alpha(\phi) = \frac{\cos\phi}{\sqrt{1+\cos^2\phi}} \tag{5.18}$$

となる. これより

$$C \geqq \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\frac{1}{\cos^2\phi}\right) d\phi = \frac{3}{\pi}\int_0^1 \frac{\log(2+t^2)}{1+t^2} dt \fallingdotseq 0.611. \tag{5.19}$$

(5.9) と合わせて精密な $C$ の値を得るにはまだ程遠い. なお脚註(1)の式を用いると $C \geqq 0.620$ がえられる. このような三次元の問題では簡単な計算でよい近似を得ることはむずかしい.

問題〕 電気伝導度の問題（第4.1図）において G が軸対称で, 境界 B は曲線 $y=f(x)>0$ を $x$ 軸のまわりに回転してえられるものとし, $\Gamma_0, \Gamma_1$ はそれぞれ平面 $x=a_0$, $x=a_1$ と G とのきり口とする. 比伝導度 $\varepsilon(x)$ は $x$ だけの函数とする. この問題を §4, §5 の方法で取り扱え. 特に等電位面としては $x=$ 定数, "電流線" としては曲線群 $y=\alpha f(x)$ $(0\leqq\alpha\leqq 1)$ を採用して $\Gamma_0, \Gamma_1$ 間の電気抵抗 $R$ に対して次の不等式を導け.

$$\int \frac{dx}{\varepsilon f^2} \leqq \pi R \leqq \frac{\displaystyle\int \frac{f'^2}{\varepsilon f^2} dx}{\log\left[1+\dfrac{\displaystyle\int \frac{f'^2}{\varepsilon f^2}dx}{\displaystyle\int \frac{dx}{\varepsilon f^2}}\right]}.$$

（積分はすべて $(a_0, a_1)$ でとる）. この評価は $f'/f$ があまり大きくなければかなり精密であることに注意せよ. 上の式からさらに

$$\pi R \leqq \int \frac{1+\frac{1}{2}f'^2}{\varepsilon f^2} dx$$

を出せ.

## §6　弾性論

相反定理はまた弾性論にも応用され, **Castigliano の定理**と呼ばれるものが得られる. 空間座標を $x=(x_1, x_2, x_3)$ とし弾性体の微小変位を表わすベクトルを $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$ とすると, ひずみテンソルは

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{6.1}$$

で与えられる. 弾性エネルギー密度 $W$ は $e_{ik}$ の函数である：

$$W = F(e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{23}, e_{31}, e_{12}). \tag{6.2}$$

---

(1)　これは立方体とかぎらず, 勝手な凸体に対して成立する. ただしこれよりも精密な関係 $C \geqq \left(\frac{1}{4\pi}\int r_\Gamma{}^3 d\omega\right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{1/3}$（$V$ は物体の体積）が知られている.

微小変位に対しては $F$ は $e_{ik}$ の正値二次形式で与えられる．その係数は弾性定数で一般には四階のテンソルであるが，等方性均質物体では二つの係数だけが独立で

$$F=\frac{\lambda}{2}(e_{11}+e_{22}+e_{33})^2+\mu(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2+2e_{23}^2+2e_{31}^2+2e_{12}^2) \qquad (6.2')$$

の形をとる．$\lambda, \mu$ を Lamé の定数とよぶ．

空間の体積 G を占める弾性体の表面 $\Gamma$ の単位面積に与えられた外力 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, p_3)$ が作用するときの全エネルギーは

$$2J[\boldsymbol{u}]=\int_G F\,dx-2\int_\Gamma \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}\,dS \qquad (6.3)$$

である．弾性体の平衡状態は $J[\boldsymbol{u}]$ が最小になるような $\boldsymbol{u}$ によって達せられる．これは三変数 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ の三つの函数 $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$ に関する変分の問題で，かなり複雑であるが本質的には例えば §4 の問題と変らない．ただし $\boldsymbol{u}$ に境界条件は課せられていない．

Euler の方程式を作ると

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i}=0 \qquad (6.4)$$

となる．ただし

$$\left.\begin{aligned} p_{11}&=\frac{\partial F}{\partial e_{11}}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{11}, \cdots, \\ p_{23}&=p_{32}=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial e_{23}}=2\mu e_{23}, \cdots. \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

自然の境界条件は

$$\sum_{i=1}^{3} p_{ik}\cos(x_i, \nu)=p_k \qquad (6.6)$$

で与えられる．$\nu$ は外向き法線を表わす．$p_{ik}$ は応力テンソルである．

$F$ が正値二次形式であるから，$J[\boldsymbol{u}]$ は $e_{ik}$ および表面上の $u_1, u_2, u_3$ をすべて独立な函数と考えても凸な汎函数である．$e_{ik}$ が (6.1) で与えられ，(6.3) の第二項の $u_i$ が内部の $u_i$ の境界値であるということは，はじめ独立と考えた $e_{ik}$, $u_i$ に課せられた一次の付帯条件に外ならない．よって §1.10 の相反定理が成立する．いま境界条件はないからこの束縛は同次であり，§1.10 の $\boldsymbol{a}$ は 0 である．(1.10.5) を作るとき，$\boldsymbol{u}$ について一次の項は落ちるから，結局相反汎函数は次の形になる．

$$2I = \int \left( F - e_{11}\frac{\partial F}{\partial e_{11}} - e_{12}\frac{\partial F}{\partial e_{12}} - \cdots \right) dx$$
$$= -\int F\,dx. \tag{6.7}$$

相反問題では $e_{12}$ などは (6.1) で与えられるとは考えないが，その代りもとの Euler 方程式 (6.4) と自然な境界条件 (6.6) とがはじめから付帯条件として課せられ，この条件の下で $I$ を最大（あるいは $-I$ を最小）にすることが要求される．したがって (6.7) の $F$ を“応力” $p_{ik}$ の函数とみなすのが都合がよい．すなわち (6.7) で

$$F = \frac{1}{4\mu}(p_{11}^2 + p_{22}^2 + p_{33}^2 + 2p_{23}^2 + 2p_{31}^2 + 2p_{12}^2) - \frac{\lambda}{4\mu(3\lambda+2\mu)}(p_{11}+p_{22}+p_{33})^2 \tag{6.8}$$

となり，(6.4) と (6.6) とを付帯条件として $I$ が最大になるような応力分布が実際の平衡状態を表わす．この形に表わされた変分原理が Castigliano の定理である．

なお上では簡単のために体積に働く外力や，固定された境界部分はないものと仮定したが，このような一般の場合にも上の結果は容易に拡張される．

## §7　柱体の振り剛性

前節の結果を標記の問題に応用してみる．$z$ 軸に平行な柱形の弾性体を考え，$xy$ 面での切口は単連結な領域 G で与えられるとする．この柱体の下面を固定し，上面に力のモーメントを加えて微小な振り変形を与える．側面では外力を与えないから，側面での境界条件は (6.6) によって

$$p_{xx}x_\nu + p_{yx}y_\nu = 0, \quad p_{xy}x_\nu + p_{yy}y_\nu = 0, \quad p_{xz}x_\nu + p_{yz}y_\nu = 0 \tag{7.1}$$

などで与えられる．前の $x_1, x_2, x_3$ の代りに $x, y, z$ とかき，$\cos(x,\nu) = x_\nu$ などとおいてある（側面では $z_\nu = 0$ に注意）．他方応力は $z$ にはよらないと考えられるから，Euler 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}p_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}p_{yx} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}p_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}p_{yy} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}p_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}p_{yz} = 0. \tag{7.2}$$

これらの条件は $p_{xz} = p_{zx}$，$p_{yz} = p_{zy}$ 以外の成分をすべて 0 とおいて満足させることができる．（この二つは上下の底面で外力のモーメントが与えられているから，むろん 0 にはなれない．）すると考えるべき条件は (7.1), (7.2) の各々の最後の式だけである．(7.2) の最後の式から

$$p_{xz}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad p_{yz}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{7.3}$$

のような函数 $\psi=\psi(x,y)$ の存在することがわかる．これを (*7.1*) の最後の式に代入すると，側面すなわち G の境界 Γ で $\partial\psi/\partial x:\partial\psi/\partial y=x_\nu:y_\nu$ となり，grad $\psi$ は境界の法線方向と一致する．これは Γ で $\psi$ が定数であることを示すが，$\psi$ には定数を加えてもよいから

$$\Gamma \text{ で}\qquad \psi=0 \tag{7.4}$$

とおいてよろしい．

よって前節に与えた Castigliano の定理は

$$2I[\psi]=-\int_G F\,dx\,dy \tag{7.5}$$

を最大にすることに帰着する．ただし境界条件として単位大きさの力のモーメントが与えられているとすると，$xp_{yz}-yp_{xz}$ の積分すなわち（以下 $\partial\psi/\partial x=\psi_x$ などとかく）

$$-\int_G(x\psi_x+y\psi_y)dx\,dy=1 \tag{7.6}$$

という付帯条件が加わる．(*7.4*) に注意して部分積分を行うと，これは

$$2\int\psi\,dx\,dy=1 \tag{7.7}$$

となる．

均質物体では $F$ は (*6.8*) で与えられるが，いまの場合には (*7.3*) 以外は 0 であるから，(*7.5*) は次の形になる：

$$2I[\psi]=-\frac{1}{2\mu}\int_G(\psi_x{}^2+\psi_y{}^2)dx\,dy. \tag{7.8}$$

(*7.7*) は $\psi$ に関して一次の条件であるから，この条件の下に (*7.8*) を最大にすることは本質的には

$$J[\psi]=\frac{\displaystyle\int_G(\psi_x{}^2+\psi_y{}^2)dx\,dy}{4\left(\displaystyle\int_G\psi\,dx\,dy\right)^2} \tag{7.9}$$

を最小にすることと同等である．しかも因子 $\dfrac{1}{2\mu}$ を無視すれば，$J[\psi]$ の最小値 $J[\overline{\psi}]$ は単位モーメントが働くときの円柱単位長さあたりの捩れエネルギーに等しいから，$\mu/J[\overline{\psi}]$ がちょうど**振り剛性** $P$ に等しい．すなわち

$$\mu^{-1}P \geqq \frac{4\left(\int_G \psi\, dx\, dy\right)^2}{\int_G (\psi_x{}^2+\psi_y{}^2)dx\, dy} \tag{7.10}$$

という不等式がえられた．ここで $\psi$ は境界条件 (7.4) を満足すれば何でもよろしい．

例によって (7.9) あるいは (7.8) に相反定理を適用すれば $P$ の上界を与える不等式が得られる．ここではもっと直接にこれを出そう．付帯条件

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 2 \tag{7.11}$$

を満足するベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$ をとると，

$$\mathrm{div}\, \psi\boldsymbol{v} = 2\psi + \mathrm{grad}\, \psi \cdot \boldsymbol{v} \tag{7.12}$$

の左辺の積分は (7.4) によって 0 になるから，Schwarz の不等式により

$$4\left(\int_G \psi\, dx\, dy\right)^2 = \left(\int_G \mathrm{grad}\, \psi \cdot \boldsymbol{v}\, dx\, dy\right)^2$$
$$\leqq \int_G (\mathrm{grad}\, \psi)^2 dx\, dy \int_G \boldsymbol{v}^2 dx\, dy \tag{7.13}$$

を得る．したがって (7.10) の右辺は $\int \boldsymbol{v}^2 dx\, dy$ より大きくない．(7.10) の右辺の最大値は $\mu^{-1}P$ であるから

$$\mu^{-1}P \leqq \int_G \boldsymbol{v}^2 dx\, dy \tag{7.14}$$

という結果がえられる．ここで $\boldsymbol{v}$ は (7.11) を満足すれば何でもよろしい．

例題〕 辺の長さ $2a$ の正方柱の捩り剛性を求めてみる．頂点の座標を $(\pm a, \pm a)$ とし，

$$\psi = (a^2-x^2)(a^2-y^2) \tag{7.15}$$

とおくと境界条件 (7.4) は満足されるから，(7.10) によって容易に

$$\mu^{-1}P \geqq \frac{20}{9}a^4 = 2.22a^4. \tag{7.16}$$

また $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}=(x, y)$ とすると (7.11) は満足されるから，(7.14) によって

$$\mu^{-1}P \leqq \frac{8}{3}a^4 = 2.67a^4. \tag{7.17}$$

これらの上下界はまだ十分精密ではないが，用いた試験函数が簡単なものであるからやむを得ない．

問題 1〕 上の例において

$$\psi = (a^2-x^2)(a^2-y^2)[1+\alpha(x^2+y^2)]$$

のようにパラメタ $\alpha$ を入れて上界を改良せよ．また

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} + \beta\, \mathrm{grad}\, (x^4-6x^2y^2+y^4) \qquad (\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 2)$$

を用いて下界を改良せよ.

問題 2〕 勝手な函数 $\varphi(x,y)$ をとり, (*7. 14*) で

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}+(\varphi_y, -\varphi_x)$$

とおけば $\operatorname{div} \boldsymbol{v}=2$ が満足される. これより不等式

$$\mu^{-1}P \leqq \int_G (x^2+y^2)dx\,dy - \frac{\left(\int_\Gamma (x^2+y^2)d\varphi\right)^2}{4\int_G ({\varphi_x}^2+{\varphi_y}^2)dx\,dy}$$

を導け. ただし G は単連結とする.

## §8 非線型の問題. Thomas-Fermi 方程式

今まで取り扱ったような上下界に関する問題はまだ外にもあるが, 形式的には大同小異であって, Euler 方程式が線型, したがって最大最小を考える汎函数が二次である点が共通である. 線型でない問題でも相反定理の成立する例は多数あるが, 考えている汎函数の最小 (大) 値が実際に興味のある量でないと, その近似値を求めても仕方がない. この点において非線型の問題は線型の問題と趣を異にし, 最小値が特に興味をひかない場合が多いのである. (§6. 2, 例題 2 などはそうである.) その中で Thomas-Fermi の方程式は例外的で, 相反定理が実際に役に立つ一例をなしている.

中性原子に対する Thomas-Fermi の方程式は

$$u''=x^{-1/2}u^{3/2} \qquad (0<x<\infty) \tag{8.1}$$

で与えられる. その解で境界条件

$$u(0)=1, \quad \lim_{x\to\infty} u(x)=0 \tag{8.2}$$

を満足するものを中性原子の Thomas-Fermi 函数という. (*8. 1*) は非線型であるから, このような解の存在と一義性は決して自明ではないが, 証明はむずかしくはない. しかし以下これはわかっているものと仮定する.

(*8. 1*) が次の汎函数の Euler 方程式であることは容易に気がつく:

$$2J[u]=\int_0^\infty \left(u'^2+\frac{4}{5}x^{-1/2}u^{5/2}\right)dx, \tag{8.3}$$

ただし $u(x)\geqq 0$ とし, $u$ には境界条件 (*8. 2*) をつけておく. (*8. 3*) の被積分函数 $2F(x,u,u')$ は $u, u'$ を別々の変数と考えたときに凸函数であるから, 正しい解 $u=\bar{u}$ に対して $2J[u]$ は最小値をとり, 相反定理が適用できる. 直接 Friedrichs 変換 (*4. 8. 1*), (*4. 8. 3*) を用いると,

$$\left.\begin{aligned} p &= F_{u'} = u', \quad p' = F_u = x^{-1/2}u^{3/2}, \\ \Phi &= pu'+p'u-F = \frac{1}{2}p^2+\frac{3}{5}x^{1/3}p'^{5/3} \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

となって，相反汎函数は (4.8.4) で $b_1=0$, $b_0=1$ を代入して

$$2I[p] = -2p(0)-\int_0^\infty\left(p^2+\frac{6}{5}x^{1/3}p'^{5/3}\right)dx \tag{8.5}$$

となる．ここで $p(x)$ は $p'(x)\geqq 0$ を満たさねばならない．右辺の積分が存在するためには当然 $x\to\infty$ で $p\to 0$ とならねばならないから，$p(0)<0$ である．$I[p]$ の最大値は $J[u]$ の最小値 $J[\overline{u}]$ に等しい．

したがって (8.2) を満足する勝手な $u\geqq 0$ と，$p'\geqq 0$ のような勝手な $p$ とに対して

$$2I[p]\leqq 2J[\overline{u}]\leqq 2J[u] \tag{8.6}$$

が成立し，$J[\overline{u}]$ の近似値は容易に求められるはずである．しかし $J[u]$ は微分方程式を変分法から導くためにこしらえた汎函数であって，はじめから与えられたものではないから，$J[\overline{u}]$ を求めても何の役に立つかという疑問がおこる．

ところがこの問題では特殊な事情があって，$J[\overline{u}]$ は函数 $\overline{u}$ に関するもっと重要な量と簡単な関係で結ばれている．そのような量の一つは $\overline{u}$ の**初期傾斜**

$$B_0 = -\overline{u}'(0) \tag{8.7}$$

である．これはまた

$$B_0 = \int_0^\infty(\overline{u}'^2+x^{-1/2}\overline{u}^{5/2})dx \tag{8.8}$$

と書くこともできる．$u=\overline{u}$ が (8.1) を満足するから被積分函数は $\overline{u}'^2+\overline{u}\overline{u}''=(\overline{u}\overline{u}')'$ となり，(8.2) を使えば直ちに (8.8) を得るのである．

(8.3) と (8.8) は似ているがすこし違う．もし (8.1) が線型であって，右辺の $u^{3/2}$ の代りに $u$ が入っていたとすれば，(8.8) は全く (8.3) と一致したであろう．実際このとき問題は §2 の問題と全く同じになる．

非線型のために (8.8) は (8.3) と一致しないが，その代り函数 $x^{-1/2}$ の特殊性を用いて $B_0$ と $J[\overline{u}]$ との間に関係のあることがわかる．これを導くには定数 $\lambda>0$ を使って

$$u_\lambda(x) = \overline{u}(\lambda x) \tag{8.9}$$

とおき $J[u_\lambda]$ を計算する．この積分で $\lambda x=t$ によって変数を変換すると

$$2J[u_\lambda]=\lambda\int_0^\infty \overline{u}'(t)^2dt+\frac{4}{5}\lambda^{-1/2}\int_0^\infty t^{-1/2}\overline{u}(t)^{5/2}dt. \tag{8.10}$$

$\overline{u}$ は $J$ の最小函数であるから，$\partial J[u_\lambda]/\partial\lambda$ は $\lambda=1$ で $0$ となるはずである．これを書き下すと，$t$ の代りに再び $x$ とかいて

$$5\int_0^\infty \overline{u}'^2dx=2\int_0^\infty x^{-1/2}\overline{u}^{5/2}dx \tag{8.11}$$

となり，(8.8) の二つの項の積分の間に簡単な関係のあることがわかった．すると $J[\overline{u}]$ と $B_0$ との間に

$$\frac{6}{7}B_0=2J[\overline{u}] \tag{8.12}$$

という関係が成り立ち，(8.6) によって $B_0$ の上下界が

$$-2p(0)-\int_0^\infty\left(p^2+\frac{6}{5}x^{1/3}p'^{5/3}\right)dx\leqq\frac{6}{7}B_0\leqq\int_0^\infty\left(u'^2+\frac{4}{5}x^{-1/2}u^{5/2}\right)dx \tag{8.13}$$

によって近似的に計算される．

(8.13) はこのまま使ってもよいが，次のように変形した方が便利である．勝手な函数 $U(x)\geqq0$ をとり，尺度の変換

$$u(x)=U(\lambda x)/U(0),\qquad \lambda>0 \tag{8.14}$$

を行うと，$u$ は必要な境界条件を満足しているから，(8.13) に代入してよろしい．(8.10) の計算と同じようにして

$$\frac{6}{7}B_0\leqq\frac{\lambda}{U(0)^2}\int_0^\infty U'(x)^2dx+\frac{4}{5}\frac{\lambda^{-1/2}}{U(0)^{5/2}}\int_0^\infty x^{-1/2}U(x)^{5/2}dx. \tag{8.15}$$

これは $\lambda>0$ が何であっても成立するから，$\lambda>0$ の範囲で右辺の最小値をとってもよい．その結果は

$$B_0\leqq2^{-1/3}\cdot5^{-2/3}\cdot7U(0)^{-7/3}\left(\int_0^\infty U'^2dx\right)^{1/3}\left(\int_0^\infty x^{-1/2}U^{5/2}dx\right)^{2/3}. \tag{8.16}$$

同じように勝手な函数 $P(x)$ (ただし $P'(x)>0$) をとり

$$p(x)=\mu P(\lambda x),\qquad \lambda>0,\ \mu>0 \tag{8.17}$$

とおいて (8.13) の左辺に代入すると

$$\frac{6}{7}B_0\geqq-2\mu P(0)-\frac{\mu^2}{\lambda}\int_0^\infty P(x)^2dx-\frac{6}{5}\mu^{5/3}\lambda^{1/3}\int_0^\infty x^{1/3}P'(x)^{5/3}dx. \tag{8.18}$$

この式は $\lambda,\mu$ が何であっても正しいから，右辺が最大になるように $\lambda,\mu$ を定めると

$$B_0 \geqq 2^{1/3}\cdot 5\cdot 7^{-4/3}[-P(0)]^{7/3}\left(\int_0^\infty P^2 dx\right)^{-1/3}\left(\int_0^\infty x^{1/3}P'^{5/3}dx\right)^{-1} \tag{8.19}$$

を得る．

例題〕 (*8.16*) で

$$U(x) = (1+x)^{-2} \tag{8.20}$$

とおくと右辺はベータ函数 (I §5.20) を用いて表わされ

$$B_0 \leqq 2^{1/3}\cdot 5^{-2/3}\cdot 7\cdot B(1,5)^{1/3}B\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)^{2/3} = 1.595 \tag{8.21}$$

となる．また (*8.19*) で

$$P(x) = -e^{-\sqrt{x}} \tag{8.22}$$

とおくと

$$B_0 \geqq 2^{4/3}\cdot 3^{-1}\cdot 5^2\cdot 7^{-4/3} = 1.568 \tag{8.23}$$

を得る．用いた試験函数が簡単な割合にはこれらの上下界はよい．なお (*8.20*) で $(1+x)^{-2}$ の代りに $(1+\lambda x)^{-2}$ のようにパラメタ $\lambda$ を入れておいても，(*8.16*) を使うかぎり結果は変らない．このような尺度の変更はすでに (*8.16*) に織りこみずみだからである．(*8.22*) の函数についてもおなじことがいえる．

いまの問題では線型試験函数 (§6.2) は役に立たない．$U$ がパラメタの一次式であるとき $\int x^{-1/2}U^{5/2}dx$ のような量は，パラメタを不定にしておいては計算ができないからである．この理由によって，$B_0$ の近似値を精密に求めることは，線型の問題にくらべると困難の程度が大きい．

## §9　相反定理の成立しない場合

再び §2 の問題 (比勾配) を考える．そこでは $p(x)>0$, $r(x)>0$ と仮定したが，$r>0$ の方は満足されていても $p>0$ の成立しない問題も多い．そのような一般の場合には，$2F = pu^2 + ru'^2$ は $u, u'$ を独立な変数と考えたのでは凸函数ではないから，(*6.13.7*) の $J[u]$ に相反定理あるいは Friedrichs 変換を適用して上下界を求めることはできない．したがって $Q$ の上下界を求めることは前のように簡単ではないが，不可能ではない．

$\bar{u}$ は Euler 方程式を満足するから

$$2J[u]-2J[\bar{u}] = 2J[\eta], \qquad \eta = u-\bar{u} \tag{9.1}$$

が成立する．$\eta$ は $u$ の変分であり，$J[\eta]$ は $J$ の第二変分に外ならない．$\eta$ は境界条件

$$\eta(a_0) = \eta(a_1) = 0 \tag{9.2}$$

を満足する．これに注意して部分積分を行うと

$$2J[\eta]=\int_{a_0}^{a_1}[-(r\eta')'+p\eta]\eta\,dx=\int\eta\,H\eta\,dx \tag{9.3}$$

と書くことができる．ただし一般に

$$Hv=-(rv')'+pv \tag{9.4}$$

とおいた．

いま $H$ に関する次のような固有値問題を考えてみる：

$$H\varphi=\lambda\rho\varphi. \tag{9.5}$$

ここで $\rho$ は定まった函数で $\rho(x)>0$ とする．函数 $\varphi$ には (9.2) と同じ境界条件を課しておく．§3.2, §3.3 にのべたように，固有値は数列 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots(\lambda_n\to\infty)$ を作り，相当する固有函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ が定まって，完備な正規直交系を作る：

$$\int\varphi_i\varphi_k\rho\,dx=\delta_{ik}. \tag{9.6}$$

変分 $\eta(x)$ をこの完備直交系で展開したものは，(3.3.7) により

$$\eta\sim\sum c_i\varphi_i,\quad c_i=\int\varphi_i\eta\rho\,dx \tag{9.7}$$

となる．同様に函数 $\rho^{-1}H\eta$ の展開を

$$\rho^{-1}H\eta\sim\sum d_i\varphi_i,\quad d_i=\int\varphi_iH\eta\cdot dx \tag{9.8}$$

とする．$\varphi_i$ も $\eta$ も境界条件 (9.2) を満足するから，Green の定理と $H\varphi_i=\lambda_i\rho\varphi_i$ によって

$$d_i=\int\eta H\varphi_i dx=\lambda_i\int\eta\varphi_i\rho\,dx=\lambda_ic_i \tag{9.9}$$

を得る．さらに Parseval の関係 (3.3.8) によって

$$\left.\begin{aligned}\int\eta^2\rho\,dx&=\sum c_i^2,\\ 2J[\eta]=\int\eta\,H\eta\,dx&=\sum\lambda_ic_i^2,\\ \int(H\eta)^2\rho^{-1}dx&=\sum d_i^2=\sum\lambda_i^2c_i^2\end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

が得られる．

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ のうち正で最小のものを $\alpha$，負で絶対値最小のものを $-\beta$ とすると

$$\left.\begin{aligned}&\int\eta\,H\eta\,dx=\sum\lambda_ic_i^2=\sum\frac{1}{\lambda_i}\lambda_i^2c_i^2\leqq\frac{1}{\alpha}\sum\lambda_i^2c_i^2,\\ &\int\eta\,H\eta\,dx\geqq-\frac{1}{\beta}\sum\lambda_i^2c_i^2\end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

である．$\sum \lambda_i^2 c_i^2 = \varepsilon^2$ とおくと，(9. 10) によってこれは

$$\varepsilon^2 = \int (H\eta)^2 \rho^{-1} dx = \int (Lu)^2 \rho^{-1} dx \tag{9. 12}$$

となる．ただし演算子 $L$ は形式的には $H$ と同じ式 (9. 4) で定義されるが，境界条件を必ずしも満足しない一般の函数に作用させるときに用いる．したがって $H\eta = L\eta = L(u-\overline{u}) = Lu$ である ($L\overline{u}=0$ に注意)．(9. 12), (9. 11) より

$$-\frac{1}{\beta}\varepsilon^2 \leqq \int \eta\, H\eta\, dx \leqq \frac{1}{\alpha}\varepsilon^2. \tag{9. 13}$$

したがって (9. 3) に注意すると，(9. 1) から

$$-\frac{1}{\alpha}\varepsilon^2 \leqq 2J[\overline{u}] - 2J[u] \leqq \frac{1}{\beta}\varepsilon^2 \tag{9. 14}$$

がえられる．

試験函数 $u$ を与えれば $2J[u]$ および $\varepsilon^2$ は計算できる量である．したがってもし $\alpha, \beta$ がわかっていれば，(9. 14) によって $2J[\overline{u}]$ の上下界が求められる．一般には $\alpha, \beta$ を正しく求めることは，$2J[\overline{u}]$ を求めることと同じくらい，あるいはそれ以上に困難である．しかし $u$ がよい近似函数であれば $\varepsilon^2$ は小さい（実際 $u=\overline{u}$ なら $L\overline{u}=0$ によって $\varepsilon^2=0$ である）から，$\alpha, \beta$ に対してはごく粗い値（下界）がわかっていれば上の式は役に立つのである．なお補助函数 $\rho$ のとり方によって，同じ $u$ に対しても $\alpha, \beta, \varepsilon^2$ は違ってくることに注意する．

特に $J[\eta]$ が正値である（すなわち $a_0$ の共役点が $a_1$ の右にある）ときには $\lambda_1 > 0$ であるから $\alpha = \lambda_1$, $\beta = \infty$ としてよく

$$2J[u] - \frac{1}{\lambda_1}\varepsilon^2 \leqq 2J[\overline{u}] \leqq 2J[u] \tag{9. 15}$$

が得られる．

この節で導いた方法は §2 の相反定理による方法と全く無関係ではない．$p>0$ のときには $\rho$ として $p$ を採用することができるが，そうすると

$$2J[\eta] \geqq \int p\eta^2 dx \tag{9. 16}$$

によって $\lambda_1 \geqq 1$ であるから，(9. 15) は

$$2J[u] - \varepsilon^2 \leqq 2J[\overline{u}] \leqq 2J[u] \tag{9. 17}$$

となる．一方 $\varepsilon^2$ は (3. 4) において $\varphi = ru'$ を用いたときの $\varepsilon^2$ と全く一致することが，(2. 9) からわかる．したがって (9. 17) は (2. 8) から直ちに得られる

はずのものである．

実際の計算には例えば線型試験函数を用いると $\varepsilon^2$ はパラメタの二次式になるから，これが最小になるようにパラメタを定めればよい．

## §10　散乱位相の上下界

§6.14 以下で論じた散乱位相の変分表式は最大値も最小値もとらないから，それによって求めた近似値が正しい位相 $\bar{\delta}$ の上界であるか下界であるかわからない（ただし (*6.15.5*), (*6.15.10*) は例外）．ここでは $\bar{\delta}$ の上下界を求める方法をのべよう．その方法は前節のものと類似している．

(*6.14.1*) の $J[u]$ は $u=\bar{u}$ で停留でその第一変分は 0 となるから

$$J[u]-J[\bar{u}]=\int_0^\infty \eta\, L\eta\, dx, \qquad \eta=u-\bar{u} \tag{10.1}$$

が成り立つ．この右辺の大きさを評価するのに前節と同じ方法が用いられる．

再び補助の函数 $\rho(x)>0$ を勝手に定めて (*9.5*) と同じ形の固有値問題を考える．ただし演算子 $H$ は $L$ とおなじものであるが，同次の境界条件

$$\varphi(0)=0\,;\ x\to\infty\ \text{のとき}\qquad \varphi\sim(\text{定数})\times\sin kx \tag{10.2}$$

を満足する函数にだけ作用するものと定義する．$\rho(x)$ が $x\to\infty$ で十分速く 0 に近づく函数であれば，$H$ の固有値は

$$\cdots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots \tag{10.3}$$

のような離散的な値をとることが証明できる．前節の場合には相当する数列は左できれていたが，今度は一般には左右にかぎりなくのびている．しかし相当する固有函数系 $\varphi_i\,(i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ が完備な正規直交系をなし，展開定理，Parseval の等式などが成立することに変りはない．

$u$ も $\bar{u}$ も (*6.12.2*) と (*6.14.2*) とを満足するから，変分 $\eta=u-\bar{u}$ は境界条件 (*10.2*) を満足し，したがって $L\eta=H\eta$ と書いてよい．これに対し前節 (*9.6*) 以下の式はすべてそのまま成り立ち (*9.14*) が $J[\bar{u}]=k\cot\bar{\delta}$ の満足する不等式としてえられる（前節の $2J$ にここの $J$ が対応する）．すなわち

$$-\frac{1}{\alpha}\varepsilon^2\leqq k\cot\bar{\delta}-\gamma-\int_0^\infty u\,Lu\,dx\leqq\frac{1}{\beta}\varepsilon^2, \tag{10.4}$$

$$\varepsilon^2=\int_0^\infty (Lu)^2\rho(x)^{-1}dx. \tag{10.5}$$

$\alpha$ は (*10.3*) のうち正で最小のもの，$-\beta$ は負で絶対値最小のものである．$\alpha, \beta$

の評価については前節と同様な注意があてはまる．

固有値 $\lambda_n$ の意味を調べてみよう．$H\varphi=\lambda\rho\varphi$ は $L\varphi=\lambda\rho\varphi$ すなわち

$$\varphi''+[k^2-V(x)+\lambda\rho(x)]\varphi=0 \tag{10.6}$$

が (*10.2*) を満足する解をもつことを意味する．いいかえると，ポテンシアル $V(x)$ を $V(x)-\lambda\rho(x)$ でおきかえたときの散乱位相が $n\pi$ に等しくなる $\lambda$ の値が $\lambda_n$ に外ならない．このことに注意すると，$\alpha,\beta$ についてある程度の知識がえられる．

いま特に $V(x)<0$ の場合を考えてみる．このときは $\rho(x)=-V(x)>0$ とおくのが便利である．すると $V-\lambda\rho=(1+\lambda)V$ となり，$-1\leqq\lambda\leqq0$ なら $V-\lambda\rho$ は 0 と $V$ との間にあるから，相当する散乱位相は 0 と $\delta$ との間にある ($V<0$ だから $\delta>0$ である)．故にもし $\delta<\pi$ であれば，この位相は決して $n\pi$ に等しくならない．これは $\beta\geqq1$ であることを示す．したがって (*10.4*) の第二の不等式から

$$k\cot\delta\leqq\gamma+\int_0^\infty u\,Lu\,dx-\int_0^\infty(Lu)^2V(x)^{-1}dx=J_S[u] \tag{10.7}$$

がえられる．(右辺は (*6.15.5*) の $J_S[u]$ と一致する.) これより $V(x)<0$, $\delta<\pi$ なら，$J_S[u]$ は $k\cot\delta$ の上界を与えることがわかる．

$V(x)>0$ のときには (このときは $\delta<0$) $\rho(x)=V(x)$ とおけば $V-\lambda\rho=(1-\lambda)V$ となり，$|\delta|<\pi$ ならば上と同様にして $\alpha\geqq1$ であることがわかるから，(*10.4*) の第一の不等式から

$$k\cot\delta\geqq\gamma+\int_0^\infty u\,Lu\,dx-\int_0^\infty(Lu)^2V(x)^{-1}dx=J_S[u] \tag{10.8}$$

を得，$J_S[u]$ が $k\cot\delta$ の下界を与えることがわかる．これで§15 の終りにのべたことの証明がえられた．

ここにのべた二つの特別の場合のうち，第一の場合の $\beta$ と，第二の場合の $\alpha$ は 1 よりかなり大きいかもしれない．それがわかっているときには (*10.7*), (*10.8*) よりもさらによい評価が (*10.4*) からえられるはずである．また残りの $\alpha$ または $\beta$ の粗い評価ができれば，$\delta$ の精密な上下界が求められるわけである．

〔例題〕 $V(x)=-2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-2x}$ (水素原子の Hartree 場) $V(x)<0$ であるから $\rho=-V$ ととる．試験函数として (*6.14.5*) をとり

$$y(x)=e^{-2x}(1+cx)$$

とおく．(10.5) は $\gamma$ と $c$ との二次式になるから，これが最小になるように $\gamma, c$ を定めると，$k=0.272$ (これは1電子ボルトのエネルギーに相当する) のとき

$$\gamma=0.1625,\quad c=-0.1488,\quad \varepsilon^2=0.000067,$$

これを用いて

$$1.03383<\overline{\delta}<1.03400$$

という厳密な評価がえられる．ただしここでは，別の考察によって $\alpha$ の粗い値を求めている ($\alpha>1.5$)．また $k\cot\overline{\delta}$ の上界の方は (10.4) をそのまま用いず，(6.15.2) の $J_\theta[u]$ で $\theta=\pi/2$ としたものから導かれた不等式を用いて出したものである[1]．

## §11　散乱長の上下界

散乱長 $\overline{a}$ (§6.12をみよ) の変分表式は (6.14.14), (6.15.12) で与えられ，これに対しても前節と同様な取扱いができるが，結果は多くの点で簡単化される．あるいは (10.4), (10.5) で $k\to 0$ とした極限を考えてもよい．$k\cot\delta\to -1/\overline{a}$, $\gamma\to -1/a$ であるから，このようにして

$$-\frac{1}{\beta}\varepsilon^2\leqq\frac{1}{\overline{a}}-\frac{1}{a}-\int_0^\infty u(u''-Vu)dx\leqq\frac{1}{\alpha}\varepsilon^2, \tag{11.1}$$

$$\varepsilon^2=\int_0^\infty (u''-Vu)^2\rho(x)^{-1}dx \tag{11.2}$$

という評価を得る．試験函数 $u$ には条件

$$u(0)=0,\quad x\to\infty\ \text{で}\qquad u\sim 1-\frac{x}{a} \tag{11.3}$$

が要求される．$\alpha$ は固有値問題

$$\varphi''-V(x)\varphi+\lambda\rho(x)\varphi=0, \tag{11.4}$$

$$\varphi(0)=0:\ x\to\infty\ \text{のとき}\qquad \varphi(x)\sim(\text{定数})x \tag{11.5}$$

の固有値 $\lambda$ のうち最小の正の固有値を表わし，おなじく $-\beta$ は負の固有値で絶対値最小のものを表わす．前節とおなじく $\rho(x)$ は，正で $x\to\infty$ で速かに0に近づくものであれば，何でもよい．

$\alpha, \beta$ を評価することは，$k>0$ の場合よりもやさしい．とくに $V(x)>0$ のときは簡単である．このときは $\rho=V$ とおくと，(11.4) は $\varphi''+(\lambda-1)V\varphi=0$ となり，$\lambda<1$ ならば $\varphi''/\varphi>0$，したがって $\varphi$ のグラフは横軸に向って凸となるから，境界条件 (11.5) を満足させることはできない．これはすべての固有値が $\lambda\geqq 1$ の範囲にあること，すなわち $\alpha\geqq 1$, $\beta=\infty$ としてよいことを示す．故に (11.1), (11.2) から

(1) T. Kato, Progr. Theor. Phys., 6 (1951), 294 参照.

$$\frac{1}{a}+\int_0^\infty u(u''-Vu)dx \leqq \frac{1}{\bar{a}} \leqq \frac{1}{a}+\int_0^\infty (u''-Vu)\frac{u''}{V}dx \qquad (11.6)$$

を得る．これは未知の量を全くふくまない完全な評価式である．

問題〕 (*11.6*) の第三辺が第一辺より小さくないことを直接証明せよ．

次に $V(x)<0$ の場合を考えてみよう．今度は $\rho=-V$ ととると，(*11.4*) は

$$\varphi''-(1+\lambda)V\varphi=0 \qquad (11.7)$$

となるから，$\lambda<-1$ ならば $\varphi''/\varphi>0$ となって (*11.5*) は満足されない．これはすべての固有値が $\lambda\geqq-1$ の範囲にあることを教えるが，これだけでは $\alpha,\beta$ について何の知識もえられない．そこでさらに $V(x)$ が十分弱くて，(*11.4*) で $\lambda=0$ とおいた微分方程式に関して，$x=0$ の共役点が存在しないこと，いいかえると，$\varphi''-V\varphi=0$ の解で $\varphi(0)=0$ を満足するものは，$x=0$ 以外で 0 にならないことを仮定する．このときには $\lambda\leqq0$ であるかぎり $(1+\lambda)V\geqq V$ であるから，$\varphi''-(1+\lambda)V\varphi=0$ の解はなおさら 0 にならない (I, 295 頁) ので，(*11.5*) を満足することはできない．ただし $\lambda=-1$ だけは例外で，このときは明らかに $\varphi=x$ が (*11.5*) を満足する解になる．よって負の固有値は $-1$ だけであり，$\beta=1$ となる．なお章末の補遺を参照．

一般には $\alpha,\beta$ の定義に戻って考えれば，もっと有利な $\alpha,\beta$ の評価の得られることが多い．いずれにしても $\alpha,\beta$ を評価することは固有値問題であり，これは次節で取り扱う．

例題〕 湯川ポテンシアル $V(x)=-be^{-x}/x$．§6.10, 例題2で取り扱った固有値問題 (*6.10.7*) は (*11.7*) と同形であるが $x\to\infty$ での境界条件は "$u(\infty)=$有限" であって (*11.5*) と違う．しかし (*6.10.7*) の最低固有値 $\mu_1>0$ があって (混同をさけるため (*6.10.7*) の固有値 $\lambda_1$ を $\mu_1$ と書く)，$\lambda\leqq\mu_1$ ならば (*6.10.7*) の解は $x=0$ 以外に零点をもたないことは，固有値問題の一般的性質からわかることである (§3.2)．故に (*11.7*) において $(1+\lambda)b<\mu_1$ ならば解は零点をもたない．これは (*11.4*) の固有値が $\lambda\geqq-1+b^{-1}\mu_1$ の範囲にあることを示すから，$b<\mu_1$ ならば

$$\alpha\geqq\frac{\mu_1}{b}-1, \quad \beta=\infty$$

となる．よって (*11.1*) から $\bar{a}$ の上下界が求められる．$\mu_1$ の近似値は (*6.10.12*) で $\mu_1\fallingdotseq1.6804$ を得ているが，これは $\mu_1$ の上界である．$\alpha$ に対しては下界が欲しいので，$\mu_1$ に対してもたとえ粗くてもよいから下界を得ることが必要となる．それには比較法による結果 $\mu_1\geqq1$ が役に立つ．((*1.8*) をみよ.) しかしこれが利用できるためには，$b<1$ でないといけない．$\mu_1$ に対するもっとよい下界は次節の例題6で示すように，$\mu_1>1.675$ である．これを用いれば上の結果は $b<1.675$ ならば役に立つ．

## §12 固有値の上下界

比勾配(§9), 散乱位相(§10), 散乱長(§11)などの上下界を与える公式には, ある種の固有値問題の固有値として定まる量 $\alpha, \beta$ が補助的な役割を演じている. この節では一般に固有値問題を取り扱い, 固有値の上下界を与える公式を導こう. この問題が独立の重要性をもつことはいうまでもない.

R-R の方法(第6章)では固有値の上界だけが求められた. しかし $n$ 番目の固有値 $\lambda_n$ の上界を計算するには $n$ 次元の代数的固有値問題を正確に解かねばならない. そこで上界だけについても, 新らしい公式をもつことが望ましいわけである. ここでは便宜上有限次元ベクトルの固有値問題についてこのような公式を導くことにするが, 結果はもっと一般の問題に対してそのまま成立する. 記号は §1.5, §1.6 に従う.

以下番号 $i$ を固定する. 第 $i$ 固有ベクトル $\boldsymbol{u}^{(i)}$ の近似ベクトルと考えられる "試験ベクトル" $\boldsymbol{u}$ を用いて

$$\left.\begin{aligned} I(\boldsymbol{u}) &= \frac{(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})} = \frac{J[\boldsymbol{u}]}{K[\boldsymbol{u}]}, \\ \varepsilon^2 &= \frac{(\boldsymbol{v}, B^{-1}\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})}, \quad \boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u} - I(\boldsymbol{u})B\boldsymbol{u} \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

を計算する. もし正確に $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{(i)}$ であれば $I(\boldsymbol{u}) = \lambda_i, \boldsymbol{v} = 0$, $\varepsilon^2 = 0$ となるべきものであるから, $\varepsilon^2$ は小さい数であると考えられる.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}, B^{-1}\boldsymbol{v}) &= (A\boldsymbol{u}, B^{-1}A\boldsymbol{u}) - 2I(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}) + I(\boldsymbol{u})^2(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u}) \\ &= (A\boldsymbol{u}, B^{-1}A\boldsymbol{u}) - I(\boldsymbol{u})^2(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{12.2}$$

であるから, $\varepsilon^2$ はまた

$$\varepsilon^2 = \frac{(A\boldsymbol{u}, B^{-1}A\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})} - I(\boldsymbol{u})^2 \tag{12.3}$$

のようにも表わされる.

$\boldsymbol{u}$ を固有函数 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ で展開して

$$\boldsymbol{u} = \sum \xi_k \boldsymbol{u}^{(k)} \tag{12.4}$$

とすれば, $\boldsymbol{u}^{(k)}$ の直交性(*1.6.2*)を用いて(*12.1*), (*12.3*)から

$$\left.\begin{aligned} I(\boldsymbol{u}) &= \frac{\sum \lambda_k \xi_k^2}{\sum \xi_k^2}, \\ \varepsilon^2 + I(\boldsymbol{u})^2 &= \frac{\sum \lambda_k^2 \xi_k^2}{\sum \xi_k^2} \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

がえられる．ここで $(Au^{(j)}, B^{-1}Au^{(k)}) = \lambda_j\lambda_k(Bu^{(j)}, u^{(k)}) = \lambda_j^2\delta_{jk}$ を用いてある．

さて $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$ であるから，

$$\lambda_k^2-(\lambda_{i-1}+\lambda_i)\lambda_k+\lambda_{i-1}\lambda_i = (\lambda_k-\lambda_{i-1})(\lambda_k-\lambda_i) \geqq 0 \tag{12.6}$$

がすべての $k=1,2,\cdots,n$ に対して成り立つ．この式に $\xi_k^2$ をかけて $k$ について加えると

$$\sum \lambda_k^2\xi_k^2-(\lambda_{i-1}+\lambda_i)\sum \lambda_k\xi_k^2+\lambda_{i-1}\lambda_i\sum \xi_k^2 \geqq 0. \tag{12.7}$$

これを $\sum \xi_k^2$ で割って (*12.5*) を代入すると

$$\varepsilon^2+(I(u)-\lambda_{i-1})(I(u)-\lambda_i) \geqq 0 \tag{12.8}$$

を得る．

もし $J(u)$ が実際に $\lambda_i$ に近く，$\lambda_i$ が縮重していないとすれば

$$\lambda_{i-1} < I(u) < \lambda_{i+1} \tag{12.9}$$

が成り立つであろう．以下これを仮定すると，(*12.8*) から

$$\lambda_i - I(u) \leqq \frac{\varepsilon^2}{I(u)-\lambda_{i-1}} \tag{12.10}$$

を得る．全く同様にして

$$\lambda_i - I(u) \geqq \frac{\varepsilon^2}{\lambda_{i+1}-I(u)} \tag{12.11}$$

が得られる．これらはそれぞれ $\lambda_i$ の上下界を与える公式である．これらの式の右辺はそれぞれ $\lambda_{i-1}$, $\lambda_{i+1}$ を含んでいるから，$\lambda_i$ の上界を求めるには $\lambda_{i-1}$ の上界を，$\lambda_i$ の下界を求めるには $\lambda_{i+1}$ の下界を知る必要がある．これでは何の役にも立たないようにみえるが，$\varepsilon^2$ が十分小さいときには，$\lambda_{i\pm1}$ の粗い値がわかれば $\lambda_i$ の精密な上下界が求められるので，実際は役に立つのである．なお $i=1$ のときには $\lambda_{i-1}=-\infty$ と考えてよいから，(*12.10*) は不等式 $\lambda_1 \leqq I[u]$ を与える．これは Rayleigh の原理に外ならない．

次に固有ベクトルを考える．$\varepsilon$ が小さければ $u$ は正しい固有ベクトル $u^{(i)}$ のよい近似になることが想像されるが，この評価を数量的に求めてみよう．

いまは (*12.9*) を仮定しているから，

$$\delta = \mathrm{Min}\,[I(u)-\lambda_{i-1},\ \lambda_{i+1}-I(u)] \tag{12.12}$$

は正である．二つの数 $I(u)\pm\delta$ の間には $\lambda_i$ 以外の固有値はないから

$$\lambda_k^2-2I(u)\lambda_k+I(u)^2-\delta^2 = (\lambda_k-I(u)+\delta)(\lambda_k-I(u)-\delta) \tag{12.13}$$

は $k=i$ を除いて負でない．したがって，これに $\xi_k{}^2$ をかけて加えると

$$\sum \lambda_k{}^2\xi_k{}^2-2I(\boldsymbol{u})\sum \lambda_k\xi_k{}^2+(I(\boldsymbol{u})^2-\delta^2)\sum \xi_k{}^2$$
$$\geqq(\lambda_i-I(\boldsymbol{u})+\delta)(\lambda_i-I(\boldsymbol{u})-\delta)\xi_i{}^2 \qquad (12.14)$$

を得る．これを $\sum \xi_k{}^2$ で割って (12.5) に注意すると，左辺は $\varepsilon^2-\delta^2$ となり，右辺の $\xi_i{}^2$ の因子は $(\lambda_i-I(\boldsymbol{u}))^2-\delta^2\geqq-\delta^2$ であるから，不等式

$$1-\frac{\xi_i{}^2}{\sum \xi_k{}^2}\leqq\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \qquad (12.15)$$

が得られる．

いま $\boldsymbol{u}$ が

$$(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})=\sum \xi_k{}^2=1, \quad (\boldsymbol{u}^{(i)}, B\boldsymbol{u})\geqq 0 \qquad (12.16)$$

のように正規化されていたとすると，(12.15) は $1-\xi_i{}^2\leqq\varepsilon^2/\delta^2$ となり，

$$(\boldsymbol{u}^{(i)}-\boldsymbol{u}, B(\boldsymbol{u}^{(i)}-\boldsymbol{u}))=2-2(\boldsymbol{u}^{(i)}, B\boldsymbol{u})=2-2\xi_i\leqq\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (12.17)$$

という不等式を得る．ただし $\varepsilon/\delta<1$ と仮定している．これは演算子 $B$ による尺度において $\boldsymbol{u}^{(i)}-\boldsymbol{u}$ の“大きさ”の平方を評価した式である．この式は $\varepsilon/\delta$ が小さければ $\boldsymbol{u}^{(i)}-\boldsymbol{u}$ の大きさが $\varepsilon/\delta$ の程度であることを示す．

注意〕 上の結果は内積 ( , ) を用いた抽象的な形にかいてあるから，微分方程式の場合にどう拡張したらよいかは，おのずから明らかであろう．ただし次の点に注意する必要がある．$\varepsilon^2$ の定義 (12.1) または (12.3) には $A\boldsymbol{u}$ というベクトルが現われるが，微分方程式の場合には $A$ は境界条件を伴った微分演算子であるから，境界条件を満足しない函数 $u$ を使用することは許されない．これは自然な境界条件の場合にもあてはまる．この点で上の方法は R-R の方法と違い，試験函数の範囲が狭められる．例えば板の振動 (§6.9) にこの方法を適用しようとすれば，複雑な境界条件 (6.9.2) を満足する $u$ をとらねばならず，R-R の方法の利点が失われることになる．しかし固有値の下界まで求めるには，それだけの労力を要することはやむをえない．

例題 1〕 絃の振動 (§6.4, 例題) $\lambda_1$ の下界を求めてみよう．(12.3) によって $\varepsilon^2$ を計算するのに，いまの場合 $\boldsymbol{u}$ は函数 $u(x)$ であり，(6.4.9) により

$$Au=-u'', \quad Bu=u$$

とればよい．ただし内積 $(u,v)$ は $\int uv\,dx$ で定義する．(こうすれば $A, B$ は自己随伴演算子になる.) (6.4.14) で与えられる試験函数 $u_1$ を上の $u$ として採用すると，$(u_1, u_1)=\int u_1{}^2dx=1$, $J[u_1]=\lambda_1{}'$ であったから

$$\varepsilon^2=\int_{-1}^{1} u_1''^2dx-\lambda_1'^2, \quad \lambda_1{}'=2.467437.$$

これを計算すると $\varepsilon^2=0.00581$ となる．この場合 $x=0$ に関して対称な函数だけが用

いられているから，(*12.11*) の右辺の $\lambda_2$ の代りに $\lambda_3$ をとってよろしい．($\lambda_2$ の固有函数は奇である．) $\lambda_3$ の正しい値 $\lambda_3 = 22.21$ を用いると，(*12.11*) より

$$\lambda_1 - \lambda_1' \geqq \frac{0.00581}{22.21-2.47} = 0.000294. \qquad (12.18)$$

結局 $\lambda_1$ に対して，(*6.4.13*) と組み合せて

$$2.467143 \leqq \lambda_1 \leqq 2.467437$$

という上下界がえられた．ここで $\lambda_3$ の正しい値を用いたので，この結果は論理的には一貫していないが，$\lambda_3$ がもっと不確実にしか知られていなくても，(*12.18*) の分母が少し小さくなるだけで，評価の精度は大して変らない．なお正しい $\lambda_1$ の値は 2.467401 であるから (§6.4)，上界の方が下界よりも精密に出ている．ここでは簡単のために試験函数 (*6.4.14*) をそのまま用いたが，$\varepsilon^2$ を小さくするにはこの函数は必ずしも都合がよいとはいえない．同じ基底を用いて二つのパラメタを含む函数の中にももっとよいものがあるはずで，それを使えば下界はさらに改良される．

例題 2〕 棒の振動 (§6.7, 例題)　内積 $(u,v)$ は上の例のようにとる (ただし区間は $0 \leqq x \leqq 1$)．$A, B$ は

$$Au = u'''', \quad Bu = u$$

となる．$A$ には境界条件 (*6.7.3*) もふくまれているから，$\varepsilon^2$ を計算するには，基底 (*6.7.5*) を使うことはできず，(*6.7.8*) を用いねばならない．これより作った試験函数 (*6.7.10*) を用いて計算すると，$\varepsilon^2 = 3.28$ を得る．$\lambda_2$ の正しい値 $\lambda_2 = 485$ を用いて (*12.11*) によって $\lambda_1$ の下界を計算すると，(*6.7.9*) で与えられる上界 $\lambda_1^{(2)}$ と合せて

$$12.35557 \leqq \lambda_1 \leqq 12.36250$$

を得る．正しい値 $\lambda_1 = 12.36236$ はやはり上界の方に近い．例題 1 とおなじく，試験函数を少しかえれば下界はもっとよくなる．

例題 3〕 楕円膜の振動 (§6.8, 例題)　$a = 2$, $b = 1$ のとき，(*6.8.8*), (*6.8.9*) で与えられる $u$ を用いて計算する．$Au = -\nabla^2 u$, $Bu = u$, $(u,v) = \int\int_G uv\,dx\,dy$ に注意すると $\varepsilon^2 = 0.140$ となる．$\lambda_2$ の粗い下界が 4.934 であることは §6.8 で注意したから，(*12.11*) によって $\lambda_1$ の下界がわかる．その結果は，(*6.8.10*) と組み合せて

$$3.466 \leqq \lambda_1 \leqq 3.569.$$

この計算では $\lambda_2$ の正しい値を知っていると仮定されていないから，結果は完全に厳密である．

例題 4〕 自由辺の正方形板の振動 (§6.9, 例題)　上に注意したように，境界条件が複雑であるため，公式 (*12.11*) は応用されていない．しかし本節の方法を改良した方法によって，次の結果がえられている(1) (辺長 2, $\mu = 0.225$)：

$$12.4306 \leqq \lambda_1 \leqq 12.4547.$$

これには二種の線型試験函数を用いてあり，パラメタの数は 6 および 8 である．

例題 5〕 ヘリウム原子 (§6.10, 例題 1)　39 個のパラメタを用いた計算により，公式

(1) T. Kato, H. Fujita, Y. Nakata and M. Newman: J. Research NBS, **59** (1957), 169-186.

(*12. 11*) を用いて次の結果がえられている(1):

$$-2.9038737 \leqq \lambda_1 \leqq -2.9037225.$$

ただし $\lambda_2$ としては実験値 $\lambda_2 = -2.146$ を用いてあるから，数学的には完全でない．この難点を除くには，(*1. 4*) で $Z=2$ とおいてえられる厳密な評価 $\lambda_2 \geqq -2.5$ を用いればよい．ただしその結果下界はすこし粗くなる．

例題 6〕 湯川ポテンシアル (§6.10, 例題 2) (*6. 10. 7*) は

$$Au = -u'', \quad Bu = \frac{e^{-x}}{x}u$$

とおくと $Au=\lambda Bu$ の形になる．試験函数 (*6. 10. 10*) に対し

$$(Au, B^{-1}Au) = \int_0^\infty xe^x u''^2\, dx = \frac{c^4}{(2c-1)^2}$$

となるから，(*6. 10. 9*) で与えられる $J, K$ および $I=J/K$ を用いて

$$\varepsilon^2 = \frac{c^4}{(2c-1)^2 \log\dfrac{(c+1)^2}{2c+1}} - \frac{c^2}{4\left[\log\dfrac{(c+1)^2}{2c+1}\right]^2}.$$

$c=1.5$ とすると $\varepsilon^2 = 0.0117$ となる．$\lambda_2$ に対しては $\lambda_2 \geqq 4$ が知られている (*1. 8*) から (*12. 11*) によって $\lambda_1$ の下界が計算できる．結果を (*6. 10. 12*) と組み合せると

$$1.6754 \leqq \lambda_1 \leqq 1.6804$$

という厳密な評価を得る．

補遺〕 (*11. 6*) が (*6. 14. 14*) に対応するように，(*6. 15. 12*) に対応する式として，$V(x)>0$ のとき

$$a - \int_0^\infty (u''-Vu)\frac{u''}{V}dx \leqq \bar{a} \leqq a - \int_0^\infty (u''-Vu)u\, dx \qquad (12.\ 19)$$

が成り立つ．ただし $u$ は $u(0)=0$, かつ $x\to\infty$ では $u \sim x-a$ のように規準化したものである．一般に $\bar{a}$ の上界には (*12. 19*) が，下界には (*11. 6*) が有利のようである．なお (*12. 19*) の第二の不等式 ($\bar{a}$ の上界) は $V(x)>0$ でなくても，$V$ が十分弱くて，正しい解 $\bar{u}$ が $x=0$ 以外で 0 にならない場合には，成立する．この注意は大村充博士に負う．

---

(1) §6.10 にあげた文献参照．

# 参 考 書

変分法の各側面とその応用を広い見地から紹介した教科書として第一に

〔1〕 R. Courant-D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, I, II (J. Springer, Berlin, 1932, 1937) (I の英語版, New York, 1953)

をあげねばならない. I の第 4 章が変分法にあてられているが, この本の大部分は変分法の思想で貫かれている. ほかに手頃な教科書として

〔2〕 Н. И. Ахиезер: Лекции по Вариационному Исчислению (Москва, 1955)

がある. 古典変分学の参考書はかなり多いが, 著名なものだけをあげると

〔3〕 A. Kneser: Lehrbuch der Variationsrechnung (Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig, 1900).

〔4〕 O. Bolza: Lectures on the calculus of variations (The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1904).

〔5〕 O. Bolza: Vorlesungen über Variationsrechnung (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1909).

〔6〕 J. Hadamard: Leçons sur le calcul des variations (A. Hermann et Fils, Paris, 1910).

〔7〕 G. A. Bliss: Calculus of Variations (Open Court, Chicago, 1924).

〔8〕 C. Carathéodory: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1935).

大域の変分学の書物では

〔9〕 M. Morse: Calculus of variations in the large (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York, 1934).

があげられる. この本には古典変分学の結果もよくまとめてある. なお Morse の理論を要領よく紹介した本に

〔10〕 H. Seifert-W. Threlfall: Variationsrechnung im Grossen (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1938).

がある. 変分法による近似解法についてはまとまった参考書は案外少ない. 著者の目にふれたのは

〔11〕 G. Pólya-G. Szegö: Isoperimetric inequalities in mathematical physics (Annals of Math. Studies, Princeton, 1951).

〔12〕 S. Bergman-M. Schiffer: Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics (Academy Press, New York, 1953).

〔13〕 Л. В. Канторович-В. И. Крылов: Приближенные Методы Высшего Анализа (Москва-Ленинград, 1952).

〔14〕 S. H. Gould: Variational Methods for Eigenvalue Problems, University of

Toronto Press, Toronto, 1957.

〔15〕 Ю. Н. Демков: Бариационные Принципы в Теории Столкновений, Москва 1958.

などである．最後にあげた本は，衝突問題の変分的取扱いに関するもので，小冊子であるが物理への応用を多数取り扱っている．なお

〔16〕 日本物理学会編，物理学論文選集 53 (応用数学 III，変分法)

はこの方面への変分法の応用の最近の発展を知りたい人の参考になるであろう．物理学の変分原理に関する参考書については省略し，解析力学，相対性理論などの参考書をみて頂く．変分法に関する邦語の書物には次のものがある (なお I，第 9 章参照)：

〔17〕 平野次郎： 変分法序説，級数展開法 (東海，1946).

〔18〕 小松勇作： 変分学 (東海，1947).

〔19〕 南雲道夫： 変分学 (朝倉，1951).

# D　物理学の諸問題

## 第 1 章　拡 散 の 現 象

### §1　拡散の取扱い

溶液の中で濃度が場所によってちがっていると，濃度の大きい所から小さい所へと溶質が流れる．物体の中に温度のちがう場所があると，温度の高い所から低い所へと熱が流れる．また原子炉の中で中性子の密度が一様でないときにも，中性子の流れができる．物理量の密度のちがいが原因となって，物理量の移動がおこる現象を拡散とよぶ．拡散の例は上にのべた場合のほか，いろいろちがった場合にもみられる．たとえば星をつくっている大気の中では物質の粒子の拡散だけでなく光のエネルギーの拡散も起こる．

拡散の現象を巨視的に取り扱うのに，熱伝導の方程式と同じ形の方程式を使う方法がある．中性子が物質中を拡散する場合を例にとり，時刻 $t$，点 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ における中性子の密度を $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ としよう．密度のちがいで中性子の流れがおこると考えて，中性子の流れを表わすベクトル $\boldsymbol{J}$ を

$$\boldsymbol{J} = -D\,\mathrm{grad}\,\rho \tag{1.1}$$

とおくのが普通である．$D$ を拡散係数とよぶ．問題を簡単にするためにまず中性子が物体中で吸収されることを無視し，単位時間，単位体積に発生する中性子を $q(\boldsymbol{r}, t)$ とすれば，明らかに中性子数の保存

$$\int\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau = \int J_n d\sigma + \int q\,d\tau$$

が成り立つ．ここに $d\tau$ は体積についての積分，$d\sigma$ は表面積分で，$\boldsymbol{n}$ は内向きの法線を意味する．この関係を微分形でかけば

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} + q, \tag{1.2}$$

(*1.1*) を代入し，$D$ を定数と仮定すれば

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho + q \tag{1.3}$$

が得られる．$D$ を $k^2$ とおけば，A§3.10 にのべた熱伝導の微分方程式と一致する．

また，もし物体中に中性子が単位時間に密度 $\rho$ に比例した吸収をうけるとし，単位時間に $\alpha^2\rho$ だけ吸収されるとすれば，(*1.3*) の代りに次式を得る．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\nabla^2\rho-\alpha^2\rho+q. \tag{1.4}$$

一次元の場合，(A.*3.10*) で求めた Green 函数

$$G(x,t;0,0)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi Dt}}u(t) \tag{1.5}$$

は，原点 $x=0$ に，時刻 $t=0$ から急に $q(x,t)=\delta(x)$ $(t>0)$ の中性子源をおいたとき，時刻 $t$ に $x$ という場所の中性子密度を表わしている．$u(t)$ は $t<0$ では $0$, $t>0$ では $1$ になる不連続函数である．

この結果をみると，奇妙なことに気づくであろう．すなわち，$t$ がどんなに小さい正の値であっても，$x\neq 0$ の点の密度は $0$ でない．つまり中性子源から有限の距離はなれた点に，どんな短い時間の後にも到達する中性子があることを表わしている．これは中性子が無限に大きい速さをもつことに対応している．中性子の密度のちがいがあれば，すぐに (*1.1*) で表わされる中性子の流れが伴うという仮定が，その原因になっている．このことは現実の拡散現象を考えるのに，拡散の方程式が好ましくない点の一つである．

さらに物体が無限に拡がっていなくて，境界がある場合を考えてみる．境界の外側に物質がなくても，中性子はそこに流れ出すこともでき，また外から流れ込むこともありうる．このような事情を表わすには，中性子の集りを流体のように考えたので都合がわるく，何らかの方法で粒子の運動そのものを追っていかなくてはならない．境界では流れ出す粒子と流れ込む粒子とを区別するような記述の仕方が必要になる．

このように，拡散を熱伝導型の微分方程式で記述することはいろいろの弱点をもっているが，取扱いが便利であって，事情が複雑な場合にも結果の見透しが得やすいので，役に立つ方法である．ただ境界条件などの不備を補って考えるために，一応もっとちゃんと実情に合った取扱いをし，それと比べて不十分な点をできるだけ正しく取り扱うようにしなくてはならない．このため次節で

同じ問題を輸送方程式で取り扱うことにしよう．

## §2　分布函数と輸送方程式

物体内にはいろいろな方向に中性子が走り，物質の原子と衝突し，散乱されたり，吸収されたり，減速されたりしているであろう．話を簡単にするために，中性子が吸収されたり，減速されたりすることを無視し，中性子は散乱されて方向が変わっても，速さをかえないとする．また原子に衝突した後，散乱される方向は衝突前の方向に無関係な割合で起こると仮定しよう．

中性子の速さを $v$ とし，物質中でもつ平均自由行路を $\lambda$ とする．これは小さい長さ $l$ を走る間に衝突する確率が $l/\lambda$ であることを意味する．

点 $\boldsymbol{r}$ にある体積要素 $d\tau$ 間にあり，立体角 $d\Omega$ 間の速度 $\boldsymbol{v}$ をもつ中性子の数を $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)d\tau\,d\Omega$ とする．この $f$ を分布函数という．そうすると，中性子数の時間的変化は，衝突によってこの範囲から失われるものと，他の方向のものが衝突によってこの範囲内に入ってくるものと，衝突なしにこの範囲から出たり入ったりするものでひき起される．

単位時間に衝突で失われる数は $(v/\lambda)f\,d\tau\,d\Omega$ である．またこの空間体積 $d\tau$ 内でおこる全衝突数は単位時間あたり $(v/\lambda)d\tau\int f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}',t)d\Omega'$ であり，そのうち $d\Omega/4\pi$ の割合で速度 $\boldsymbol{v}$ の中性子に散乱される．また衝突しないでこの空間に入ってくる数は $-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f\,d\tau\,d\Omega$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=-\frac{v}{\lambda}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+\frac{1}{4\pi}\frac{v}{\lambda}\int f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}',t)d\Omega'+q \tag{2.1}$$

が得られる．$q$ は中性子源の強さである．これが輸送方程式である．

分布函数 $f$ と前節でのべた中性子密度との関係は簡単である．明らかに

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\int f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)d\Omega. \tag{2.2}$$

また中性子の流れのベクトル $\boldsymbol{J}$ も $f$ と関係している．ある面を通って流れる中性子数を求めてみれば

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\int \boldsymbol{v}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)d\Omega \tag{2.3}$$

である．また，たとえば

$$J_x^+=\int_{v_x>0}v_xf\,d\Omega \tag{2.4}$$

は $x$ 軸に垂直な単位面積を通って $-x$ の側から $+x$ の側へ流れる中性子であり，$J_x^-$ も同様に求められる．(*2.3*) の $J$ の $x$ 成分は $J_x^+ + J_x^-$ を表わし，代数和である．

境界から $\lambda$ に比べて遠くはなれた所では散乱の結果分布は方向にあまり強く依存しないようになっているであろう．それで

$$f(\boldsymbol{r}, v, t) \sim \frac{1}{4\pi}\rho(\boldsymbol{r}, t) + \frac{1}{4\pi}\varepsilon(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.5}$$

と近似してみよう．第二項は第一項に比べて小さいと考えられる．これを (*2.1*) に代入し，方向について積分すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\varepsilon}{3}v^2\nabla^2\rho(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{v}{\lambda}\rho(\boldsymbol{r}, t) + \frac{v}{\lambda}\rho(\boldsymbol{r}, t) + \int q\, d\Omega = \int q\, d\Omega \tag{2.6}$$

となる．$\varepsilon$ をきめるには，もう一つ方程式が必要である．そのため，今度は $\boldsymbol{v}$ と $\nabla\rho$ との間の角 $\theta$ の余弦 $\cos\theta$ を (*2.1*) にかけて，$d\Omega$ について積分する．このとき時間変化を無視し，源の函数 $q$ が大体球対称に中性子を出すとすれば

$$\frac{1}{3}v|\nabla\rho| = -\frac{v^2\varepsilon}{3\lambda}|\nabla\rho|$$

となり，これから

$$\varepsilon = -\frac{\lambda}{v} \tag{2.7}$$

が得られる．これを (*2.6*) に入れると

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{3}\lambda v\nabla^2\rho + \int q\, d\Omega \tag{2.8}$$

となって，拡散の方程式 (*1.4*) で吸収を 0 とした場合と一致する．その際巨視的な拡散係数 $D$ は平均自由行路 $\lambda$ と

$$D = \frac{1}{3}\lambda v \tag{2.9}$$

の関係にあることがわかる．

こういうわけであるから，拡散が微分方程式で記述されるためには，まず $\lambda|\mathrm{grad}\,\rho|$ が $\rho$ に比べて小さいことが必要である．これは平均自由行路の程度で密度の変化が小さいということであって，当然予期されることであろう．平均自由行路はおそい中性子にたいして石墨で 2.7 cm，水で 0.4 cm くらいである．

なお，(*2.7*) を導くときに，時間変化の項を無視したが，そのためには $\frac{\lambda}{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}$ が $\rho$ に比べて小さいことが必要であった．$\frac{\lambda}{v}$ は衝突するまでの時間の平均であって，密度の変化が衝突が一回も起らない間にひどく変化するようでは上の近似がよくないことも理解できよう．

(*2.7*) を (*2.5*) に入れると

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\sim\frac{1}{4\pi}\left\{\rho(\boldsymbol{r},t)-\frac{\lambda}{v}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{2.10}$$

となる．これを使って $J_x^{\pm}$ を求めてみる．$x$ を極座標の軸とし，極座標を $\theta,\varphi$ とすると，

$$J_x^+=\frac{1}{4\pi}\iint v\cos\theta\left\{\rho-\lambda\left(\cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}+\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial y}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right\}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{v}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\cdot\rho-\lambda\cos^2\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\sin\theta\,d\theta=\frac{v}{4}\rho-\frac{v\lambda}{6}\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

となる．$J_x^-$ も同様にして求められ

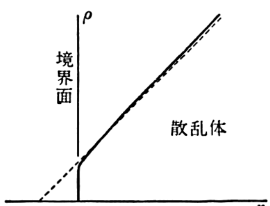
$$J_x^{\pm}=\pm\frac{v}{4}\rho-\frac{\lambda v}{6}\frac{\partial\rho}{\partial x} \tag{2.11}$$

であることがわかる．これから

$$J_x=J_x^++J_x^-=-\frac{\lambda v}{3}\frac{\partial\rho}{\partial x}=-D\frac{\partial\rho}{\partial x} \tag{2.12}$$

となって，全体の流れは巨視的な仮定 (*1.1*) と一致している．

仮定 (*2.10*) はその導き方からみて境界から遠い所でしか正しくない．しかし境界条件にたいしてある程度の目安を与えることはできる．$x$ 軸を境界面に垂直に内部に向ってとることにすると，中性子が真空中に出ていくだけで，真空中から物体に入ってくることがないという境界条件があるとき，境界 $x=0$ で $J_x^+$ は 0 である．もし (*2.10*) が境界の所まで正しいとすれば，$J_x^+=0$ から




第 2.1 図　実線は正しい解，点線は拡散方程式の解

$$\rho=\frac{2}{3}\lambda\frac{\partial\rho}{\partial x}\qquad(x=0) \tag{2.13}$$

となる．これは境界から外に同じ傾斜 $\frac{d\rho}{dx}$ で外挿すれば距離

$$\delta=\frac{2}{3}\lambda \tag{2.14}$$

のところで $\rho$ が0になることを表わしている．境界条件(2.13)は第三種の境界条件であるが，物体が $\lambda$ に比して大きいときには，その意味を拡張して，物体から $\delta$ だけ外側に仮想的な境界面を考え，そこで $\rho$ が0になるという条件でおきかえることがよく行なわれる．そうすると境界条件は第一種になる．このような仮定は厳密には正しくない．(2.14)の $\delta$ の値は，境界面の所まで(2.10)が正しいとして求めたものであるが，これはもちろん境界の近くでは良い近似でない．ただ，多くの場合中性子の流れを求めることが大切であるから，境界で正しい $\rho$ や $\dfrac{d\rho}{dx}$ を与えるようにするより，正しい $J$ を与えるようにする方がよい．そのためには(2.13)でもかなりよい近似になることが示される．つぎにこれらの事情を明らかにするために，輸送方程式を解くことを考えてみよう．

## §3　輸送方程式の一つの解

境界面の近くの輸送方程式の解を求めるために，無限に広い平面を境界とする拡散の問題を考えることにしよう．面に垂直に $x$ 軸をとり，散乱体は $x=+\infty$ までひろがっているものとする．また散乱体の十分奥の方に中性子源があって，表面に向って一様な流れ $vJ$ ($J<0$) があるとする．

$x$ 軸と中性子速度との間の角を $\theta$ とし，$\cos\theta=\mu$ とおく．定常な流れの場合の輸送方程式は

$$\mu\frac{\partial f(x,\mu)}{\partial x}=-\frac{1}{\lambda}f(x,\mu)+\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1}f(x,\mu')d\mu' \tag{3.1}$$

である．$\lambda$ を単位として長さをはかって，$\xi=x/\lambda$ とおくと

$$\left.\begin{aligned}\mu\frac{\partial f(\xi,\mu)}{\partial\xi}&=-f(\xi,\mu)+\frac{1}{2}\rho(\xi),\\ \rho(\xi)&\equiv\int_{-1}^{1}f(\xi,\mu)d\mu.\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

中性子の流れ $J$ は

$$J=\int_{-1}^{1}\mu f(\xi,\mu)d\mu \tag{3.3}$$

で，これが $\xi$ によらない定数であることは(3.2)からすぐ出る．

境界から十分遠くでは，$f$ の値は $\xi$ が増すと大きくなっているであろう．そ

の漸近形をきめるために

$$f(\xi,\mu)\sim\frac{1}{2}\rho(\xi)+\frac{3}{2}J\mu \qquad (\xi\to\infty) \tag{3.4}$$

とおいてみる．(3.3) は満たされている．(3.2) に入れると，

$$\rho=\rho_0-3J\xi \tag{3.5}$$

であればよいことがわかる．この漸近解は境界から遠くでしか成り立たず，境界の近くでは中性子がもれ出すために中性子密度はこれより減少するであろう．

(3.2) は積分方程式の形にも書かれる．(3.2) を書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[e^{\frac{\xi}{\mu}}f(\xi,\mu)]=\frac{1}{2}\frac{\rho(\xi)}{\mu}e^{\frac{\xi}{\mu}}.$$

$\mu>0$ のとき入射中性子がないことから $f(0,\mu)=0$ である．したがって

$$f(\xi,\mu)=\frac{1}{2\mu}\int_0^\xi e^{\frac{\xi'-\xi}{\mu}}\rho(\xi')d\xi' \qquad (\mu>0).$$

$\mu<0$ のときには，$\xi\to\infty$ で $\rho$ は $\xi$ について一次にしか増さないから，$e^{\frac{\xi}{\mu}}f$ は 0 に近づき，

$$f(\xi,\mu)=\frac{1}{2\mu}\int_\infty^\xi e^{\frac{\xi'-\xi}{\mu}}\rho(\xi')d\xi' \qquad (\mu<0).$$

したがって $\rho$ の定義を思いかえしてみれば，

$$\rho(\xi)=\int_{-1}^1 f(\xi,\mu)d\mu=\frac{1}{2}\int_0^\infty E_1(|\xi'-\xi|)\rho(\xi')d\xi'. \tag{3.6}$$

ここに $E_1(y)$ は

$$E_1(y)=\int_0^1\frac{d\mu}{\mu}e^{-y/\mu}=\int_1^\infty\frac{dt}{t}e^{-yt}. \tag{3.7}$$

(3.6) は Wiener-Hopf 形の積分方程式と呼ばれているものの一種で，Milne が星の中の光の拡散に応用したので Milne 方程式とも呼ばれている．

問題〕 境界の外部から角分布 $f(0,\mu,\varphi)$ ($\mu>0$, $\varphi$ は $x$ 軸のまわりの角度) の中性子が入射するときには，(3.6) に対応する積分方程式は

$$\rho(\xi)=\rho_0(\xi)+\frac{1}{2}\int_0^\infty\rho(\xi')E_1(|\xi'-\xi|)d\xi'$$

になることを示せ．ただし

$$\rho_0(\xi)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 f(0,\mu,\varphi)e^{-\xi/\mu}d\mu.$$

Milne の積分方程式が Laplace 変換[1]で解かれることはよく知られている．

(1) Laplace 変換については章末の補遺をみよ．

それでここでは Laplace 変換を直接に微分方程式に適用して解を求めることにしよう．

$f(\xi,\mu)$ と $\rho(\xi)$ の Laplace 変換を $f_1(p,\mu)$, $\rho_1(p)$ としよう．すなわち

$$\left.\begin{aligned} f_1(p,\mu) &= \int_0^\infty f(\xi,\mu)e^{-p\xi}d\xi, \\ \rho_1(p) &= \int_0^\infty \rho(\xi)e^{-p\xi}d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

ここに $p$ の実数部 $\Re(p)$ は正とする．また $f$ や $\rho$ は $\xi<0$ では定義されていないが，便宜上 $\xi<0$ では 0 であるとすると，Laplace 変換がわかれば，もとの函数は

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \rho_1(p)e^{p\xi}dp \tag{3.9}$$

で求められる．ここに $\sigma$ は $\Re(p)>\sigma$ には $\rho_1(p)$ の特異点がないようにとった数である．そうすれば，$\xi<0$ のとき $\rho(\xi)$ が 0 になることは明らかであろう．

外向きに出ていく中性子の分布はまえにのべた式（(3.6) のすぐまえにある式）から

$$f(0,\mu) = \frac{-1}{2\mu}\int_0^\infty \rho(\xi')e^{-\frac{\xi'}{(-\mu)}}d\xi' = \frac{1}{2|\mu|}\rho_1\left(\frac{1}{|\mu|}\right), \qquad \mu<0 \tag{3.10}$$

によって求められる．

(3.2) に $e^{-p\xi}$ をかけて積分すれば

$$(1+p\mu)f_1(p,\mu) = \frac{1}{2}\rho_1(p)+\mu f(0,\mu), \tag{3.11}$$

これから $f_1(p,\mu)$ を求めて，$\mu$ について積分して

$$\left[1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\right]\rho_1(p) = \int_{-1}^1 \frac{\mu f(0,\mu)}{1+p\mu}d\mu \tag{3.12}$$

が得られる．右辺の積分は境界条件によって，$-1$ から 0 までの積分でよい．また対数函数は $p=0$ で 0 になるように定義された解析函数とする．

$f(0,\mu)$ は $\mu>0$ で 0 であるから，$\mu f(0,\mu)$ が $-1\leqq\mu<0$ で有界であれば，(3.12) の右辺は $\Re(p)<1$ で正則である．また $1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}$ は $-1<\Re(p)<1$ で正則であり，$p=0$ では二次の零点である．そこで

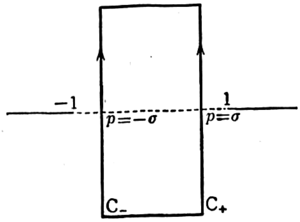
$$\frac{p^2-1}{p^2}\left(1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\right)$$

を考えると，これは $-1<\Re(p)<1$ で正則で，$p=0$ で0にならず，無限遠では1に近づく．したがってこの対数をとると，

$$\log\left[\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\right)\right]$$

は $-1<\Re(p)<1$ で正則で，無限遠で0になる．そこでこれを Cauchy の積分表示で表わし

$$\log\left[\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\right)\right]$$
$$=\log\Gamma_+(p)-\log\Gamma_-(p) \qquad (3.13)$$



第 3.1 図

と分解する．ここに

$$\log\Gamma_\pm(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\pm}\log\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}\right)\right]\frac{dt}{t-p} \qquad (3.14)$$

で，$C_\pm$ は第3.1図に示した積分路であって，$\Re(p)=\pm\sigma$ $(0<\sigma<1)$ で表わされる虚軸に平行な直線である．$\Gamma_+$ は $C_+$ の左側 $\Re(p)<\sigma$ で，$\Gamma_-$ は $\Re(p)>-\sigma$ で正則である．

さて，$\rho_1(p)$ は $\Re(p)>0$ で正則であるから，(3.12) を

$$\left[\frac{p^2}{(p+1)\Gamma_-(p)}\right]\rho_1(p)=\left[\frac{p-1}{\Gamma_+(p)}\right]\int_{-1}^{0}\frac{\mu f(0,\mu)}{1+p\mu}d\mu$$

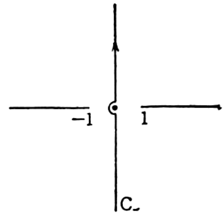
と書きかえてみると，左辺は $\Re(p)>0$ で正則，右辺は $\Re(p)<\sigma$ で正則である．したがって上の式によって定義された解析函数は有限の $p$ の所で正則である．さらに，$\Gamma_+(p)$ は $p$ が大きくなると定数になるから，上の式の右辺，したがって左辺も $p$ の大きい所で定数に近づく．無限遠も含めていたる所正則な解析函数は定数に限るから

$$\rho_1(p)=\frac{C}{p^2}(p+1)\Gamma_-(p) \qquad (3.15)$$

が得られる．このようにして $f(0,\mu)$ という未知の函数を含んだ式から，これを消去することができたわけである．(3.15) の定数 $C$ は $\rho_1$ の比例定数であるから，全中性子束 $J$ がわかれば決まるはずである．(3.12) にもどって，$p\to0$ とすれば，右辺は $J$ に等しく，$1-\frac{1}{2p}\log\frac{1+p}{1-p}\sim-\frac{1}{3}p^2$ であるから

$$\rho_1(p)\sim-3J\left(\frac{1}{p^2}+\frac{\delta}{p}+\cdots\right) \qquad (p\to0). \qquad (3.16)$$

一方，$p\to 0$ で $\Gamma_-$ は容易に求まる．$\Gamma_-(0)$ を求めるには $\mathrm{C}_-$ を第 3.2 図のように虚軸と，原点を小さくまわる半円に変形する．$p=0$ のとき被積分函数は $t$ の奇函数であるから，虚軸上の積分はきえて，半円の積分だけになる．これは留数を使って計算できて，



第 3.2 図

$$\log\Gamma_-(0) = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\log\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}\right)\right]$$

$$= +\frac{1}{2}\log 3.$$

したがって $F_-(0)=\sqrt{3}$ であるから，(*3. 15*) から $\rho_1(p)\to -\dfrac{C\sqrt{3}}{p^2}+\cdots$; これを (*3. 16*) とくらべて $C=-\sqrt{3}J$ が得られる．よって

$$\rho_1(p) = -\sqrt{3}J\frac{p+1}{p^2}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\log\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}\right)\right]\frac{dt}{t-p}\right\}. \tag{3. 17}$$

(*3. 16*) の展開式の係数 $\delta$ などを求めるには，上の式を $p$ のベキに展開すればよい．

$$\log\Gamma_-(p) = \log\sqrt{3}+ap+\cdots$$

とすると，

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_-}\log\left[\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}\right)\right]\frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\log\left[3\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1-\frac{\tan^{-1}t}{t}\right)\right]\frac{dt}{t^2}$$

となる．ここに実積分に直すとき，log の中が 0 になるように 0 に等しい積分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathrm{C}_-}\frac{dt}{t^2}$ を加えてから変形した．$\rho_1(p)$ を展開すると

$$\rho_1(p) \sim -\sqrt{3}J\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\right)\exp\left(\log\sqrt{3}+ap+\cdots\right) = -3J\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1+a}{p}+\cdots\right)$$

となるから，(*3. 16*) の係数 $\delta$ は $1+a$ として求められる．$a$ は部分積分によって計算され，結果は

$$\delta = 0.710446\cdots; \tag{3. 18}$$

$\rho_1(p)$ が求まると放出される中性子の分布は (*3. 10*) から求められる．$\rho_1(p)$ から逆に $\rho(\xi)$ を求めると，

$$\rho(\xi)\sim -3J(\xi+\delta+\cdots) \tag{3.19}$$

となる．$\int_0^\infty \xi^n e^{-p\xi}d\xi = n!/p^{n+1}$ から明らかであろう．この結果を (3.5) と比べると，その式の $\rho_0$ は $-3J\delta$ でなくてはならないことがわかる．したがって $f(\xi,\mu)$ の漸近形は

$$f(\xi,\mu)\sim -\frac{3}{2}J(\xi+\delta)+\frac{3}{2}J\mu. \tag{3.20}$$

拡散の微分方程式はこの場合簡単にとける．定常な場合には $\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2}=0$ であるから $\rho$ は $\xi$ の一次式になる．したがって (3.19) の形の解が得られるが，そのためには表面で

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi}=\frac{1}{\delta}\rho \qquad (\xi=0)$$

とすればよい．つまり $\xi=-\delta$ あるいは $x=-0.7104\cdots\lambda$ の所で 0 になるようにすればよろしい．前節で $x=-\frac{2}{3}\lambda$ となったが，これでかなり良い近似であったことがわかる．したがって，境界が完全な平面でなくても，曲率が大きくなければ，境界から $0.7104\lambda$ だけ外側に仮想的な境界面を考えて，そこで中性子密度が 0 になるという条件をおいて解くことができる．角分布は (3.20) で $\xi$ を 0 とおいた $f(0,\mu)\sim\left(-\frac{3}{2}J\right)(\delta-\mu)$ でかなり良い近似で与えられることも示される．

## §4　輸送方程式の相反定理(1)

前節より少し一般的な場合として，中性子源がある場合を考える．前節と同じ記号を使って

$$\mu\frac{\partial f(\xi,\mu)}{\partial\xi}+f(\xi,\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}f(\xi,\mu')d\mu'+q(\xi,\mu), \tag{4.1}$$

ここに $c$ は吸収がないときは 1，吸収があるときは $c<1$ である．右へ行く中性子に $+$，左へ行く中性子に $-$ をつけることにすると，

$$f_\pm(\xi,\mu)\equiv f(\xi,\pm\mu),\quad q_\pm(\xi,\mu)=q(\xi,\pm\mu)\quad (\mu\geqq 0), \tag{4.2}$$

$f_\pm$ の満たす式は

$$\pm\mu\frac{\partial f_\pm}{\partial\xi}+f_\pm=\frac{c}{2}\int_0^1\{f_+(\xi,\mu')+f_-(\xi,\mu')\}d\mu'+q_\pm. \tag{4.3}$$

(1)　編末文献〔3〕参照．

$q_\pm(\xi,\mu)=q_\pm^{(1)}$ または $q_\pm^{(2)}$ に対する解を $f_\pm^{(1)}, f_\pm^{(2)}$ とする．$f_+^{(1)}$ に対する (4.3) の式に $f_-^{(2)}$ をかけ，$f_-^{(1)}$ の式に $f_+^{(2)}$ をかけて加え，これから $f_+^{(2)}$ の式に $f_-^{(1)}$ をかけたものと $f_-^{(2)}$ の式に $f_+^{(1)}$ をかけたものとを引く．さらにそれを $\mu\geqq 0$ にわたって積分し，$\xi$ については $a$ から $b$ まで積分すると

$$\int_0^1 d\mu\,\mu\Big[f_+^{(1)}(\xi,\mu)f_-^{(2)}(\xi,\mu)-f_-^{(1)}(\xi,\mu)f_+^{(2)}(\xi,\mu)\Big]_a^b$$
$$=\int_a^b d\xi\int_0^1 d\mu\{f_-^{(2)}(\xi,\mu)q_+^{(1)}(\xi,\mu)+f_+^{(2)}(\xi,\mu)q_-^{(1)}(\xi,\mu)$$
$$-f_-^{(1)}(\xi,\mu)q_+^{(2)}(\xi,\mu)-f_+^{(1)}(\xi,\mu)q_-^{(2)}(\xi,\mu)\}. \quad (4.4)$$

この式からいろいろの相反定理が得られる．たとえば $\xi=a$ から $\xi=b$ まで散乱体がある場合に，

(1) 入射中性子がなく $\xi=\xi_1$ に $\mu_1$ 方向の単位の源がある場合の解を $f_\pm^{(1)}=f_\pm(\xi,\mu;\xi_1,\mu_1)$ とする．また同様に $f_\pm^{(2)}=f_\pm(\xi,\mu;\xi_2,\mu_2)$ とする．

$q_+^{(1)}=\delta(\xi-\xi_1)\delta(\mu-\mu_1)$, $q_-^{(1)}=0$, $q_+^{(2)}=\delta(\xi-\xi_2)\delta(\mu-\mu_2)$, $q_-^{(2)}=0$ であるから，(4.4) から

$$f_-(\xi_1,\mu_1;\xi_2,\mu_2)=f_-(\xi_2,\mu_2;\xi_1,\mu_1). \quad (4.5)$$

$\xi_2$ に $\mu_2$ 方向の源をおくとき $\xi_1$ で $-\mu_1$ 方向の強さは，$\xi_1$ に $\mu_1$ 方向の同じ強さの源をおくとき $\xi_2$ で $-\mu_2$ 方向の強さと等しい．

(2) $\xi=a$ から $\mu_1$ 方向に入射中性子があるときの解を $f^{(1)}$ にとる．$q_\pm^{(1)}=0$, $f_+^{(1)}(a,\mu)=\delta(\mu-\mu_1)$．このときの解を $f_\pm^{(1)}=f_\pm(\xi,\mu;a,\mu_1)$ とかく．同様に $f_\pm^{(2)}=f_\pm(\xi,\mu;b,-\mu_2)$, $f_-^{(2)}(b,\mu)=\delta(\mu-\mu_2)$．これを (4.4) に入れると

$$\mu_2 f_+(b,\mu_2;a,\mu_1)=\mu_1 f_-(a,\mu_1;b,-\mu_2). \quad (4.6)$$

面 $a$ から $\mu_1$ 方向に入射するときに面 $b$ から $\mu_2$ 方向に出て行く強さが分ると，面 $b$ から $-\mu_2$ 方向に入射するときに面 $a$ から $-\mu_1$ 方向に出て行く強さがこの式できまる．

(3) 同様に同じ面について

$$\mu_1 f_-(a,\mu_1;a,\mu_2)=\mu_2 f_-(a,\mu_2;a,\mu_1)\equiv S_a(\mu_1,\mu_2). \quad (4.7)$$

(4) $\xi_1$ に $\mu_1$ 方向の単位源があるときの解を $f^{(1)}$, $\xi=a$ から $\mu_2$ 方向の入射流があるときの解を $f^{(2)}$ とする．$f_+^{(2)}(a,\mu)=\delta(\mu-\mu_2)$, $q_\pm^{(2)}=0$, $q_+^{(1)}(\xi,\mu)=\delta(\xi-\xi_1)\delta(\mu-\mu_1)$, $q_-^{(1)}=0$．このとき

$$f_-(a,\mu_2;\xi_1,\mu_1)=\frac{1}{\mu_2}f_-(\xi_1,\mu_1;a,\mu_2). \tag{4.8}$$

$\xi_1,\mu_1$ の中性子源があるとき，$\xi=a$ から $-\mu_2$ 方向に出て行く中性子の強さは，$\xi=a$ に $\mu_2$ 方向の中性子が入射するとき $\xi=\xi_1$ で $-\mu_1$ 方向の強さを $\mu_2$ でわったものに等しい．従ってまた，入射の問題が解かれれば，放出の問題の解も求められる．

次に $\xi\geqq a$ に散乱体がある半無限の場合を考える．源がなく，$f_+(a,\mu;a,\mu')=\delta(\mu-\mu')$ とする．このとき $\xi<a$ で $f_\pm=0$ になるように方程式をかえることができる．それには

$$\pm\mu\frac{\partial f_\pm}{\partial\xi}(\xi,\mu;a,\mu')+f_\pm=\frac{c}{2}\int(f_++f_-)d\mu+\lambda_\pm(\mu)\delta(\xi-a) \tag{4.9}$$

とすればよい．これを $a-\varepsilon$ から $a+\varepsilon$ ($\varepsilon$ は小さい) まで積分すると，

$$\left.\begin{aligned}\lambda_+(\mu)&=\mu\delta(\mu-\mu'),\\ \lambda_-(\mu)&=-\mu f_-(a,\mu;a,\mu').\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

そこでまた (4.4) を使う．$f^{(1)}=f_\pm(\xi,\mu;\xi_1,\mu_1)$，$f^{(2)}=f_\pm(\xi,\mu;\xi_2,\mu_2)$ とし，$\xi_2>\xi_1$ としよう．また函数は $\xi\to+\infty$ で 0 になるとして，$a=-\infty$，$b=+\infty$ とおくと

$$\mu_2f_-(\xi_2,\mu_2;\xi_1,\mu_1)=\int d\mu\,\mu f_-(\xi_2,\mu;\xi_2,\mu_2)f_+(\xi_2,\mu;\xi_1,\mu_1). \tag{4.11}$$

ところで，座標原点のとり方には関係しないはずであるから

$$f_\pm(\xi,\mu;\xi',\mu')=f_\pm(\xi-\xi',\mu;0,\mu')$$

のはずである．そこで (4.7) の $S$ は今の場合 $a$ によらず，$\mu_1,\mu_2$ につき対称である．これを使うと，(4.11) から

$$\mu f_-(\xi,\mu;0,\mu_1)=\int d\mu' S(\mu',\mu)f_+(\xi,\mu';0,\mu_1). \tag{4.12}$$

これを $\xi$ について微分し，(4.9) を使って微分を消去する．そのあとで $\xi\to0$ とし $f_+\to\delta(\mu-\mu_1)$，$f_-\to S(\mu,\mu_1)/\mu$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu_1}\right)S(\mu,\mu_1)\\ &=\frac{c}{2}\iint d\mu'd\mu''\left(\delta(\mu'-\mu)+\frac{S(\mu,\mu')}{\mu'}\right)\left(\delta(\mu''-\mu_1)+\frac{S(\mu'',\mu_1)}{\mu''}\right)\\ &=\frac{c}{2}H(\mu)H(\mu_1),\end{aligned} \tag{4.13}$$

ここに

$$H(\mu)=1+\int d\mu'\frac{S(\mu,\mu')}{\mu'}. \tag{4. 14}$$

$H$ の満たす式を求めるために, (4. 13) の $S$ をこれに代入すると

$$H(\mu)=1+c\frac{\mu}{2}H(\mu)\int_0^1\frac{H(\mu')}{\mu+\mu'}d\mu'. \tag{4. 15}$$

$H$ は Chandrasekhar によって詳しくしらべられた函数であって, この積分方程式を数値積分して良い近似解が求められる. $H$ が分ると, いろいろの量がそれから計算される.

$\xi=\xi_0$ に単位の強さの等方的な源がある場合に, (4. 8) と源が $-\mu_1$ 方向にある場合の似た式とを積分して加えると,

$$f_-(0,\mu;\xi_0)=\frac{1}{2\mu}\rho(\xi_0;0,\mu) \tag{4. 16}$$

を得る. ここに $\rho$ は密度である. 従って入射問題で内部の密度が求まれば, 内部に源があるときの放出分布が求まる. $\xi=\xi_0$ に単位の源があるとき $(q(\xi)=\delta(\xi-\xi_0))$

$$\mu\frac{\partial f_-(\xi,\mu)}{\partial\xi}+f_-(\xi,\mu)=\frac{c}{2}\rho(\xi)+\frac{1}{2}q(\xi)$$

から

$$\mu f_-(0,\mu)=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi'}{\mu}}\{c\rho(\xi')+q(\xi')\}d\xi'.$$

従って $\frac{1}{p}f_-\left(0,\frac{1}{p}\right)$ は $\frac{1}{2}(c\rho+q)$ の Laplace 変換である. 特に $0,\mu$ に入射する場合の解をとると, $\frac{1}{p}f_-\left(0,\frac{1}{p};0,\mu\right)$ は $\frac{1}{2}c\rho(\xi;0,\mu)$ の Laplace 変換であるから, 逆変換によって

$$\frac{c}{2}\rho(\xi_0;0,\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{p}f_-\left(0,\frac{1}{p};0,\mu\right)e^{p\xi_0}dp.$$

(4. 7) を使って $f_-$ を $S$ で表わし, さらに (4. 13) を代入すると

$$\frac{1}{p}f_-\left(0,\frac{1}{p};0,\mu\right)=\frac{c}{2}\frac{H(\mu)H(1/p)}{p+(1/\mu)}$$

であるから

$$\rho(\xi_0;0,\mu)=\frac{H(\mu)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{H(1/p)e^{p\xi_0}}{p+(1/\mu)}dp. \tag{4. 17}$$

この式で平面に中性子が入射するときに内部の点に見出される中性子密度が

$H$ で表わされた.

$H$ の意味を見るために，前節でのべた Milne の問題を考えてみる．そのためには (*4. 17*) の $\xi_0$ が十分大きい時の解を考えればよい．$\xi$ が十分大きいときには $\xi\to\infty$ で $0$ になる輸送方程式の解は

$$f_{\pm}(\xi,\mu)\propto\frac{1}{1\mp\kappa\mu}e^{-\kappa z}$$

の形をもつ．ここに $\kappa$ は方程式

$$1-\frac{c}{2\kappa}\log\frac{1+\kappa}{1-\kappa}=0$$

を満たす正根で，吸収がないとき ($c=1$) には $0$ である．(*4. 12*) で $\xi\to\infty$ として (*4. 13*) を使うと，

$$\int_0^1\frac{\mu' H(\mu')}{(\mu+\mu')(1-\kappa\mu')}d\mu'=\frac{2}{c}\frac{1}{H(\mu)(1+\kappa\mu)}.$$

ところで左辺を

$$\frac{\mu'}{(\mu+\mu')(1-\kappa\mu')}=\frac{1}{1+\kappa\mu}\left\{\frac{-\mu}{\mu+\mu'}+\frac{1}{\kappa}\frac{1}{(1/\kappa)-\mu'}\right\}$$

と書き直してみると，左辺は

$$\frac{1}{1+\kappa\mu}\left\{\int_0^1\frac{-\mu H(\mu')}{\mu+\mu'}d\mu'+\frac{1}{\kappa}\int_0^1\frac{H(\mu')}{(1/\kappa)-\mu'}d\mu'\right\}$$
$$=\frac{1}{1+\kappa\mu}\frac{2}{c}\left\{-\frac{H(\mu)-1}{H(\mu)}+\frac{H(-1/\kappa)-1}{H(-1/\kappa)}\right\}$$

となり，

$$\frac{1}{H(-1/\kappa)}=0 \tag{4. 18}$$

を得る．これは $H(1/p)$ が $p=-\kappa$ に極を持つことを示す．

これに着目して，(*4. 17*) で $\xi$ が大きいときの漸近解を求めると，$\Re(p)<\sigma$ における最大の極 $p=-\kappa$ だけ考えればよく，

$$\rho(\xi_0;0,\mu)\sim(\text{const})\times e^{-\kappa\xi_0}\frac{\mu H(\mu)}{1-\kappa\mu}\qquad(\xi_0\to\infty) \tag{4. 19}$$

が得られる．これに相反性 (*4. 16*) を合わせると，境界 $\xi=0$ から十分遠方に等方性の平面源があるときに，$\xi=0$ から外に放出される中性子の角分布は $H(\mu)/(1-\kappa\mu)$ に比例することが分る．吸収のないときには $\kappa=0$ であるから $H(\mu)$ が角分布を与えることになる．これを前節の (*3. 10*) と比べると

$$f_-(0,\mu)=\frac{1}{\mu}\rho_1\left(\frac{1}{\mu}\right)=H(\mu) \tag{4.20}$$

である．こうして $H(\mu)$ の意味が分ったが，また $\rho_1$ を求めるのに前節のように複雑な積分をする代りに，積分方程式 (4.15) を数値的に解く方法があることも分った．

## §5 拡散方程式の解の改良

拡散現象を取り扱うには，輸送方程式の方が拡散微分方程式よりもよいことは明らかであるが，輸送方程式を解くことは一般にやさしくない．平均自由行路に比べて物体が大きいときには，境界の近くを除いて拡散微分方程式がよい近似で成り立つにちがいないから，拡散方程式の解が求まったとき，それを出発点として輸送方程式の解をよい近似で求めることができれば都合がよい．つぎに変分を利用する方法を考えてみよう．変分を使う方法もいろいろ研究されているが，つぎにのべるのは Devooght[1] の方法である．§3 の問題は (3.6) から

$$\rho(\xi)=\int_0^\infty K(\xi,\xi')\rho(\xi')d\xi',$$
$$K(\xi,\xi')=\frac{1}{2}E_1(|\xi-\xi'|), \tag{5.1}$$
$$E_n(x)=\int_1^\infty\frac{e^{-tx}}{t^n}dt$$

を解けばすべて解決される．もう少し一般化して

$$\rho(\xi)=\lambda\int K(\xi,\xi')\rho(\xi')d\xi'+S(\xi) \tag{5.2}$$

を考えよう．$\rho$ の近似解 $u(\xi)$ が求まったとし，

$$\rho(\xi)=u(\xi)+v(\xi) \tag{5.3}$$

とおく．$v(\xi)$ は

$$\begin{aligned}v(\xi)&=\lambda\int K(\xi,\xi')v(\xi')d\xi'+g(\xi),\\ g(\xi)&=\lambda\int K(\xi,\xi')u(\xi')d\xi'-u(\xi)+S(\xi)\end{aligned} \tag{5.4}$$

を満たす．また

(1) J. Devooght, Phys. Rev., 111 (1958), 665. なお文献もくわしくあげてある．

$$G(\xi_0, \xi) = \lambda \int K(\xi, \xi')G(\xi_0, \xi')d\xi' + \lambda K(\xi, \xi_0) \tag{5.5}$$

を満たす Green 函数を考えてみる．

$$Lf \equiv \int [\delta(\xi-\xi') - \lambda K(\xi, \xi')] f(\xi')d\xi' \tag{5.6}$$

できめられる積分演算子 $L$ を使うと $Lv(\xi) = g(\xi)$, $LG(\xi_0, \xi) = \lambda K(\xi, \xi_0)$ と書かれる．ところで

$$I \equiv \frac{\int \overline{G}(\xi, \xi_0)g(\xi_0)d\xi_0 \int \bar{v}(\xi_0)K(\xi, \xi_0)d\xi_0}{\int \overline{G}(\xi, \xi_0)L\bar{v}(\xi_0)d\xi_0} \tag{5.7}$$

を考えると，これは函数 $\overline{G}, \bar{v}$ の汎函数である．$\overline{G}, \bar{v}$ を正しい値 $G, v$ のまわりに少し変えた時，$I$ の一次の変分は 0 になることは容易に分る．正しい $G, v$ にたいして

$$I_0 = \int v(\xi_0)K(\xi, \xi_0)d\xi_0 = \frac{1}{\lambda}\int g(\xi_0)G(\xi, \xi_0)d\xi_0 \tag{5.8}$$

である．

さて，(5.1) を考える．$u(\xi)$ として対応する拡散微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ の解で $\xi = 0$ で $u = 0$ になる $u = \xi$ をとることにする．そうすれば，$\lambda = 1$ であるから

$$g(\xi) = \int_0^\infty \frac{1}{2}E_1(|\xi-\xi'|)\xi' d\xi' - \xi = \frac{1}{2}E_3(\xi). \tag{5.9}$$

$\rho \approx \xi + \delta$ になるように $v$ として定数 $v = \delta$ をとるのが適切であろう．$\delta$ の数値は変分を使ってきめる．これに対応して，Green 函数の方も微分方程式の場合

$$\frac{1}{2}\{|\xi+\xi_0| - |\xi-\xi_0|\}$$

から $\delta$ だけずらせて

$$G(\xi, \xi_0) = \frac{1}{2}\{|\xi+\xi_0| - |\xi-\xi_0|\} + \delta$$

とおくことにしよう．

$$Lv = \delta - \delta\int \frac{1}{2}E_1(|\xi-\xi'|)d\xi' = \frac{1}{2}E_2(\xi)$$

であるから，これを (5.7) に入れ，

$$I_0=\int v(\xi_0)K(\xi,\xi_0)d\xi_0=v(\xi)-g(\xi)$$

であることを考慮すると，変分として近似解

$$v(\xi)=\frac{1}{2}E_3(\xi)$$

$$+\frac{\int_0^\infty[|\xi+\xi_0|-|\xi-\xi_0|+2\delta]\frac{1}{2}E_3(\xi_0)d\xi_0\int_0^\infty\frac{1}{2}E_1(|\xi-\xi_0|)d\xi_0}{\int_0^\infty[|\xi+\xi_0|-|\xi-\xi_0|+2\delta]\frac{1}{2}E_2(\xi_0)d\xi_0}$$

を得る．これを計算すれば

$$v(\xi)=\frac{1}{2}E_3(\xi)+\frac{\left[\frac{1}{4}+\frac{\delta}{3}-E_5(\xi)\right]\left[1-\frac{1}{2}E_2(\xi)\right]}{\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}-E_4(\xi)} \tag{5.10}$$

となる．$\xi\to\infty$ とすれば $v\to\delta$ になるはずであるから

$$\delta=\frac{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}}=\frac{3+4\delta}{4+6\delta},\quad \delta=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.7071 \tag{5.11}$$

となる．§3 で $\delta$ の値は $\delta=0.710446$ となっていたから，わずか 0.5 % しかちがわない．また $\xi$ が大きいとき

$$v(\xi)\sim\frac{1}{2}E_3(\xi)+\delta\left(1-\frac{1}{2}E_2(\xi)\right)$$

でよい近似になる．また $E_n(0)=\dfrac{1}{n-1}$ $(n>1)$ であるから

$$v(0)\sim\frac{1}{4}+\frac{\frac{\delta}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\delta}{2}}=\frac{7}{12}=0.584$$

であるが，原点における $\rho$ の値は正しく計算すると 0.577 であって，1 % のちがいにすぎない．

このように変分の方法は近似解のとり方がよければ極めてよい結果を与える．また近似解として拡散微分方程式の解を使うのはよい方法であることが分る．

## §6 拡散方程式の例題

1） 無限に広い平面を境界とする半無限の散乱体に中性子が垂直に入射する

場合．はじめに定常の場合を考えよう．入射中性子流の強さを単位面積あたり毎秒 $N$ 個としよう．そうすると深さ $x$ の所で単位時間に発生する中性子数は $(N/\lambda)e^{-x/\lambda}dx$ である．したがって

$$D\frac{d^2\rho}{dx^2}-\alpha^2\rho=-\frac{N}{\lambda}e^{-\frac{n}{\lambda}}, \tag{6.1}$$

境界条件は $x=\infty$ で $\rho=0$, 仮想的境界面 $x=0$ で $\rho=0$ である．解は直ちに求まって

$$\rho(x)=\frac{N\lambda}{D-\lambda^2\alpha^2}[e^{-\frac{\alpha x}{\sqrt{D}}}-e^{-\frac{x}{\lambda}}]. \tag{6.2}$$

$D=\lambda^2\alpha^2$ のときの解は少しちがうが，これは読者の演習としよう．

中性子の流れは

$$J(x)=\frac{N\lambda D}{D-\alpha^2\lambda^2}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{D}}e^{-\frac{\alpha x}{\sqrt{D}}}-\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]$$

である．表面では

$$J(0)=\frac{-N\sqrt{D}}{\sqrt{D}+\alpha\lambda}$$

となる．吸収がなければ $J(0)$ は $-N$ に等しい．すなわち完全に反射する．

もし境界条件 $\rho=\delta\frac{\partial\rho}{\partial x}$ $(\delta=0.71\lambda)$ を使うとすると，$\rho'=\rho-\delta\frac{\partial\rho}{\partial x}$ を $\rho$ の代りに使えばよい．そうすると $q$ の代りに $q-\delta\frac{\partial q}{\partial x}=\left(1+\frac{\delta}{\lambda}\right)\frac{N}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}=1.71\frac{N}{\lambda}$ $e^{-\frac{x}{\lambda}}$ を使うことになる．したがって $\rho'$ は前に求めた $\rho$ の 1.71 倍になる．$\rho'$ から $\rho$ は微分方程式を解いて

$$\rho(x)=\frac{1.71\lambda N}{D-\lambda^2\alpha^2}\left[\frac{\sqrt{D}e^{-\frac{\alpha x}{\sqrt{D}}}}{\sqrt{D}+0.71\lambda\alpha}-\frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{1.71}\right] \tag{6.3}$$

となる．吸収がないとき全部反射することは同じである．

時間的に変化する場合を取り扱うには，Green 函数が都合がよい．$x=0$ で $\rho=0$ という境界条件の場合には

$$G(x,t;x',0)=\frac{e^{-\alpha^2 t}}{2\sqrt{\pi Dt}}[e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}}-e^{-\frac{(x+x')^2}{4Dt}}]u(t) \tag{6.4}$$

であることは，鏡像の方法ですぐにわかるであろう．

面に垂直に中性子が入射する場合に，時刻 $t=0$ に $N\delta(t)$ 個の中性子流があるとすれば，中性子源は $(N/\lambda)e^{-x/\lambda}\delta(t)$ となる．実際は中性子の速度を考え

て $\delta(t-vx)$ とした方がよいであろうが，拡散の時間に比べて中性子の速さが速ければ，同時に散乱が起ると考えてよいであろう．

$G$ を使えば，解はすぐに求まって

$$\rho(x,t)=\frac{N}{\lambda}\int e^{-\frac{x'}{\lambda}}G(x,t;x',0)dx'$$

$$=\frac{N}{2\lambda}u(t)e^{-\alpha^2t+\frac{Dt}{\lambda^2}}\left[e^{-\frac{x}{\lambda}}\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Dt}}{\lambda}-\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)-e^{\frac{x}{\lambda}}\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{Dt}}{\lambda}+\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] \tag{6.5}$$

となる．ここに

$$\operatorname{erf} y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^\infty e^{-y^2}dy$$

は誤差積分である．

2) 直方体の一つの面に中性子源がある場合．直交軸 $x,y,z$ をとり，$x=\pm\dfrac{a}{2}$ の面，$y=\pm\dfrac{b}{2}$ の面，$z=0$ および $z=c$ の面がその六面とする．中性子源は面 $z=0$ にあるものとする．定常な場合の中性子の分布を求めよう．拡散の式は

$$\nabla^2\rho-\beta^2\rho=0 \qquad \left(\beta^2=\frac{\alpha^2}{D}\right) \tag{6.6}$$

である．直交軸で変数分離をすると

$$\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_xx\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_yy\begin{pmatrix}\sinh\\ \cosh\end{pmatrix}k_zz$$

の形の解があることが容易にわかる．$k_x, k_y, k_z$ は

$$k_x{}^2+k_y{}^2+\beta^2=k_z{}^2$$

を満たす必要がある．

中性子源の分布が $\pm x, \pm y$ について対称であって，$z=0$ 以外の面で $\rho$ が 0 という境界条件を満たすためには

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad m=1,3,5,\cdots,$$

$$k_y=\frac{n\pi}{b},\quad n=1,3,5,\cdots$$

ととって $\cos k_xx$, $\cos k_yy$ をとればよい．$k_z$ は

$$k_{mn}=\left[\beta^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2}$$

できまり，$\sinh k_zz$ とする．

$$\rho=\sum_{m,n}C_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sinh k_{mn}(c-z) \tag{6.7}$$

が一般の解である.

$z=0$ の面から流れ出る中性子流は

$$J(x,y)=-D\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_{z=0}=\sum_{m,n}DC_{mn}k_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cosh k_{mn}c.$$

この式から中性子源の強さ $J(x,y)$ がわかっていれば, $C_{mn}$ がきめられる. $J(x,y)$ を (6.7) の形に分解したときの係数を $J_{mn}$ とすれば

$$J_{mn}=\frac{4}{ab}\iint J(x,y)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

である. 原点に強さ1の中性子源があれば $J_{mn}=\dfrac{4}{ab}$ となる. したがって

$$\rho(x,y,z)=\sum_{m,n}\frac{J_{mn}}{Dk_{mn}}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\frac{\sinh k_{mn}(c-z)}{\cosh k_{mn}c} \tag{6.8}$$

となる.

$k_{mn}c$ が1に比して大きいときには, $z$ に関する最後の項は大体 $e^{-k_{mn}z}$ に等しい. それで $z$ が大きくなると, 急激に減少し, $m=n=1$ の項だけが主にきいてくることになる. 長い棒を使って, $z$ にそって中性子の強さをはかって, $\beta^2=\alpha^2/D$ を求めることがよく行われる.

なお中性子源の強さ, すなわち中性子源が放出している中性子数と, $J$ との関係にふれておこう. 上の例では面 $z=0$ に中性子源があり, 散乱体は $z>0$ の部分にあると考えた. しかしもし $z<0$ に何もなければ, 源から散乱体に入ってすぐにまたもとに散乱されてくる部分があって実際には $J$ が小さくなってしまう. このときには1) で行なったように散乱体の内部に入って一度散乱された中性子を源と考えなくてはならない. しかし $z<0$ にも同じような散乱体があれば, そちらから散乱でもどってくる部分があるから, 逃げた分をちょうど補って, $J$ として実際に中性子源が $z>0$ の方に放出する数をとってよいであろう. 拡散理論を使う場合このような注意がいつも必要である.

3) Age theory. 中性子は散乱体の中で散乱されるだけでなく, 散乱体の原子との衝突によって減速される. ウランがあれば分裂をおこし, またいろいろの原子で吸収される. そのようないろいろの過程のおこり方がまた中性子のエネルギーによって著しく変化することがある. ここではモデレーターといわ

れる減速材中の拡散が拡散の微分方程式とよく似た式で取り扱われることをのべよう．

衝突される原子の質量が中性子の $A$ 倍であり，弾性衝突前の中性子と原子の速さを $v, 0$ としよう．モデレーターの原子質量が中性子に比べて大きい場合 $(A \gg 1)$ には，衝突後の中性子は大体球対称に散乱され，速度 $v'$ は散乱角 $\theta$ と次の関係にある．

$$v' \sim v\left[1-\frac{1}{A}(1-\cos\theta)\right]. \tag{6.9}$$

これは運動エネルギーと運動量の保存から容易に導かれる．平均として $v' \sim v\left[1-\dfrac{1}{A}\right]$ と考えられる．したがって一回の衝突によって

$$\frac{\delta v}{v} \sim -\frac{1}{A},$$

$n$ 回の衝突後の速度は

$$\log\frac{v_n}{v} = -\frac{n}{A}.$$

はじめに中性子が速さ $v_0$ で出されるとし，

$$\log\frac{v_0}{v} = u \tag{6.10}$$

で $u$ という量を導入すると，$Au$ は平均の衝突回数を表わすことになる．速さ $v$ の中性子は時間 $dt$ 中に $\dfrac{vdt}{\lambda}$ 回衝突するから

$$du = \frac{1}{A}\frac{v}{\lambda}dt, \tag{6.11}$$

$\lambda$ は一般に速度の函数と考えなくてはならない．

座標 $\boldsymbol{r}$ の点に，源を出てから時間 $t$ たって到達した中性子数を $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ としよう．いま時間的には全体として定常な場合だけを取り扱うものとすると，この $t$ は (6.11) によって速度を表わすものと考えてよい．拡散によって密度がふえる割合は $D\nabla^2\rho$ である．ここに $D=\dfrac{\lambda v}{3}$ で，速度の函数である．したがって

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho \tag{6.12}$$

と形式的にかくことができる．しかし $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ は実際に時間とともに変わるのではなく，衝突によって速度 $v$ をもつようになる中性子数の増加を表わすから，

(6.11) によって $u$ でおきかえねばならない．そこで，$u$ の値が $u$ と $u+du$ の間の値をもつ中性子数を $\rho(\mathbf{r},u)du$ とかくと，

$$\rho(\mathbf{r},u)du=\rho(\mathbf{r},t)dt$$

であるから，

$$\rho(\mathbf{r},u)\frac{v}{A\lambda}=\rho(\mathbf{r},t)\equiv\phi(\mathbf{r},u). \tag{6.13}$$

よって (6.12) から

$$D\nabla^2\phi(\mathbf{r},u)=\frac{v}{A\lambda}\frac{\partial}{\partial u}\phi(\mathbf{r},u) \tag{6.14}$$

が得られる．

さらに

$$\tau(u)=\int_0^u\frac{AD\lambda}{v}du=\int_0^t Ddt \tag{6.15}$$

とすれば，

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \tag{6.16}$$

と標準の拡散方程式になってしまう．$\tau$ は Fermi の age とよばれる．形は全く同じであるが，解釈はちがうことに注意しなくてはならない．たとえば，ふつうの拡散で時間がたつと次第に源から遠くまでひろがっていくのは，この場合エネルギーの大きい中性子は源の近くに集中し，エネルギーの小さい中性子は遠くまで拡がるということになる．

平面状の中性子源が無限に広い媒質中にある場合には，面からの距離 $x$ の点で

$$\rho(x,\tau)=\frac{e^{-x^2/4\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}}$$

であることはまえにのべた．これを利用して，無限の媒質内に点状の源があるときを考えよう．この点から距離 $r$ の所の密度を $\rho_1(r,\tau)$ とすると，上の $\rho(x,\tau)$ は面上の各点からくる密度の和であるから

$$\rho(x,\tau)=\int_0^\infty\rho_1(r,\tau)2\pi y\,dy$$

となるはずである．ここに $y$ は面上の原点からの距離である．明らかに $r^2=x^2+y^2$ であって，$rdr=ydy$ を使って書き直すと

$$\rho(x,\tau)=\int_x^\infty\rho_1(r,\tau)2\pi r\,dr.$$

これを $x$ について微分した後 $x$ を $r$ とかくと

$$\rho_1(r,\tau) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\rho(r,\tau) = \frac{e^{-r^2/\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \tag{6.17}$$

が得られる．これが点源の Green 函数である．

このとき同じ age $\tau$ をもつ中性子の $r^2$ の平均 $\overline{r^2}$ を求めてみると

$$\overline{r^2} = \frac{\int^\infty \rho_1 r^4 dr}{\int_0^\infty \rho_1 r^2 dr} = 6\tau \tag{6.18}$$

となって，エネルギーの小さい中性子（$\tau$ が大きい）ほど平均として遠方にあることを示している．

## §7　補註——Laplace 変換

**1）Fourier 変換と Laplace 変換**　I, 92 頁以下に Fourier の積分定理がのべられている．$f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ の区間で Dirichlet の条件を満たし，かつ

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx < \infty \tag{7.1}$$

であれば，

$$\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty dv\, f(v)\cos[u(v-x)] = \pi\cdot\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} \tag{7.2}$$

が成り立つ．以下簡単のために特に必要でないときには $f(x)$ が連続でない所でも (7.2) の右辺を $\pi f(x)$ と書いておく．これは不連続な点では両側からの極限値の平均として不連続点の函数値を定義することにあたる．なお

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^p < \infty \tag{7.3}$$

である函数 $f(x)$ の集りを $L_p(-\infty,\infty)$ と書くと，(7.1) は $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ とも書かれる．$f(x)$ が $L_2$ に属するときに積分定理を拡張することもできる．

(7.2) はまた

$$\int_{-\infty}^\infty du\int_{-\infty}^\infty dv\, f(v)e^{iu(v-x)} = 2\pi f(x) \tag{7.4}$$

と書くこともできる．

従って $p$ を実数として

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-ipx}dx \tag{7.5a}$$

で函数 $F(p)$ を定義すれば, $f(x)$ は逆に $F(p)$ から

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(p)e^{ipx}dp \tag{7.5b}$$

で求められる.

$F(p)$ を $f(x)$ の Fourier 変換という. $f(x)$ は (7.5b) の形の逆 Fourier 変換で $F(p)$ から求められる. (7.5b) を反転公式とよぶ.

$f(x)$ が振動の振幅, $x$ が時間であれば $F(p)$ は $f(x)$ を調和分析したとき, 振動数 $p$ の成分の大きさを表わす. しかし, もし時刻 $x=0$ に衝撃的に運動がはじまり, $x>0$ では $f(x)=1$ であると, この函数は $L_1(-\infty,\infty)$ に属しないから, 厳密な意味では Fourier 変換ができない. これらの不便な点を改め, いろいろな意味で使いやすくしたのが, Laplace 変換である.

$f(x)$ を $0\leqq x<\infty$ で定義された函数として, $p$ を複素数として

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-px}f(x)dx \tag{7.6}$$

が存在するとき, $F(p)$ を $f(x)$ の Laplace 変換という. $p$ が純虚数, $f(x)$ は $x<0$ で 0 とすると $F(p)$ は Fourier 変換になる. $f(x)$ は $L_1(0,\infty)$ に属する必要はなく, たとえば Dirac の $\delta$ 函数を含んでいてもよい. このときには微分スペクトル $f(x)$ の代りに積分スペクトル $\varphi(x)=\int^x f(x)dx$ に相当するものをとれば, $f(x)$ が $\delta$ 函数になる点で $\varphi(x)$ は不連続になるだけであるから, (7.6) の代りに Stieltjes 積分

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-px}d\varphi(x)$$

を考えればよい. ここでは $f(x)$ は有界であるとして話をすることにしよう. $F(p)$ を複素函数としてみたときの性質をしらべ, $F(p)$ から $f(x)$ を求める反転公式などについてのべる.

2) **Laplace 変換の性質**　$f(x)$ の Laplace 変換 (7.6) が $p_0$ に対して収束すれば $\Re(p)>\Re(p_0)$ なるすべての $p$ に対して $F(p)$ が収束することは容易に示される. また Laplace 変換が $p_0$ で発散すれば $\Re(p)<\Re(p_0)$ なるすべての $p_0$ に対して $F(p)$ は発散する. たとえば $f(x)=\exp(e^x)$ とすればすべての $p$ に対して発散, $f(x)=\exp(-e^x)$ とするとすべての $p$ に対して収束する. $f(x)=e^{ax}$ ($a$ は実数) ならば $\Re(p)>a$ に対して収束, $\Re(p)<a$ に対して発散

する.

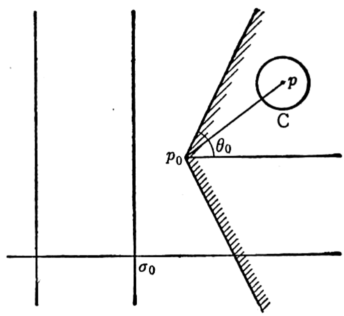
Laplace 変換が $\Re(p)>\sigma_0$ で収束し，$\Re(p)<\sigma_0$ で発散するような実数 $\sigma_0$ は常にただ一つ存在する．$\sigma_0$ が $\pm\infty$ のときもある．$\sigma_0$ を Laplace 変換の収束座標という.

$\Re(p)=\sigma$ では収束することも発散することもある.

次に $F(p)$ を $p$ の函数とみたときの性質をしらべよう.

**定理 1**　$f(x)$ の Laplace 変換 $F(p)$ は $\Re(p)>\sigma_0$ なる半平面で正則であって，積分記号の中で微分が許される.

まず積分が $p=p_0$ で収束すれば $p_0$ を頂点とする第7.1図に示した頂角 $2\theta_0$ の扇形領域内で一様収束であることを示そう.




第 7.1 図

扇形領域を

$$\cos\theta_0 \leqq \frac{\Re(p-p_0)}{|p-p_0|}$$

で定義する．これは $p-p_0$ が実軸となす角が $\theta_0$ より小さいといってもよい．この領域内で収束することは確かである．これが一様収束であることを示すために,

$$g(x)\equiv\int_0^x e^{-p_0x}f(x)dx$$

とおく．$x\to\infty$ で収束するから，任意の正数 $\varepsilon$ に対して

$$|g(x)-g(x')|<\varepsilon$$

が $x, x'\geqq a_0$ で成り立つように $a_0$ をとる．$a_0$ は $p_0, \varepsilon$ できまる数である．$a>a_0$ とすると

$$\int_a^\infty e^{-px}f(x)dx=\int_a^\infty e^{-(p-p_0)x}\frac{dg}{dx}dx=(p-p_0)\int_a^\infty e^{-(p-p_0)x}[g(x)-g(a)]dx.$$

よって

$$\left|\int_a^\infty e^{-px}f(x)dx\right|\leqq|p-p_0|\varepsilon\cdot\int_a^\infty e^{-\Re(p-p_0)\cdot x}dx=\frac{|p-p_0|}{\Re(p-p_0)}\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\cos\theta_0}.$$

従って $\theta_0$ をきめておけば，積分は $p$ の値によらずに一様に小さくできる.

つぎに $F(p)$ が正則であることを証明しよう．$\Re(p)>\sigma_0$ とすると，$p_0$ を $p$

の左に $\sigma_0$ の右にとり $p_0$ を頂点とする扇形領域の中に $p$ が入るようにし，$p$ を中心として扇形の中に入る円 C をつくる．C の周もふくめて $F(p)$ は一様収束する．

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}e^{-px}f(x)dx$$

とすると，この級数は一様収束である．

$$F_n(p)=\int_n^{n+1}e^{-px}f(x)dx=\sum\frac{(-p)^m}{m!}\int_n^{n+1}x^m f(x)dx$$

であるが，この各項は

$$\left|\int_n^{n+1}x^m f(x)dx\right|\leqq(n+1)^m\int_n^{n+1}|f(x)|dx$$

であるから $F_n(p)$ は一様収束であり，従って $F_n(p)$ は正則函数である．従って $F(p)$ は正則な $F_n(p)$ の一様収束な級数であるから，C で正則になる（I, 132 頁）．また Weierstrass の定理から項別微分が許される．　　(証明終り)

第 7.1 表

| $f(x)$ | $F(p)$ | $\sigma_0$ |
|---|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{p}$ | 0 |
| $x^\nu$ | $\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$ | 0 |
| $e^{ax}$ | $\frac{1}{p-a}$ | $\Re(a)$ |
| $\frac{\cos(a\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ | $\frac{e^{-a^2/4p}}{\sqrt{p}}$ | 0 |
| $J_0(ax)$ | $\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$ (1) | 0 |
| $f(x-a)$ | $e^{-ap}F(p)\quad(a>0)$ | |
| $f^{(n)}(x)$ | $p^nF(p)-[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+\cdots+f^{(n-1)}(0)]$ | |
| $\int_0^x\cdots\int_0^x f(x)(dx)^n$ | $p^{-n}F(p)$ | |
| $\int_0^x f(x-\xi)g(\xi)d\xi$ | $F(p)G(p)$ | |

(1) $\sqrt{\quad}$ は中が正ならば正

いろいろの簡単な函数に対する Laplace 変換と収束座標とを第 7.1 表にあげておく．これは簡単な積分で求められる．$x^\nu$ は $\Gamma$ 函数の定義から求まる．また $f(x+a)$ の場合は $f(x)=0$ $(x<0)$ と考えて

$$\int_0^\infty e^{-px}f(x-a)dx=\int_0^\infty e^{-p(x+a)}f(x)dx=e^{-pa}F(p).$$

$e^{-pa}$ は $x$ を $a$ だけずらす演算子と考えられる．また $f(0)=0, f'(0)=0, \cdots,$ $f^{(n-1)}(0)=0$ であるときには，$p^n$ までは $p$ は $\dfrac{d}{dx}$ と考えられ，$p^{-n}$ は $(0,x)$ 間に $n$ 回積分することにあたる．

$$\int_0^x f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

は $f$ と $g$ とのたたみ込みとよばれ，$f*g$ と書かれる．その Laplace 変換は $f$, $g$ 別々の Laplace 変換の積になる．これらの関係は演算子法で利用される．

3) **Laplace 反転公式**　$f(x)$ の Laplace 変換 $F(p)$ が分っているとき，逆に $f(x)$ を求めるには簡単の場合には上にあげた“字引”によってさがせばよい．しかし複雑な場合にはもっと直接に求める方法がある．

**定理 2**　$f(x)$ の Laplace 変換を $F(p)$ とし，収束座標を $\sigma_0$ とすると，

$$f(x)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau}F(p)e^{xp}dp \qquad (x>0).$$

ここに $\sigma>\sigma_0$. $f(x)$ が不連続な点では $f(x+0)$ と $f(x-0)$ の平均値になる．$x<0$ ならこの右辺は 0 になる．

この関係は Fourier の逆変換と本質的には同じであるが一応証明しておく．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau}F(p)e^{xp}dp=\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau}e^{(\sigma+iu)x}du\int_0^\infty e^{-(\sigma+iu)v}f(v)dv.$$

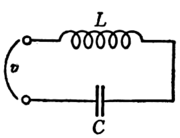
$v$ についての積分はまえに示したように $\sigma>\sigma_0$. $|u|<\tau$ で一様収束であるから，順序をかえてよい．

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v)dv\int_{-\tau}^{\tau}e^{(\sigma+iu)(x-v)}du=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(v)e^{\sigma(x-v)}\frac{\sin\tau(x-v)}{x-v},$$

ここで $\tau\to\infty$ とすれば，Dirichlet の積分定理により上の積分は $x>0$ ならば $f(v)e^{\sigma(x-v)}|_{v=x}=f(x)$ になる．$x<0$ なら 0 になる．　　　　（証明終り）

Laplace の反転公式は Mellin の公式ともいわれる．普通には積分の上下限を $\sigma\pm i\infty$ と書く．まえにあげた“字引”を反転公式でためしてみるとよい．

4) **Laplace 変換の応用**　Laplace 変換は応用がひろいが，演算子法の例を少し上げておく．たとえばインダクタンス $L$, 容量 $C$ が直列になっている回路に外から $v(t)$ の電圧をかけたとき，時刻 0 からどういう電流 $i(t)$ が流れ



第 7.2 図

るかをしらべる (第7.2図). 方程式は

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = v(t)$$

である. $i(t)=0$ $(t<0)$ であるから $i, v$ の Laplace 変換を $I, V$ とすると

$$Lp\,I(p)+\frac{I(p)}{Cp} = V(p).$$

従って

$$I(p) = \frac{Cp}{1+LCp^2}V(p).$$

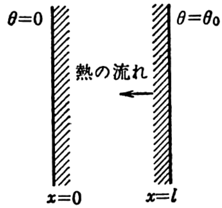
$LC=\dfrac{1}{{\omega_0}^2}$ とすると

$$I(p) = \frac{1}{L}\frac{p}{p^2+{\omega_0}^2}V(p).$$

$p^2/(p^2+{\omega_0}^2)$ を $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i\omega}+\dfrac{1}{p+i\omega}\right)$ と書いてまえの字引から反転すると $\cos\omega_0 t$ になる. 従って同じ"字引"のたたみこみの定理から

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t \cos\omega_0(t-\xi)v(\xi)d\xi$$

が解になる. $v=C\cos\omega t$ のような場合に結果を出し, 微分方程式を解いて比べてみるとよい.



第 7.3 図

偏微分方程式の例として, 板の内側を0度, 外側を $\theta_0$ 度に保ち, 板がはじめ0度であるときの熱伝導を考える (第7.3図). 温度を $\theta(x,t)$ とし方程式を

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

としよう. $\theta(x,t)$ の $t$ についての Laplace 変換を $\Theta(x,p)$ とする.

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=p\Theta.$$

$x=0,\ l$ の境界条件を満たす解は

$$\Theta=\frac{\theta_0}{p}\frac{\sinh\sqrt{p}\,x}{\sinh\sqrt{p}\,l}.$$

である. 分母に $p$ をおいたのは, $\theta=1$ は $\Theta=\dfrac{1}{p}$ に対応するからである. 熱の流れ $q$ は $\partial\theta/\partial x$ で与えられる. その Laplace 変換は

$$Q(x,p)=\frac{\theta_0}{\sqrt{p}}\frac{\cosh\sqrt{p}\,x}{\sinh\sqrt{p}\,l}.$$

反転公式により

$$q(x,t)=\frac{\theta_0}{2\pi i}\int\frac{\cosh\sqrt{p}\,x}{\sqrt{p}\sinh\sqrt{p}\,l}e^{pt}dp.$$

積分は虚軸に平行で，その右側に特異点がないようにしなくてはならない．被積分函数は $\sqrt{p}$ を含むが，容易に分るように実は一価函数である．$p=0$ に一次の極，$p=-n^2\pi^2$ にも一次の極をもつ．よって留数を求めれば

$$q(x,t)=\frac{\theta_0}{l}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}\cos n\pi\,x/l\right]$$

この式は $t$ があまり小さくない時に便利な式である．$t$ が小さいとき $x=0$ の面で $q(0,t)$ を与えるもっと便利な式を求めるには，

$$q(0,t)=\frac{2\theta_0}{2\pi i}\int\frac{e^{pt}e^{-\sqrt{p}\,l}}{\sqrt{p}\,(1-e^{-2\sqrt{p}\,l})}dp=\frac{2\theta_0}{2\pi i}\int\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}}(e^{-\sqrt{p}\,l}+e^{-3\sqrt{p}\,l}+\cdots)dp$$

$$=\frac{2\theta_0}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{(2n-1)^2 l^2}{4t}}.$$

この式は $t$ が小さいときに収束がはやい．

演算子法では $f(x)=1$ が $F(p)=1$ に対応するように

$$F_1(p)\equiv p\int_0^{\infty}e^{-px}f(x)dx$$

で Laplace 変換を定義することがある．従来の $F$ の代りに $pF$ を使えば全く同じである．

# 第 2 章　波　　動

## §1　波動方程式

振幅の小さい振動が空間を伝わる現象は，多くの場合波動方程式で記述される．空気の中を伝わる音波は，振幅が小さく，空気の動く速さが音の速さに比べて小さい時は波動方程式に従う．電磁波もそうである．また量子力学の波動函数も名前の通り波動方程式で記述されるが，この場合の波動方程式は音波の場合と少しちがった形をしている．つぎにいくつかの場合について波動方程式の具体的な形を求め，あわせて境界条件の意味をしらべることにしよう．

1)　**弦の波動**　張力 $T$ でまっすぐに張られた弦を考える．静止のとき静止の位置の弦にそって $z$ 軸をとり，それに垂直に $x, y$ 軸をとる．弦が運動しているとき，点 $(0, 0, z)$ にあった弦上の点が，$x$ 方向に $\phi(z)$，$y$ 方向に $\psi(z)$ だけ移動したとしよう．移動した距離は小さくて，弦ののびは考えなくてよいとし，したがって張力は変わらないものとする．弦の両端に張力が働いているために，弦はもとにひきもどされようとする．$z$ と $z+dz$ の間にある部分がうける張力を $F_x, F_y$ とする．弦の方向余弦は $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}, \dfrac{\partial\psi}{\partial z}, 1$ と近似されるから

$$F_x = T\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z+dz} - T\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_z$$

$$= T\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}dz$$

となる．$F_y$ も同様に $F_y = T\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}dz$ となる．

弦の単位長さあたりの質量を $\rho$ とすると，力は $\rho\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \rho\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ に等しいから

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

$(\phi, \psi)$ を $x, y$ 面内のベクトルと考えて，$\boldsymbol{A}$ とかくと

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

ここに $c^2 = T/\rho$ は張力と密度できまり，波の速さを表わすことは A§1.1 で

示した通りである．$\rho$ が場所によって変われれば，速さも変わる．$\phi$ と $\psi$ は同じ形の式を満たし，同じ速さで伝わる波を表わす．$\phi\neq 0$ で $\psi=0$ であれば $x$ 方向に偏った波，$\phi=0$ で $\psi\neq 0$ であれば $y$ 方向に偏った波を表わす．また

$$\phi = A\cos\omega\left(t-\frac{z}{c}\right),$$

$$\psi = A\sin\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)$$

は，いたる所変位の大きさが $A$ で，右まわりにまわりながら進む円偏波を表わす．これらの事情から，弦を伝わる波は，光の模型と考えてもよいことがわかる．

簡単のため直線偏波だけ考えて，運動エネルギーと位置エネルギーを求めてみよう．運動エネルギー $K$ は明らかに

$$K=\frac{1}{2}\int\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 dz \tag{1.2}$$

である．また位置エネルギーは張力 $T$ が働いて変形させるときに生ずるエネルギーであって，$T$ に弦ののびをかけたものに等しい．はじめに $dz$ の長さの部分は，変形後 $dz\sqrt{1+\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2}$ になるから，のびは $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 dz$ である．したがって位置エネルギー $U$ は

$$U=\frac{T}{2}\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 dz \tag{1.3}$$

である．全エネルギー $E$ は $T+U$ に等しい．

$z=a$ から $x=b$ までの間にある全エネルギーの変化を考えてみると

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\}dz$$

であるが，微分を行なって運動方程式を使えば，

$$\frac{dE}{dt}=\left(T\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x=b}-\left(T\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{x=a}. \tag{1.4}$$

これから，$-T\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial t}$ は $x$ の正の方に流れるエネルギーの流れを表わすことがわかる．$-T\frac{\partial\phi}{\partial z}$ は $z$ の負の部分が正の部分に及ぼす横の力であり，$\frac{\partial\phi}{\partial t}$ は速度であるから，この結論は当然である．

波と電気振動との形式上の類似に着目して考えると，電気に詳しい読者には

好都合であろう．$\frac{\partial\phi}{\partial t}$ は速度であるから，これを電流 $I$ に対応させる．また $-T\frac{\partial\phi}{\partial z}$ は力であるから，これを電圧 $V$ に対応させる．そうすれば $z$ を通って流れる電力は $VI$ になる．また運動エネルギー $K$ は $\int\frac{1}{2}\rho I^2 dz$ とかかれるが，電気回路では磁気エネルギーは $\frac{1}{2}LI^2$ であって，$L$ はインダクタンスを表わし，$\rho$ に対応する．$C$ を電気容量とすれば電気エネルギーは$\frac{1}{2}CV^2$ である．したがって位置エネルギー $U=\int\frac{V^2}{2T}dz$ と比べて，$1/T$ は容量 $C$ に対応することもわかる．電磁気学では

$$Z=\frac{V}{I} \tag{1.5}$$

を端子 $z$ のインピーダンスといい，$\sqrt{L/C}$ を特性インピーダンスとよぶ．また波の速さは $1/\sqrt{LC}$ である．

弦の場合に，速さ $c$ は $\sqrt{T/\rho}$ であるが，$L=\rho$, $C=1/T$ としてみると，たしかに $1/\sqrt{LC}$ になっている．また

$$\phi=Ae^{-i\omega t+i\frac{\omega}{c}z}$$

で表わされる $+z$ の方に進む波を考えると

$$\begin{aligned} V&=-T\frac{\partial\phi}{\partial z}=-iT\frac{\omega}{c}\phi, \\ I&=\frac{\partial\phi}{\partial t}=-i\omega\phi \end{aligned} \tag{1.6}$$

であるから，

$$Z=\frac{V}{I}=\frac{T}{c}=\sqrt{T\rho}$$

となる．これは上にのべた $L=\rho$, $C=1/T$ を使えば，$\sqrt{L/C}$ で定義された特性インピーダンスに等しい．

弦の端が固定されていれば境界条件は $\phi=0$ で（第一種），全く自由に動かれれば $\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$ である（第二種）．これは水平に張られた弦の端が上下に自由に動かれる場合である．また，たとえば速さに比例するまさつ力 $R\,\partial\phi/\partial t$ があり，その上に変位に比例してもとにもどそうとするばねの力 $\alpha\phi$ があれば

$$-T\frac{\partial\phi}{\partial z}=R\frac{\partial\phi}{\partial t}+\alpha\phi$$

となる．$\omega$ を複素数とし，$\phi\propto e^{-i\omega t}$ とすると，端でインピーダンスが

$$Z=\frac{-T\dfrac{\partial\phi}{\partial z}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial t}}=R+\frac{\alpha}{\omega}i$$

となる．これが境界条件である．このほか端を動かしてやるときには $\phi$ が与えられた時間の函数になり，力をきめたときには $-T\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ が与えられた函数になる．

なお，弦のまわりに空気があれば，そこから空気の振動がおこって，弦のエネルギーを持ち去って減衰するであろう．また弦と空気とのまさつのためにエネルギーが失われることもあろう．まさつ力を速度に比例するとすれば

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\sigma\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{1.7}$$

の形の方程式になる．これは電信方程式といわれ，損失のあるケーブルにそって伝わる電波もこれと同じ式に従う．

また，もし弦が弾性体の中にうまっている場合には，変位 $\phi$ に比例した力が弦を押しもどそうとする．この力を $-\mu^2\phi$ とすれば

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\mu^2\phi \tag{1.8}$$

となる．これは素粒子論でスカラー中間子の運動を記述する Klein-Gordon 方程式と同じ形である．

2）**流体中の音波**　流体の運動方程式について，必要な事柄を思い出してみよう．流体中の1点 $\boldsymbol{r}$ における速度を $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ また密度を $\rho(\boldsymbol{r},t)$ としよう．時間 $dt$ 後にその点にあった流体は $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\,dt$ にうごくから，その部分の速度の変化は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\,dt,t+dt)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ になる．$\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$ の記号はよく使われる．以上のことから力学の法則は

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}$$

とかける．$\boldsymbol{F}$ は単位体積あたりに働く力であって，流体内の変形のための応力も含んでいる．たとえば圧力が $p$ であれば，$\boldsymbol{F}=-\nabla p$ である．粘性があると，速度に関係する力が加わる．簡単のために圧力だけを考えれば

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{1.9}$$

また，$\rho\boldsymbol{v}$ は物質の流れであるから，流れ出しただけ密度がへるという関係

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) \tag{1.10}$$

がある．これが連続の方程式である．

流体の圧力と密度との間には，ある関係があるであろうが，一般にいって密度は圧力だけの函数ではない．簡単な理想気体の場合にも，温度が与えられなくては，圧力だけで密度はきまらない．圧力が変わっても密度が一定という仮定は，液体では近似的によいであろうが，それでは音波にならない．運動の時間変化がはやく，空間的に温度などの急激な変化もなくて熱伝導が無視できる場合には，流体の変化が断熱的に起ると考えてよいであろう．この場合には，たとえば気体では大体

$$p/\rho^{\gamma}=\text{一定} \tag{1.11}$$

と考えることができる．ここに $\gamma$ は定圧比熱と定積比熱との比で，空気では $\gamma$ は大体 1.4 である．この場合には

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\rho}&=\gamma\frac{p}{\rho}=c^2,\\ \int\frac{dp}{\rho}&=\frac{1}{\gamma-1}c^2+\text{const}\end{aligned} \tag{1.12}$$

となる．また液体では $\dfrac{dp}{d\rho}$ は圧縮係数の逆数である．

音波が伝わるときのように，速度が小さいときには，運動方程式で $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ の項は速度の二乗であるから省略し，

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\sim-\nabla\cdot\boldsymbol{v},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\sim-\frac{1}{\rho}\nabla p=-\nabla\cdot\int\frac{dp}{\rho}$$

としてよい．$\boldsymbol{v}$ はしたがって $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ を満たすと考えてよい．すなわち渦無しである．上の式から $\rho$ を消去すると

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})c^2=c^2\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{1.13}$$

ここに $c^2$ は一定とし，$\nabla^2\boldsymbol{v}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$ を使った．渦無しであるから，$\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ と書いてよい．$\phi$ を速度ポテンシアルとよぶ．$\phi$ も(*1. 13*)と同様

に

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\nabla^2\phi \tag{1.14}$$

を満たす．これは波動方程式である．(*1. 12*) の $c$ は音速に外ならない．

弦の場合と同様に，境界条件はいろいろある．静止した固い壁の所では，流体の速度は壁に平行でなくてはならないから，壁の法線を $n$ とすると

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$$

になる．これは第二種の境界条件である．まえにのべた式から，音波のためにおこる圧力の変化 $\delta p=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$ である．境界が固定されていなくて，圧力に従って動くとき，圧力と速度の比

$$Z=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg/\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

を壁の法線方向のインピーダンスという．調和振動の場合には，$\phi\propto e^{-i\omega t}$ であるから，圧力の増しは $i\omega\rho\phi$ と書かれる．したがって $Z$ は $\phi$ と $\partial\phi/\partial n$ との比に比例する．

3）**量子力学の波動方程式**　Schrödinger の波動方程式は，直交座標でかくと

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})\psi \tag{1.15}$$

と書かれる．ここに $\boldsymbol{p}$ は運動量で，

$$\boldsymbol{p}=-i\hbar\nabla \tag{1.16}$$

である．$\hbar$ は Planck 定数 $h$ を $2\pi$ でわった量である．また $H$ はハミルトニアンである．粒子が多数あるときでも全体のハミルトニアンを $H$ としてとると，同じ形の式が成り立つ．

外力のポテンシアル $V(x)$ をうけて運動する粒子にたいしては，$m$ を粒子の質量とすれば

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(x).$$

Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x)\right\}\psi(x,t) \tag{1.17}$$

となる．

この式は，波動方程式と呼ばれているが，まえにのべた波動方程式よりも，むしろ拡散の方程式に似ているといえるかもしれない．波動の場合には $\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ という演算を含むのに反して，Schrödinger の式は一階の時間微分しか含んでいないから，放物線型の微分方程式である．拡散の場合には，(*1. 17*) の左辺の $i$ がなく，実数の方程式である．このとき，時間がたつにつれて拡散するので，逆に過去にさかのぼることは一般には許されない．たとえば時刻 $t$ に一点にあると，その後の時刻 $t$ $(t>0)$ にはひろがってしまう．それで逆に時刻 $t$ に一点に集まっているとき，過去の時刻 0 でどういう分布にあったかという問題には解がない．これに反して，Schrödinger の方程式ではそのようなことはない．たとえば自由な粒子 $(V=0)$ で，時刻 $t$ で原点 $x=0$ に源のあるときの解は $t>0$ では，Green 函数 $G(x,t)$ で表わされる．$G(x,t)$ は拡散係数を虚数にしたものである．ところで (*1. 16*) の複素共役の式を作ってみればわかるように，$G$ の共役複素 $G^*$ は，(*1. 16*) で $i$ を $-i$ でかえた式で満たすが，この式で $t$ を $-t$ としてみると，(*1. 16*) と全く同じ式になる．したがって $G^*(x,-t)$ は過去にさかのぼる解であることがわかる．これは時刻 $t$ に原点に収束する波である．

量子力学では，$\psi$ と $\nabla\psi$ とはいたる所連続であることが要求されている．ポテンシアルに不連続があっても $\psi$ と $\nabla\psi$ とは連続でなければならない．また $\psi^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$ を粒子が点 $\boldsymbol{r}$ にある確率という．(*1. 17*) とその複素共役の式とから

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\psi^*\psi=-\frac{\hbar}{2mi}\int\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\cdot\psi\right)da \qquad (1.18)$$

が得られる．ここに右辺の積分は領域の表面について行ない，$n$ は外向きの法線である．これは連続の方程式と同じ形であるから

$$\boldsymbol{J}=-\frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi-\nabla\psi^*\cdot\psi) \qquad (1.19)$$

を確率の流れと呼ぶ．$\psi$ も $\nabla\psi$ も連続であるから，$\boldsymbol{J}$ は連続であって，(*11. 8*) は粒子の確率が保存されることを意味する．特に，積分を全空間にとると，$\psi$ や $\nabla\psi$ が遠方で十分小さくなれば

$$\int\psi^*\psi\,d\tau \qquad (1.20)$$

は時間がたっても不変であるから，これを 1 と規格化する．これは全確率が 1 であることに相当する．

古典力学では，位置エネルギーが全エネルギーより大きい所に粒子が達することはできないが，波動方程式の解は連続につながるので，古典力学では達することのない領域にもひろがっていく．それで境界で $\psi$ と $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ とが連続という条件で無限遠までのばしていかなくてはならない．特に境界が理想的に固い壁である場合には，通りぬけることはできない．このとき壁のところで $\psi=0$ が境界条件となる．

Schrödinger 方程式は時間について一階微分しか含まないから，ある時刻 $t=0$ で $\psi(\boldsymbol{r})$ を与え，空間の境界条件をきめると解が決定される．$\psi$ は複素数であるから，$\psi$ の値を与えるためには，その実部と虚部の二つを与えなければならない．

4） **Helmholtz の方程式**　波動方程式 (*1.14*) で，$\phi$ が周期的に変化するとき，$e^{-i\omega t}$ に比例するとすれば

$$\nabla^2\phi+k^2\phi=0 \tag{1.21}$$

となる．ここに $k^2=\omega^2/c^2$ である．また，Schrödinger 方程式で $\psi$ が周期的である場合にも

$$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}[\hbar\omega-V(\boldsymbol{r})]\psi=0 \tag{1.22}$$

となる．Schrödinger の方程式では，ポテンシアルの基準をきめないと，エネルギー $\hbar\omega$ の基準点もきまらないが，その差 $\hbar\omega-V$ は運動エネルギーに等しいわけで，これは基準によらず意味をもつ．(*1.21*) と異なり，$\hbar\omega-V(\boldsymbol{r})$ は正とは限らない．$V=0$ で $\hbar\omega>0$ の場合には (*1.21*) と同じ形になる．(*1.21*) を Helmholtz の方程式という．熱伝導の場合にも，$e^{-\lambda t}$ のように時間に関係すれば，やはり同じ形の式が得られる．Helmholtz の方程式は自己随伴であるが，(*1.22*) もそうであるから，A 編第3章でのべた Green 函数に関する事柄はそのままあてはまる．したがって定常の場合は波動方程式も Schrödinger 方程式も同じように議論される．

## §2 円筒による波の散乱

はじめに定常波を考え，$\psi\propto e^{-i\omega t}$ とする．あるいは Helmholtz の方程式 $\nabla^2\psi$

$+k^2\psi=0$ を考えて，時間因子を落して議論してもよい．以下しばらく定常波という言葉を時間的に調和振動をしている波の意味に使う．三次元空間の波にたいしても，$z$ 軸の方に変化がない場合，つまり平面波が円筒や，無限に長いリボンの軸に垂直に進行してあたる場合も二次元の問題として取り扱われる．

1) **極座標による分離** Helmholtz の方程式を極座標 $r, \theta$ で書くと

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+k^2\psi=0$$

である．これから，$J_m(kr)e^{\pm im\theta}$, $Y_m(kr)e^{\pm im\theta}$ の形の解をもつことがわかる．ここに $m$ は 0 または正の整数である．

また平面波 $e^{ikr\cos\theta}$ も同じ方程式の解であり，$r=0$ でも有界であるから，

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\cos m\theta\cdot J_m(kr)$$

の形の展開ができるはずである．係数 $C_m$ をきめるには，$\cos m\theta$ をかけて積分してみれば

$$C_mJ_m(kr)=\varepsilon_m\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikr\cos\theta}\cos m\theta\,d\theta,$$

ここに $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_m=2$ $(m>0)$．Bessel 函数の積分表示

$$J_m(z)=\frac{1}{\pi i^m}\int_0^{\pi}e^{iz\cos\theta}\cos m\theta\,d\theta$$

とくらべて $C_m=\varepsilon_m i^m$ となる．したがって

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m\cos m\theta\,J_m(kr). \tag{2.1}$$

また外向きに出ていく球面波にたいしては

$$H^{(1)}(kr)=J_m(kr)+iY_m(kr)=\frac{2}{\pi i^{m+1}}\int_0^{i\infty}e^{ikr\cos\theta}\cos m\theta\,d\theta \tag{2.2}$$

を使えばよい．$H_m^{(1)}(z)$ や $J_m(z)$ の $z$ が $m$ に比べて大きいときの漸近形は

$$\begin{aligned}J_m(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right),\\ H_m^{(1)}(z)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

$H^{(1)}$ が外向きの波を表わすことはこの漸近形から明らかである．

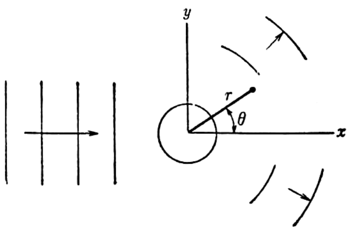
また $z$ が小さい時には

$$J_m(z)\sim\frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m,$$

$$Y_0(z)\sim\frac{2}{\pi}[\log z-0.1159], \qquad (2.4)$$

$$Y_m(z)\sim-\frac{1}{\pi(m-1)!}\left(\frac{2}{z}\right)^m,\quad m>0.$$

2) **円筒による散乱**　円筒に垂直に進む平面波が，円筒によって散乱される現象を考えてみる．円筒の半径を $a$，平面波の波数を $k$ (波長は $2\pi/k$)，その進行方向を $x$ 軸にとり，円筒の中心を原点とする極座標 $r$, $\theta$ をとる．$-x$ の方から入射する平面波を



第 2.1 図

$$\psi_0=e^{ikx}=e^{ikr\cos\theta} \qquad (2.5)$$

とする．円筒にあたって散乱された波を

$$\psi_s=\sum_m C_m\cos m\theta\cdot H_m^{(1)}(kr) \qquad (2.6)$$

としよう．この二つを重ね合わせたのが全体の波 $\psi$ である．

円筒の表面の境界条件を簡単に $\psi=0$ としよう．これは量子力学では剛体に相当する．展開式 (2.1) を使うと，

$$\sum_m \cos m\theta\{\varepsilon_m i^m J_m(ka)+C_m H_m^{(1)}(ka)\}=0.$$

これから，

$$C_m=-\frac{\varepsilon_m i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}$$

であることがわかる．

いま，$H_m^{(1)}$ を

$$H_m^{(1)}(ka)=-iH_m e^{-i\delta_m} \qquad (2.7)$$

とおくと，$H_m^{(1)}$ の実部が $J_m$ だから，$J_m=-H_m\sin\delta_m$ となる．これを使うと

$$C_m=-\varepsilon_m i^{m-1}e^{i\delta_m}\sin\delta_m. \qquad (2.8)$$

十分遠方で，$H^{(1)}(kr)$ の漸近形を使って

$$\psi_s\to e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{ikr}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cdot e^{i\delta_m}\sin\delta_m\cos m\theta. \qquad (2.9)$$

散乱波の和の部分が，散乱波の角分布を与える．

$\delta_m$ は位相のずれ (phase shift) と呼ばれる．いま $\psi_0+\psi_s$ の漸近形をみると，$\cos m\theta$ に比例する部分は

$$\varepsilon_m\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left[i^m\cos\left(kr-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)-i^{m-1}e^{+i\delta_m}\sin\delta_m\cdot e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}\right]$$

$$=\varepsilon_m\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\frac{i^m}{2}\left[e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}+e^{+2i\delta_m}e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}\right]$$

$$=\varepsilon_m\sqrt{\frac{1}{2\pi k}}e^{-\frac{\pi}{4}i}\left[(-1)^m i\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}+e^{2i\delta_m}\frac{e^{+ikr}}{\sqrt{r}}\right]$$

となる．これをみると，原点に向って収束する波と，原点から発散する波との振幅の大きさは同じになっている．これは円筒が波を吸収しない限り当然のことであって，固い壁である必要はない．$\partial\phi/\partial n=0$ という境界条件でも同じであるし，また散乱体の形が円筒であることも必要でない．ただ円筒の場合には $m$ のちがう成分は各々独立であるから，$\delta_m$ は動径方向の常微分方程式を解くだけできめられるが，散乱体の形が複雑であると，いろいろの成分波の間に境界条件を通して関係ができるので，複雑な連立方程式を解かないと $\delta_m$ がきめられない．

散乱体の大きさ $a$ に比べて，波長が長くなると，平面波のうち $\cos m\theta$ に比例する部分は $J_m(kr)$ で，波長が長く $k$ が小さくて $ka\ll 1$ ならば，散乱体の近くで $J_m(kr)\sim\frac{1}{m!}\left(\frac{kr}{2}\right)^m$ である．したがって $m$ が大きくなるとその振幅は急に小さくなる．したがって散乱波の振幅 $C_m$ も小さくなる．これは $\delta_m$ が小さいことを意味する．$\delta_0$ だけを除いて，あとの $\delta_m$ を無視すれば，散乱は軸対称に起る．

入射波の振幅を 1 にとったから，散乱波の漸近形が

$$\psi_s\sim\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}f(\theta) \tag{2.10}$$

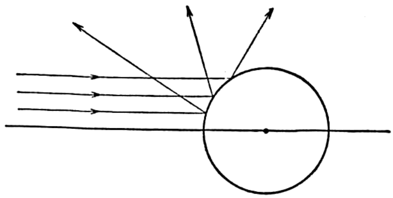
であるとき，$\theta$ 方向の角 $d\theta$ 内に散乱されて出ていく波の強さは，$|\psi_s|^2r\,d\theta$ であるから，$r$ に無関係で

$$\sigma(\theta)d\theta=|f(\theta)|^2d\theta \tag{2.11}$$

となる．ここに $f(\theta)$ は

$$f(\theta)=\sqrt{\frac{2i}{\pi k}}\sum_m\varepsilon_m e^{+i\delta_m}\sin\delta_m\cos m\theta \tag{2.12}$$

で，これを散乱振幅という．$\sigma(\theta)$ は，面積（二次元の問題では実は線分の長さ）の次元を持ち，散乱の微分断面積といわれる．かりに円筒の面を区分して，ある部分に当った波は $\theta$ だけまがった方向に散乱されるようにきめたとする．古典力学ではちょうどそうなっていて，粒子が当る場所によって散乱角がきまっている．そうすれば $\theta$ と $\theta+d\theta$ の角度に散乱する部分を入射波の方向からみたときの面積の総和が $\sigma(\theta)d\theta$ になるわけである．



第 2.2 図　古典粒子の散乱

散乱波の全体の強さを全断面積といい，$\sigma$ とかく．$\sigma$ は (2.11) を積分して

$$\sigma=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\theta)d\theta=\frac{4}{k}\sum\varepsilon_m\sin^2\delta_m \tag{2.13}$$

となる．

$\theta=0$ のとき，すなわち入射波の進む方向の散乱振幅 $f(0)$ を前方散乱の振幅という．$f(0)$ は $\sigma$ と簡単な関係にある．直接に計算してみればわかるように

$$\Im\left(\frac{f(0)}{\sqrt{i}}\right)=\sqrt{\frac{k}{8\pi}}\cdot\sigma, \tag{2.14}$$

$\Im$ は虚数部分を意味する．これは散乱されただけ前方の波が減少することを表わしている．これについては後にのべる．

問題〕 長波長の極限 $ka\to 0$ で

$$\sigma\to\frac{\pi^2}{k}\left(\log\frac{1}{ka}\right)^2$$

を証明せよ．またもし円筒の表面で $\partial\psi/\partial n=0$ とすると，同じ極限で散乱は球対称にならず，$(ka)^3$ の程度に断面積が小さくなることを示せ．

## §3　波長の短い波の円筒による散乱

波長が短くなると $k$ が大きくなって，$kr$ が大きいために，$J_m(kr)$ は $m\geqq kr$ にならないと小さくならない．(2.3) から，$m\ll ka$ の場合，

$$-\delta_m\sim ka-\frac{\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)$$

である．$m\sim ka$ になるとこの関係は使われないが，$\delta_m$ はこれと同程度になることが示される．$\sin^2\delta_m$ を加えるのであるが，$\sin^2\left(ka-\frac{\pi}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$

$\left[1-\cos\left(2ka+\frac{\pi}{2}-m\pi\right)\right]$ とすると cosine の項は符号が交代するので，平均として消えると考えてよい．したがって

$$\sigma\sim\frac{4}{k}\sum_{m=0}^{ka}\varepsilon_m\sim 4a \tag{3.1}$$

となって，円筒の直径 $2a$ の二倍になる．

波長が短くなると波の拡がることが少なく，従って波は直進する．このことは可視光を光線として取り扱ってよいことからもわかるであろう．入射波を光線のように考えれば，円筒に当った光線だけが散乱され，したがって断面積は直径に等しくなってよさそうである．これが実は二倍になるという結論は，少し混乱させる事情である．このことを明らかにするためには，波長が短くなったときの波をもう少しよく調べ，入射波と散乱波との分離の意味をもっと立ち入って考えてみなくてはならない．

散乱波 $\psi_s$ は Helmholtz の式を満たしている．そこで主要解

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=i\pi H_0^{(1)}(kR) \tag{3.2}$$

を使って Green の公式を書いてみる．$R$ は $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 間の距離で $G$ は $(\nabla^2+k^2)G=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ を満たしている．

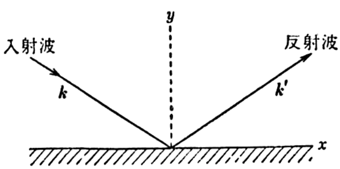
$$\psi_s(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oint\left[\psi_s(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi_s(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]ds', \tag{3.3}$$

ここに $\boldsymbol{n}'$ は円筒外部の点 $\boldsymbol{r}$ を含む領域からみて内向きの法線，積分は円筒の表面について行なう．表面としては円筒面のほかに全体を包む大きな遠方の面がいるが，$\psi_s$ も $G$ も外向きの波であるから，その積分は寄与しない．

入射波を $\psi_i$ とすると，全体の波 $\psi=\psi_s+\psi_i$ は円筒表面で 0 になるから，積分では $\psi_s=-\psi_i$ とおいてよい．

$$\psi_s(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\int\left[\psi_i(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}+G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi_s(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]ds'. \tag{3.4}$$

波長が短いとき，円筒面を日向と影に分けて考えることができる．日向は直接に入射波が当る所である．波長が短いので入射波の当る所は平面と考えてよい．完全に平面の場合，入射波を $\psi_i=e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ とすれば，反射波は $\psi_s=-e^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}}$ と書かれ，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}'$ とは図のように法線 1 の反対側にある．




第 3.1 図

法線方向に $y$ 軸，面にそって $x$ 軸をとると，$k_x=k_x'$, $k_y=-k_y'$ である．面上では $\psi_i=e^{ik_xx}$, $\psi_s=-e^{ik_xx}$ であるから $\psi_i=-\psi_s$ が成り立つ．このとき法線微分は

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y}=ik_ye^{ik_xx}=\frac{\partial\psi_s}{\partial y}$$

となっていてちょうど等しい．また影の部分では回折でまわりこむことを考えないでよいから，$\psi_s$ は $\psi_i$ を完全に打ち消していて，$\psi_i=-\psi_s$ であるばかりでなく，$\dfrac{\partial\psi_i}{\partial n}$ も $-\dfrac{\partial\psi_s}{\partial n}$ に等しい．したがって

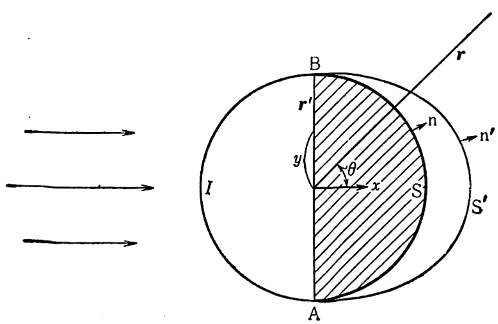
$$\psi_s(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\int_{\text{日向}}\left[\psi_i(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}+G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi_i(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]ds'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\text{影}}\left[\psi_i(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\psi_i(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]ds'. \qquad (3.5)$$

こうして，短波長の極限では散乱波を入射波で直接に書き表わすことができたから，あとは積分をするだけである．

影の部分からくる散乱波を影散乱(shadow scattering)という．これは影の部分に入射波が来ないため，いいかえると入射波をちょうど打ち消すような散乱波がそこで生ずることから起る．したがって日向の散乱がどんな条件で起っていても，影散乱は散乱体の全断面積にだけ関係する．影散乱の断面積は全断面積に等しいはずである．したがってまた影散乱は影の部分の面の形にはよらないはずである．つぎにこのことをみよう．

影散乱の積分は，影の半円(第3.2図の面S)についてベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')=\psi_i(\boldsymbol{r})\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\nabla'\psi_i(\boldsymbol{r}')\cdot G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$




第3.2図

の法線成分を積分したものである．しかるに $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')$ の発散は

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')=\psi_i(\nabla'^2+k^2)G-(\nabla'^2+k^2)\psi_i\cdot G$$

であって，これは $\boldsymbol{r}'$ が面 S 上にない限り 0 である．したがって縁 A, B を共通にした二つの面 S, S' にはさまれた部分に $\nabla'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')$ を積分すると

$$0=\int\nabla'\cdot\boldsymbol{v}\,d\tau'=\int_{S'}v_n dS'-\int_{S}v_n dS'$$

となって，面の縁 A, B が同じであれば，積分の値は等しい．つまり面を入射方向からみたときの面積だけに関係する．

こういう事情を考えると，影散乱の積分は便利なように面をとって計算してよい．たとえば円筒の直径 AB にそった面をとってもよい．$\boldsymbol{r}$ を十分遠方にもっていけば，$y$ を中心から直径にそって $\boldsymbol{r}'$ までの距離として

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=r-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}=r-y\sin\theta$$

である．$G$ は漸近形を使って

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\sim\sqrt{\frac{2\pi}{kR}}e^{i\left(kR+\frac{\pi}{4}\right)}\sim\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}\cdot e^{-iky\sin\theta},$$

$$\frac{\partial G}{\partial n'}\sim-ik\cos\theta G.$$

また $\psi_i$ は $e^{ikx}$ であるから，AB 上で $\psi_i=1$, $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial n'}=\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x}=ik$ となる．したがって影散乱 $S$ は

$$\begin{aligned}S&=-\frac{1}{4\pi}\int_{-a}^{a}(-ik\cos\theta\,G-G\cdot ik)dy\\&=\frac{ik}{4\pi}(1+\cos\theta)\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}e^{-iky\sin\theta}dy\\&=\frac{ik}{4\pi}(1+\cos\theta)\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}2\frac{\sin(ka\sin\theta)}{k\sin\theta}\\&=ia\cdot\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\frac{1+\cos\theta}{ka\sin\theta}\sin(ka\sin\theta)\frac{1}{\sqrt{r}}e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}\end{aligned}\tag{3.6}$$

となる．

$S$ は $ka$ が大きいとき，$\theta<\dfrac{1}{ka}$ では大きな値をとるが，$\theta$ が大きくなると急激に小さくなる．したがって角度 $(ka)^{-1}$ くらいにしぼられた鋭い前方分布をもつ．反射される方向 $\theta=\pi$ では $S=0$ である．また影散乱の強さは

$$r|S(\theta)|^2=\frac{1}{2\pi k}\cot^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin^2(ka\sin\theta) \tag{3.7}$$

である．全断面積は

$$\sigma_S=\frac{1}{2\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\cot^2\frac{\theta}{2}\sin^2(ka\sin\theta)d\theta$$

であるが，$ka$ が大きいとき，$\theta=0$ の近くしかきかないから $\sin\theta\sim\theta$, $\cot\frac{\theta}{2}\sim\frac{2}{\theta}$ とおき，積分領域を $-\infty$ から $+\infty$ までにのばしてよく，

$$\sigma_S\sim\frac{2}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ka\theta}{\theta}\right)^2 d\theta=a\cdot\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 d\theta=2a \tag{3.8}$$

となって，影散乱の全断面積は円筒の断面積に等しくなっている．

また影散乱の前方振幅 $f_S(0)$ を求めると

$$f_S(0)=ia\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\cdot 2\cdot e^{\frac{\pi i}{4}}$$

となるが，

$$\Im(f_S(\theta)/\sqrt{i})=\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\cdot 2a=\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\sigma_S=\sqrt{\frac{k}{8\pi}}\cdot\sigma \tag{3.9}$$

となって，これは全断面積を使った (*2.14*) の右辺に等しい．つまり，前方散乱の振幅 $f(0)=f_I(0)+f_S(0)$ のうち，$f_S(0)$ が $f(0)$ に等しい寄与をするわけである．したがって $\Im(f_I(0)/\sqrt{i})$ は 0 であることが期待される．これは日向からの散乱が前方で 0 であることを意味するものではないことも注意する必要がある．

つぎに日向の散乱 $I$ を計算しよう．この部分は実際の円筒面で計算するより仕方がない．入射波は $e^{ik_0r'}$, $G$ は $\sqrt{\frac{2\pi}{kR}}e^{ikR+\frac{\pi}{4}i}$ である．$r$ が十分遠いとき $R\sim r-\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{r}$, $\nabla' R=\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{R}\sim-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ を使う．$\boldsymbol{r}'$ を極座標で $r',\theta'$ とする．$\theta'$ は $\frac{\pi}{2}$ から $\frac{3\pi}{2}$ までである．そうすると

$$I=-\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-ik\cos(\theta'-\theta)+ik\cos\theta')e^{ika\cos\theta'}e^{ikr+\frac{\pi}{4}i-ika\cos(\theta'-\theta)}\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}a\,d\theta'$$

となる．これを書き直すと

$$I=-\frac{a}{4\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}e^{ikr+\frac{\pi i}{4}}\frac{\partial}{\partial a}\int e^{ik(\cos\theta'-\cos(\theta'-\theta))a}d\theta'$$

となる．この被積分函数も $\cos\theta'-\cos(\theta'-\theta)$ が極値をもつ所でだけ定常な値をもち，少し外れるとはやく振動してしまうので，$ka$ の大きいときの漸近形を

求めることができる.

$$\cos\theta'-\cos(\theta'-\theta)=-2\sin\frac{2\theta'-\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

であるが，これが定常な値をもつのは，$\theta'-\frac{\theta}{2}$ が $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{3\pi}{2}$ の所である．いま $\theta$ を 0 と $\pi$ との間にとると，$\theta'-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}$ がその場所になり，$\theta'-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}+x$ とすると

$$\sin\frac{2\theta'-\theta}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\cdots$$

となる．したがって積分は

$$\int e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)}dx$$

となるが，$ka$ が大きいとき，$x$ が少し大きくなるとはやく振動し，積分がきえるので，積分範囲は $-\infty$ から $+\infty$ までのばしてよい．よって積分は

$$e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ika\sin\frac{\theta}{2}\cdot x^2}dx$$

としてよい．これは簡単に積分できて

$$e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}}\cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{ka\sin\frac{\theta}{2}}}$$

となる．$I$ を求めるとき，これを $a$ について微分するが，このとき指数函数の微分から $k$ が出るので，これに比べて分母にある $a$ を微分したものは省略してよい．こうして

$$I\sim-\sqrt{\frac{a\sin\frac{\theta}{2}}{2}}e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}}\frac{1}{\sqrt{r}}e^{ikr}, \tag{3.10}$$

これから角分布は

$$r|I(\theta)|^2\sim\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2} \tag{3.11}$$

となって，前方で0，後方で最大になるが，特に後方に鋭いということはない．全断面積は

$$\sigma_I=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2a \tag{3.12}$$

となって $\sigma_S=\sigma_I$ である．

全体の波 $\psi=\psi_I+\psi_S+\psi_0$ の漸近形は

$$\psi\sim e^{ikr\cos\theta}+\frac{f(\theta)}{\sqrt{r}}e^{ikr}$$

で，$f(\theta)$ は

$$f(\theta)=-\sqrt{\frac{a\sin\frac{\theta}{2}}{2}}e^{-2ika\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$+ia\sqrt{\frac{k}{2\pi}}e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{1+\cos\theta}{ka\sin\theta}\sin(ka\sin\theta) \tag{3.13}$$

となる.

## §4 球による波の散乱

前節で二次元の問題として取り扱った円筒による波の散乱と全く同様の方法で球による波の散乱を取り扱うことができる.

1) **極座標による分離** 原点に散乱体があって，これに平面波が入射する場合，入射波の進行方向を $z$ 軸として，極座標 $r,\theta,\varphi$ を導入する．散乱体が有限のひろがりを持つときには，その外側では波は Helmholtz の方程式

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$$

を満たす．これを極座標で分離すると，$\varphi$ については $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$ の形，$\theta$ については $P_n{}^m(\cos\theta)$, $r$ については $j_n(kr)$, $y_n(kr)$ が解であることがわかる．ここに $m,n$ は負でない整数，$j$ や $y$ は球 Bessel 函数で

$$\begin{aligned} j_n(z)&=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{n+\frac{1}{2}}(z),\\ y_n(z)&=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}Y_{n+\frac{1}{2}}(z) \end{aligned} \tag{4.1}$$

で定義される．また $h_n^{(1)}=j_n+iy_n$, $h_n^{(2)}=j_n-iy_n$ もよく使われる．$z$ が小さいときと大きいときとの形は

$$\begin{aligned} j_n(z)&\to\frac{z^n}{1\cdot3\cdot\cdots(2n+1)}\\ &\to\frac{1}{z}\cos\left[z-\frac{n+1}{2}\pi\right],\\ y_n(z)&\to-\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{z^{n+1}}\\ &\to\frac{1}{z}\sin\left[z-\frac{n+1}{2}\pi\right]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

$i$ や $y$ は実は初等函数である.

平面波を球面波で展開すれば

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)j_n(kr) \tag{4.3}$$

である. これは両辺に $P_n$ をかけて積分し, $r$ が大きい所で漸近形を比べて正しいことが証明される.

2)　**球による散乱**　散乱体が球対称である場合には, $\psi$ の満たす方程式は極座標で分離されるから

$$\psi=e^{ikr\cos\theta}+\sum(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)A_n h_n^{(1)}(kr) \tag{4.4}$$

の形に展開され, 第二項(これを $\psi_s$ とかく)は外向きの波を表わす. $\psi$ の漸近形は

$$\psi\sim\sum(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)\frac{1}{kr}\left[\cos\left(kr-\frac{n+1}{2}\pi\right)+A_n e^{i\left(kr-\frac{n+1}{2}\pi\right)}\right]$$
$$=\sum(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)\frac{1}{2kr}\left[e^{-i\left(kr-\frac{n+1}{2}\pi\right)}+(1+2A_n)e^{i\left(kr-\frac{n+1}{2}\pi\right)}\right]$$

となる. カッコの中は収束波と発散波との和になっている. もし散乱体による吸収がなければ, 収束波と発散波の振幅の大きさは同じはずであるから $1+2A_n$ の絶対値は1に等しい. これを $e^{+2i\delta_n}$ とかくと

$$A_n=\frac{e^{+2i\delta_n}-1}{2}=ie^{+i\delta_n}\sin\delta_n, \tag{4.5}$$

$\delta_n$ は位相のずれである. このとき散乱波 $\psi_s$ は

$$\psi_s\sim\sum(2n+1)e^{+i\delta_n}\sin\delta_n P_n(\cos\theta)\frac{e^{ikr}}{kr} \tag{4.6}$$

となる. $\psi_s$ を

$$\psi_s\sim\frac{f(\theta)}{r}e^{ikr} \tag{4.7}$$

と書けば, 散乱振幅 $f(\theta)$ は

$$f(\theta)=\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)e^{+i\delta_n}\sin\delta_n P_n(\cos\theta) \tag{4.8}$$

である. $|f(\theta)|^2$ は方向分布を与え, 散乱の微分断面積は

$$\sigma(\theta)2\pi\sin\theta\,d\theta=|f(\theta)|^2 2\pi\sin\theta\,d\theta. \tag{4.9}$$

全断面積は

$$\sigma=\int\sigma(\theta)2\pi\sin\theta\,d\theta=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin^2\delta_n \tag{4.10}$$

となる．前節の対応する関係と比べてみると，全く同様であることがわかる．

(2.14) に対応するものは

$$\Im(f(0))=\frac{k}{4\pi}\sigma \tag{4.11}$$

となる．

3）**剛体球による散乱**　半径 $a$ の剛体球による散乱の場合をまず考える．このとき $\psi$ は $r=a$ で 0 にならなくてはならない．(4.4) から

$$j_n(ka)+A_nh_n^{(1)}(ka)=0 \tag{4.12}$$

であるから，これによって $A_n$ がきまる．

$$h_n^{(1)}=-i|h_n^{(1)}|e^{-i\delta_n} \tag{4.13}$$

とおくと，$j_n=-|h^{(1)}|\sin\delta_n$ であるから，$\delta_n$ はちょうど位相のずれである．$y_n=-|h^{(1)}|\cos\delta_n$ であるから

$$\tan\delta_n=\frac{j_n(ka)}{y_n(ka)} \tag{4.14}$$

と書いてもよい．

波長が長くて，$ka\ll1$ の場合には，$\delta_0\sim-ka,\ \delta_1\sim\frac{-1}{3}(ka)^3,\cdots$ であるから，散乱はほとんど球対称になって

$$\sigma\sim4\pi a^2 \qquad (ka\ll1)$$

となる．これは幾何学的断面積の 4 倍である．

波長が短いときにも，全く前節と同じような計算によって

$$\sigma\sim2\pi a^2 \qquad (ka\gg1)$$

が得られる．このときも影散乱は鋭い前方散乱をし，

$$f_s(\theta)\sim-\frac{ia}{2}\cot\frac{\theta}{2}J_1(ka\sin\theta) \tag{4.15}$$

となる．

## §5　分散公式

一定の振動数 $\omega$ をもつ定常波の散乱を上に取り扱ったが，$\omega=ck$ であるから，$\omega$ がちがうと $k$ がちがう．Fourier 変換で明らかなように，時間的に変動する波はいろいろの振動数 $\omega$ のものを重ね合わせてつくることができる．した

がってすべての $k$ にたいする解がわかれば，時間的に変動するときも，原理的には解かれることになる．一定の $k$ のときの解は，位相のずれ $\delta$ が $k$ の函数として求まれば決定される．

ところで，$k$ の函数としての $\delta$ には，ある内部的関係があることが示される．つまり，$\delta(k)$ は，$k$ 以外の $\delta(k')$ と全然無関係ではあり得ない．これを球対称ポテンシアルによる散乱の場合の $\delta$ についてしらべてみよう．同じ結果は屈折率をもつ球による散乱にも適用される．

原点を中心とする球対称ポテンシアルがあるときの Schrödinger 波動方程式は

$$\nabla^2\psi+k^2\psi-U(r)\psi=0 \tag{5.1}$$

と書かれる．ここに $U$ はポテンシアルに $\frac{2m}{\hbar^2}$ をかけたものである．Helmholtz の方程式の Green 函数 $e^{ikR}/R$ を使って，入射波 $e^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}$ ($\boldsymbol{k}_0$ は極座標の $z$ 軸の方向) と散乱波とある場合の解を書くと，

$$\psi(\boldsymbol{r})=e^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}U(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)d\tau_1. \tag{5.2}$$

これは $\psi$ をきめる積分方程式で，これを解くと自然に境界条件を満たす解が得られる．

(5.2) の散乱波の $|\boldsymbol{r}|$ が大きいときの漸近形を求めると

$$f(\theta,k)\frac{e^{ikr}}{r}=-\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r}_1}U(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)d\tau_1\cdot\frac{e^{ikr}}{r} \tag{5.3}$$

となる．$f(\theta,k)$ は散乱振幅である．ここに $\theta$ は $\boldsymbol{r}$ と $z$ 軸との間の角で，$\boldsymbol{r}$ の方向の大きさ $k$ のベクトルを $\boldsymbol{k}_s$ と書いた．

$f$ を求めるには，$\psi$ を知らなくてはならないから，これはまだ何の解決にもなっていない．しかし散乱ポテンシアルが強くないときには，逐次代入法で $\psi$ をといて，これを $f$ の右辺に入れると

$$f(\theta,k)=\sum f_n(\theta,k),$$

ここに

$$f_n(\theta,k)=\left(\frac{-1}{4\pi}\right)^n\int d\tau_1\cdots d\tau_n\times \tag{5.4}$$

$$\frac{U(\boldsymbol{r}_1)U(\boldsymbol{r}_2)\cdots U(\boldsymbol{r}_n)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|\cdots|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|}e^{-i\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r}_1+ik|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|+\cdots+ik|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|+i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}_n}$$

となる．$U$ が小さいとき，$f \sim f_1$ で近似するのを Born 近似という．ここでは上の展開の収束性は一まずおいて，この形から定性的な結論を導くことにする．

$f_n$ のうち，$k$ に依存するのは指数函数の項だけである．前方散乱の場合，$\boldsymbol{k}_s = \boldsymbol{k}_0$ であるから，指数は

$$i\boldsymbol{k}_0\cdot(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_1)+ik|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|+ik|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3|+\cdots+ik|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|$$

となる．しかるに $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ を頂点とする多角形の $n-1$ 辺の和 $|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|+\cdots+|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|$ は，残りの一辺 $|\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_1|$ より大きい．したがって $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ がどこにあっても，上の式は

$$ik\times(\text{正の数})$$

という形をしている．したがってその指数函数は複素数 $k$ の函数としてみたとき上半面 $(\Im(k)>0)$ で有界な函数である．この性質だけを使って有用な結果が導かれる．$f_n$ はもちろんその上に $\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{r}_n$ についての積分があるから，その積分が一様に収束し，和 (5.4) も一様に収束すると仮定しなくてはならない．

さて，$f(z)$ が $z$ の上半面で正則な一価函数であって，実軸に平行な上半面の直線にそって $|f(z)|^2$ の積分が有界であるときには，Cauchy の積分表示が使われて，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}dx$$

が，上半面の点 $z$ にたいして成り立つ．$z$ を実軸上に近づけると

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}dx$$

になる．ここに $P$ は Cauchy の主値を表わす．この積分を実部と虚部に分けると，$f(x)=f_r(x)+if_i(x)$ として

$$\begin{aligned} f_r(z)&=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_i(x)}{x-z}dx, \\ f_i(z)&=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_r(x)}{x-z}dx. \end{aligned} \tag{5.5}$$

これを Hilbert の関係という．

この関係を $f(0,k)$ に適用する．そのためには $k<0$ の実数にたいして $f(0,k)$ を定義しなければならない．これは当然上半面を通って解析接続したものにとる必要がある．再び $f(0,k)$ の式 (5.4) にかえってみれば，

$$f(0,-k)=f(0,k)^* \tag{5.6}$$

であることがわかる．そうすれば

$$\left.\begin{aligned} f_r(z)&=\frac{2}{\pi}P\int_0^\infty\frac{xf_i(x)}{x^2-z^2}dx,\\ f_i(z)&=-\frac{2z}{\pi}P\int_0^\infty\frac{f_r(x)}{x^2-z^2}dx,\end{aligned}\right\}\quad z>0. \tag{5.7}$$

$n>1$ のとき，$k$ が大きくなると $f_n(0,k)$ は小さくなることが期待される．これに反して

$$f_1(0,0)=-\frac{1}{4\pi}\int U(\boldsymbol{r}_1)d\tau_1=f_1(0,k)$$

は実数の定数である．それで $f(0,k)-f_1(0,k)$ を $f(z)$ とみれば，上の式が適用されるであろう．したがって

$$\Re(f(0,k))=\frac{2}{\pi}P\int_0^\infty\frac{k'\Im(f(0,k'))}{k'^2-k^2}dk'+f_1(0,0). \tag{5.8}$$

(4.8) によって

$$f(0,k)=\frac{1}{k}\sum(2n+1)e^{i\delta_n}\sin\delta_n,$$

$$\Im(f(0,k))=\frac{k\sigma(k)}{4\pi}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\Re(f(0,k))&=\frac{1}{k}\sum_{n=0}^\infty(2n+1)\sin\delta_n(k)\cos\delta_n(k)\\ &=\frac{1}{2\pi^2}P\int_0^\infty\frac{k'^2\sigma(k')}{k'^2-k^2}dk'+f_1(0,0)\end{aligned} \tag{5.9}$$

が得られる．これはいろいろの $k$ の値における全断面積 $\sigma(k')$ を，一つのエネルギーの前方散乱と結びつけるものであって，右辺の積分の形が分散性媒質の屈折率と振動数の関係に似ているので分散公式と呼ばれる．

この式は $f(0,k)-f_1(0,0)$ が二乗積分可能という仮定をして出した式である．したがって剛体球の場合のように，$\sigma(k)$ が大きい $k$ にたいして一定値 $2\pi a^2$ に近づくような場合には適用されない．

こういう場合にも，もし $\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k^2}$ が $k=0$ でも有界で，この函数が上の条件を満たしていれば

$$\Re(f(0,k)) = \frac{2k^2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\Im(f(0,k'))}{k'(k'^2-k^2)} dk' + f(0,0) \tag{5.10}$$

となって，役に立つ式が得られる．$k=0$ が問題になれば，そこをさけて $k^2$ の代りに $(k+\alpha)^2$ をとればよい．ここに $\alpha$ の虚部を正にとっておけば，$(k+\alpha)^{-2}$ は上半面で正則になる．

$f(0,k)$ はいろいろの部分波の和であるから，(5.9) だけでは部分波の $\delta_n$ をきめるわけにはいかない．そのためにはなお多くの関係が必要となる．そのために，たとえば負の $z$ 軸上，原点から $r_0$ のところに球面波の源を考え，

$$\psi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{r_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|-ikr_0}$$

を入射波として，そのときの散乱波を考える．これを平面波の代りに使えば，(5.4) で指数函数の部分は

$$-i\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r}_1 + ik|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2| + \cdots + ik|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n| + ik|\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_0| - ikr_0$$

となる．前方散乱では $\boldsymbol{k}_s=\boldsymbol{k}_0$ で $+z$ 方向にむいている．$kr_0 = -\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}_0$ であるから，

$$i\boldsymbol{k}_0\cdot(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1) + ik\{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2| + \cdots + |\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n| + |\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_0|\}$$

となり，括弧は $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}_1$ にいたる線分の和であるから $|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1|$ より大きい．したがって平面波の場合と同じことになる．

$\boldsymbol{r}$ が十分大きいとき，Green 函数の公式

$$\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = ik\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\cdot$$

$$P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta_0)j_n(kr)h_n(kr_0), \qquad r_0>r$$

を使って球面波に展開する．$h^{(1)}$ の代りに $h$ とかいた．いまの場合 $\boldsymbol{r}_0$ は $z$ 軸上にあるから $P_n{}^m(\cos\theta_0)$ は $m=0$ でないと 0 になる．したがって

$$\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = ik\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\theta)j_n(kr)h_n(kr_0). \tag{5.11}$$

全体の波は

$$ik\sum(2n+1)P_n(\cos\theta)h_n(kr_0)r_0e^{-ikr_0}(j_n(kr)+ie^{i\delta_n}\sin^{\prime\prime}\delta_nh_n(kr))$$

となるはずである．したがっていまの場合，前方散乱の振幅 $f'(0,k)$ は

$$f'(0,k) = ik\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)h_n(kr_0)r_0e^{-ikr_0}\cdot ie^{i\delta_n}\sin\delta_n\cdot\frac{i^{-n}}{ik}$$

$$=\frac{1}{2ik}\sum(2n+1)[e^{2i\delta_n}-1]\cdot q_n(kr_0) \tag{5.12}$$

となる．ここに

$$q_n(kr_0)=kr_0\cdot h_n(kr_0)\cdot i^{-n+1}e^{-ikr_0}=\sum_{m=0}^{n}\frac{i^m(n+m)!}{m!\,(n-m)!}\frac{1}{(2kr_0)^m} \tag{5.13}$$

である．$f'$ は $r_0$ の函数であるが，$r_0$ は任意であるから，$f'(0,k)$ にたいする分散式から $r_0$ の等しいベキを比べて多くの関係が得られる．$1/r_0{}^m$ の項をひろい出すと

$$f_m(k)=\frac{1}{2ik^{2m+1}}\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\frac{(n+m)!}{(n-m)!}[e^{2i\delta_n}-1]. \tag{5.14}$$

ここに $k^{2m+1}$ としたのは，収束をよくするためで，$k$ が小さいとき $\delta_m\infty k^{2n+1}$ であることを使った．

$f_m$ にたいする分散公式がわかれば，逆にといて，$e^{2i\delta_n}-1$ にたいする分散公式が導かれる．$\Re(e^{2i\delta_n}-1)=-2\sin^2\delta_n$ は断面積 $\sigma_m$ に関係する．$\delta_n$ になまに関係するのは $\Im(e^{2i\delta_n})$ である．それで $\Re(e^{2i\delta_n})$ を $\sigma_m$ で表わすには (5.14) を逆に解かねばならない．それには逆マトリックスを求めればよい．すなわち

$$\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^{m-n}k^{2m+1}}{(m-n)!\,(m+n+1)!}f_m(k)$$
$$=\frac{1}{2i}\sum_{n'=n}^{\infty}\sum_{m=n}^{n'}\frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!\,(n+m+1)!}\frac{(n'+m)!}{(n'-m)!}(2n'+1)[e^{2i\delta_{n'}}-1]$$
$$=\frac{e^{2i\delta_n}-1}{2i}$$

で求められる．ここに

$$\sum_{m=n}^{n'}\frac{(-1)^{m-n}(n'+m)!}{(m-n)!\,(m+n+1)!\,(n'-m)!}=\frac{1}{2n'+1},\qquad n'=n,$$
$$=0,\qquad n'>n$$

を用いた．この関係を求めるには，

$$1=(1+x)^{-n'-n-1}(1+x)^{n'+n+1}$$

とし，各項を級数展開して $x^{n'-n}$ の係数を求めればよい．この係数は

$$\sum_{m=0}^{n'-n}\frac{(-n'-n-1)(-n'-n-2)\cdots(-n'-n-m)}{m!}\frac{(n'+n+1)!}{(n'-n-m)!\,(2n+m+1)!}$$
$$=(n'+n+1)\sum_{m=0}^{n'-n}\frac{(-1)^m(n'+n+m)!}{m!\,(n'-n-m)!\,(2n+m+1)!}$$

で，これは $n'-n=0$ のとき 1，$n'-n>0$ のとき 0 に等しい．これから前にのべた関係はすぐ得られる．したがって分散公式は

$$\Im(e^{2i\delta_n})=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^{m-n}k^{2m+1}}{(m-n)!\,(m+n+1)!}$$

$$\times\left[\frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\sum_{n'=m}^{\infty}(2n'+1)\frac{(n'+m)!}{(n'-m)!}\Re(1-e^{2i\delta_{n'}(k')})}{k'^2-k^2}dk'+C_m\right], \qquad (5.15)$$

$$C_m=\frac{1}{2}\left[\frac{d^m}{dk^m}\Im(e^{2i\delta_m})\right]_{k=0}$$

となる．$\Re(1-e^{2i\delta_n})$ は断面積をきめる量であるから，これが求めるものである．

分散公式は実験の整理や，いくつかの実験結果の間の関連性その他いろいろに利用される．後にのべるように分散公式はかなり一般的に成り立つことが予想されるので，解析的な計算によらず，理論の適用性なども考察できるので便利である．

上にのべた分散公式の導き方は，特殊な例に依存している．その場合にも多くの仮定があった．ポテンシアルを含む多重積分の存在，級数の一様収束，などである．ポテンシアルが無限に大きい剛体球の場合にはこの条件は満たされていない．それでそのまま適用することはできない．またポテンシアルは積分可能であっても，級数が一様収束しなければ，級数の各項の性質が和の函数に反映しないから，分散公式の証明にはならない．このようなことはたとえば上半面に $f(0,k)$ の極がある場合に起る．ポテンシアルが引力で，そのために有限の空間的ひろがりをもつ束縛状態があるときには，上半面の虚軸上に極があることが示される．$f(\theta,k)$ を球函数で展開すると，$e^{2i\delta_n}$ を $S_n(k)$ とかくとき，波動函数 $\psi$ の漸近形の，$n$ 次の球函数の部分が

$$A\left[(-1)^{n+1}\frac{e^{-ikr}}{2ikr}+S_n(k)\frac{e^{ikr}}{2ikr}\right](2n+1)P_n(\cos\theta) \qquad (5.16)$$

であることはまえにのべた．$A$ は入射平面波の振幅を表わす．そこでもしこの解を解析接続したとき，$k$ の上半面の虚軸上に $S_n(k)$ の極があれば，その $k$ にたいして散乱波の振幅は大きくなる．そこで $k$ をその値にとったとき $AS_n(k)$ が有限になるようにすると，入射波の部分はきえて $\dfrac{1}{r}e^{ikr}$ の項だけが残る．$k=i\kappa$ ($\kappa>0$) とすると，これは $\dfrac{1}{r}e^{-\kappa r}$ であるから，$r$ が大きくなると急に減

少する．したがってこのような波は有限のひろがりをもっている．また量子力学では $\frac{\hbar^2}{2m}k^2=E$ とすると，$E$ が全エネルギーである．そこでこの場合 $E=-\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2<0$ となって，負のエネルギーをもった束縛状態があることがわかる．

次に級数の収束性を考えよう．エネルギーが0のとき，$k=0$ とおくと

$$f(0,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{4\pi}\right)^n\int\frac{U(\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\cdot\frac{U(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3|}\cdots\frac{U(\boldsymbol{r}_{n-1})}{|\boldsymbol{r}_{n-1}-\boldsymbol{r}_n|}U(\boldsymbol{r}_n)d\tau_1\cdots d\tau_n$$

で，$k\neq0$ のときにはこの外に $e^{ik\cdots}$ の形の項がかかるから，級数の各項の絶対値はこれより大きくはならない．この積分はやっかいであるが，はじめの方程式にもどって，$k\to0$ の極限を考えれば容易に求められる．$f(0,0)$ は

$$f(0,0)=\lim_{k\to0}\sum\frac{1}{2ik}[e^{2i\delta_n(k)}-1]\cdot(2n+1)$$

であるが，$\delta_n(k)\sim(ka)^{2n+1}$ であるから，$\delta_0(k)$ だけを考えればよい．したがって

$$f(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\delta_0(k).$$

たとえば $U(r)$ が $r<a$ で一定で $-U_0$, $r>a$ で $U(r)=0$ のとき，$\delta_0$ は微分方程式を球対称の場合にとき，$r=a$ で外部の波 $e^{ikr+2i\delta_0}-e^{-ikr}$ とつないですぐに求まり

$$\tan(ka+\delta_0)=\frac{k}{\sqrt{k^2+U_0}}\tan(a\sqrt{k^2+U_0}),$$

これから

$$\frac{\delta_0(k)}{k}\sim-a+\frac{1}{\sqrt{U_0}}\tan(a\sqrt{U_0})$$

となる．これを $U_0$ について展開すれば

$$f(0,0)=a\left[\frac{1}{3}(a^2U_0)^2+\frac{2}{15}(a^2U_0)^2+\frac{17}{315}(a^2U_0)^3+\cdots\right],$$

これが前にのべた多重積分を計算したものに一致するはずである．この級数は $a^2U_0=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$ で収束しない．$0<U_0<\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$ なら収束することがわかる．このとき $f(0,k)$ も実軸上で収束する．

ところで $U_0=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$ はちょうど球対称の束縛状態の存在する条件である．それをみるには，$r>0$ で $e^{-kr}$, $r=0$ で有界な解があるための条件を求めると

$$-k=\sqrt{U_0-k^2}\cot(a\sqrt{U_0-k^2})$$

で，エネルギー 0 $(k=0)$ の束縛状態は $\cot a\sqrt{U_0}=0$，すなわち $a\sqrt{U_0}=\frac{\pi}{2}$ で存在する．

たとえ束縛状態が存在しても，$f(0,k)$ が $k$ の函数として正則であることはありうる．それで，極を除いて上半面に $f$ が解析接続できて，十分大きい半円上でその積分が 0 になる場合には，Hilbert 変換に少しの修正を加えればよく，分散公式に似たものが成り立つであろう．少しの修正とは，極から来る留数を加えておくことである．

## §6　因果律と分散公式

前方の散乱振幅 $f(0,k)$ が $k$ の複素平面の上半面で極を除いて正則ということは，因果律と深い関係がある．たとえば，平面波が入射したとき，波 $\psi$ は $r$ が大きいとき

$$\psi\sim e^{+ikz}+\frac{f(\theta,k)}{r}e^{ikr} \tag{6.1}$$

の形をしている．そこでよけいな複雑さをさけるために速度 $c$ で伝わる波（光や音波）を考え，$c$ は振動数によらないと仮定する．したがって $\psi$ を時間的に $e^{-i\omega t}$ に比例するとすれば，$k=\frac{\omega}{c}$ である．そこで時間を入れてかけば

$$\psi\sim e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}+\frac{f(\theta,\omega)}{r}e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \tag{6.2}$$

と書ける．入射波が遠くから来て，そのまま来ると原点 $z=0$ にちょうど $t=0$ に到着するような波とする．$z=0$ でみていると $t<0$ で入射波は 0 で，$t>0$ になってはじめて値をもつ．このような函数を Fourier 分解すると，Fourier 変換は特殊な性質をもつ．$F(t)$ が $t<0$ で 0 とすると，その Fourier 変換は

$$F_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}F(t)e^{i\omega t}dt$$

であるから，$F_1(\omega)$ は $\omega$ の上半面で正則になる（$F(t)$ が実軸上で絶対積分可能として）．またこの逆変換

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

から，$F_1$ がそのような性質をもてば，$t<0$ で $F(t)=0$ であることも容易にわかる．$F(t)$ を実数にするには

$$F(-\omega)=F(\omega)^*\qquad(\omega\ \text{実数}) \tag{6.3}$$

としておけばよい.

さて, (6.1) から, $z=0$ で入射波が $t<0$ のとき 0 になるような波束をつくるには, 上の $F_1(\omega)$ と同じ性質をもつ $A(\omega)$ をかけて積分すればよい. そうすると波は

$$\psi=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}d\omega+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\theta,\omega)}{r}A(\omega)\cdot e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\omega$$

となる. 散乱波の Fourier 成分は

$$f(\theta,\omega)A(\omega)$$

である. このとき $f(\theta,\omega)$ が $\omega$ の上半面で正則であれば, 散乱波は $t-\dfrac{r}{c}<0$ でやはり 0 になる. この場合に正則というのは, 普通の函数論のとちがって, $\omega$ の上半面で解析的であって, その絶対値が有界ということである. (この条件は少しきびしすぎるが, $f$ が上半面で極をもったり, 無限遠で有限の極になったりする場合に拡張することはできる.)

$\theta=0$ の前方散乱のとき, $f(0,\omega)$ が正則であることはまえにのべた. したがってこの場合

入射波が $t-\dfrac{z}{c}<0$ で 0 なら散乱波は $t-\dfrac{r}{c}<0$ で 0

ということができる. これは因果律に外ならない. すなわち, 入射波が散乱体に達して前方に散乱されるまでに, 速度 $c$ 以上の速さでは行けないから, $t<\dfrac{r}{c}$ では散乱波がないわけである.

球面波 (5.16) についても同様のことがいわれるであろうか. たとえば, 散乱体が $r<a$ の範囲にしかなければ, 半径 $r$ の球面から入った波は, 少くとも $t>\dfrac{2(r-a)}{c}$ だけ時間がたった後でなければもどってこないであろう. (5.16) の [ ] に比例する項だけを取り出し, $A(\omega)e^{-i\omega t}$ をかけてみると

$$\int(-1)^{n+1}A(\omega)e^{-i\omega\left(t+\frac{r}{c}\right)}d\omega+\int A(\omega)S_n(k)e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\omega$$

となるが, 第一項は $t=-\dfrac{r}{c}$ に $r$ から入ってくる収束波を表わしているから, $t>\dfrac{r}{c}+\dfrac{2a}{c}$ ではじめて散乱波が値をもつようになるはずである. このことから

$$S_n'(k)=S_n(k)\cdot e^{2i\frac{a}{c}\omega}=S_n(k)e^{2iak} \tag{6.4}$$

が $k$ の上半面で正則ということが因果律に対応する.

球対称の散乱体の場合，ある $n$ をもった入射波は同じ $n$ の散乱波になって $n$ のちがった波がまざり合うことはないから，このときをまず考えてみよう．

散乱体が吸収をしなければ，入射波と散乱波の振幅は等しいはずであるから $|S_n(k)|^2=1$. あるいは $n$ を省いて

$$S'(k)S'(k)^*=1 \tag{6.5}$$

である．また $k>0$ であるがこれを $k<0$ にも拡張して

$$S'(-k)=S'(k)^* \tag{6.6}$$

と約束することにする．これは (6.3) に対応する．また今の場合，$\omega=ck$ であって，$k$ と $\omega$ とを区別する必要はないから，$k$ の代りに $\omega$ とかくことに約束する．

$S'(\omega)$ は $\Im(\omega)\geqq 0$ で定義されているが，$\omega$ が下半面にあるとき

$$S'(\omega)=1/S'(\omega^*)^* \tag{6.7}$$

で延長することができる．実軸上では $S'(\omega)S'(\omega)^*=1$ であるから Schwarz の定理で解析接続になっている．

上半面で $S'(\omega)$ が $\omega_\nu=\omega_{\nu r}+i\omega_{\nu i}$ に零点をもつとしよう．下半面では $\omega_\nu^*$ に極をもつ．(6.6) により零点は虚軸について対称であるから，$-\omega_\nu^*$ は零点になる．また虚軸上にも零点 $i\kappa_\mu$ ($\kappa_\mu>0$) がある．上半面に極がなければ

$$\prod_\nu \frac{(\omega-\omega_\nu)(\omega+\omega_\nu)^*}{(\omega-\omega_\nu^*)(\omega+\omega_\nu)}\cdot\prod_\mu\frac{\omega-i\kappa_\mu}{\omega+i\kappa_\mu}$$

をつくると，これは $S'$ と同じ零点と極とをもつ．したがって $S'(\omega)$ をこの積でわれば，全平面で有限の所に零点も極も持たない函数になる．このことから

$$S'(\omega)=\pm e^{2i\alpha\omega}\prod_\nu \frac{(\omega-\omega_\nu)(\omega+\omega_\nu)^*}{(\omega-\omega_\nu^*)(\omega+\omega_\nu)}\prod_\mu\frac{\omega-i\kappa_\mu}{\omega+i\kappa_\mu} \tag{6.8}$$

になることが示される(1)．$\alpha\geqq 0$ である．$S(\omega)$ もこれと同じで，ただ $\alpha\geqq -a$ になる．

束縛状態があるときには，$S$ が上半面に極をもつ．このときにも適当な処理法がある．

(6.8) の応用として，たとえば，零点 $\omega_0=\omega_{0r}+i\omega_{0i}$ だけが実軸の近くにあり，実数の $\omega$ が $\omega_0$ の近くにあるときに，

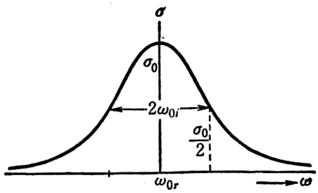
(1) N. G. van Kampen: Phys. Rev., 89 (1953), 1072; 91 (1953), 1267.

$$S(\omega) \sim e^{2i\alpha\omega}\frac{\omega-\omega_0}{\omega-\omega_0{}^*}$$

と近似しよう．散乱体の大きさを表わす$\alpha$が$\alpha\omega \ll 1$であれば，指数函数の項も1とおいてよい．このとき断面積は

$$\sigma_n = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)|1-S_n(k)|^2$$

で，計算すると



第 6.1 図　共鳴曲線

$$\sigma_n = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{(\omega_{0i})^2}{(\omega-\omega_{0r})^2+(\omega_{0i})^2} \tag{6.9}$$

となる．これは共鳴散乱の式といわれている．

問題〕　二つの共鳴 $\omega_1, \omega_2$ があるとき，断面積が $\omega$ の函数としてどう変わるかを調べよ．

## §7　ミクロ因果律と分散公式

前節で因果律と分散公式との間には深い関係があることを知ったが，その場合の因果律は散乱体があっても，その性質にくわしく立ち入らないで，結果として散乱体に波束が到達する前に散乱が起ることはないというマクロの因果律であった．

光が原子によって散乱される場合を考えてみよう．原子は電子の集りと考えることができる．入射する光によって電子が動かされる．電子が運動をかえると，そこから電磁波が出て，他の電子に伝えられたり，外に光として出て来たりする．しかし作用が光の速さ以上の速さで伝わることがないことを知っている．任意の点から出た影響が光よりも速く伝わることはないという事柄をミクロ因果律という．ミクロ因果律は相対論の要求にもかなっているし，電子と光とに限らず，中間子でも核子でも成り立つと考えられているので，ミクロ因果律から分散公式を導くことを考えてみよう．

1)　**伝播函数**　そのためには一点から出た影響が伝わる様子を表わすことが最初の問題となる．影響の伝達を表わす量を伝播函数（propagator）という．これは Green 函数といってもよいが，相互作用のある時は，も少し一般性をもっている．まず相互作用のない（自由場の）スカラー場 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ を考える．簡単のため光と同じ波動方程式

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{7.1}$$

を満たすとする．端のない空間にたいする自由場の遅延 Green 函数 $G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)$ を

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G_0=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\delta(t-t_0)$$
$$G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)=0 \qquad t<t_0 \tag{7.2}$$

で定義すると，A§4.3 で示されたように

$$G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)=\frac{c}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}\frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega}\doteqdot\frac{c}{4\pi}\frac{\delta(cT-R)}{R}, \qquad T>0,$$
$$=0, \qquad T<0, \tag{7.3}$$

ここに $T=t-t_0$, $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$, $\omega=c|\boldsymbol{k}|=ck$ を表わす．$G$ は $cT=R$ の点以外では 0 で，これは影響が光の速さで伝わることを示している．また (7.3) から

$$\frac{1}{c}\frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{T=0}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{7.4}$$

が成り立つ．A§4.1 で示されたように，$t_0$ における $\phi$ と $\frac{\partial\phi}{\partial t_0}=\dot{\phi}$ が与えられたときに，$t>t_0$ における $\phi$ の値は

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c^2}\int d\boldsymbol{r}_0\left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r}_0,t_0)}{\partial t_0}G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)+\phi(\boldsymbol{r}_0,t_0)\frac{\partial G_0}{\partial t_0}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\right) \tag{7.5}$$

となる．以下式を簡単にするために $c=1$ にとろう．これは $ct$ の代りに $t$ と書くことに相当する．

2) **Poisson 括弧** 次に伝播函数を Poisson 括弧を使って書き表わすことを考えてみる．古典力学でよく知られているように，正準変数の組を $(q_s,p_s)$ とすると，二つの量 $F,G$ の Poisson 括弧 $(F,G)$ は

$$(F,G)=\sum_s\frac{\partial(F,G)}{\partial(q_s,p_s)} \tag{7.6}$$

で定義され，別の正準変数 $(q_s',p_s')$ を使っても同じ形に書くことができる．つまり Poisson 括弧は正準変数のとり方に関係しない．

場の量 $\phi$ の Poisson 括弧を計算するためには正準変数を導入しなくてはな

らない．場の方程式 (7.1) は変分

$$\delta\int L dt=\delta\iint\frac{1}{2}\left\{-(\nabla\phi)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right\}dr\,dt=0 \tag{7.7}$$

から導かれる．$\phi$ に共役な運動量 $\pi$ は

$$\pi=\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}}=\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (7.8)^{(1)}$$

であり，ハミルトニアンは

$$H=\int\pi\dot{\phi}\,dr-L=\frac{1}{2}\int\{(\nabla\phi)^2+\pi^2\}dr \tag{7.9}$$

となる．

$\phi,\pi$ を Fourier 積分で表わして

$$\begin{aligned}\phi&=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int d\boldsymbol{k}\left(q_k\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{p_k}{\omega}\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right),\\ \pi&=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int d\boldsymbol{k}(p_k\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega q_k\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{7.10}$$

とおいて，$(q_k,p_k)$ を定義する．この式の中で $\omega$ は $\boldsymbol{k}$ の大きさである．この式のように $q_k,p_k$ をきめると，これがちょうど正準共役な組になっていることを示そう．(7.10) を (7.9) に入れると

$$(2\pi)^{-3}\int\cos\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\cdot\cos\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\{\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')+\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\},$$

$$(2\pi)^{-3}\int\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\{\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')-\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\},$$

$$\int\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\cos\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}=0$$

に注意して

$$H=\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{k}\{p_k{}^2+\omega^2q_k{}^2\} \tag{7.11}$$

を得る．$q_k,p_k$ を共役な正準変数とすると，これは振動数 $\omega$ の調和振動子の集りとなり

$$\begin{aligned}\frac{dp_k}{dt}&=-\omega^2q_k,\\ \frac{dq_k}{dt}&=p_k\end{aligned} \tag{7.12}$$

(1) $\dfrac{\delta}{\delta\phi}$ は汎函数微分であり $F=\int f(\phi)d\boldsymbol{r}$ にたいして $\dfrac{\delta F}{\delta\phi(\boldsymbol{r})}=\dfrac{\partial f(\phi(\boldsymbol{r}))}{\partial\phi(\boldsymbol{r})}$ である．

が運動方程式になる．従って (7.10) から $\dfrac{d\phi}{dt}=\pi,\ \dfrac{d\pi}{dt}=\nabla^2\phi$ となって波動方程式 (7.1) が得られる．

時刻 $t_0$ の正準変数を $q_k{}^0, p_k{}^0$ とすると，時刻 $t$ には

$$\begin{aligned} q_k &= q_k{}^0\cos\omega(t-t_0)+\frac{p_k{}^0}{\omega}\sin\omega(t-t_0), \\ p_k &= p_k{}^0\cos\omega(t-t_0)-\omega q_k{}^0\sin\omega(t-t_0) \end{aligned} \tag{7.13}$$

となる．従って

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int d\boldsymbol{k}\left\{q_k{}^0\cos(\omega(t-t_0)+\boldsymbol{kr})+\frac{p_k{}^0}{\omega}\sin(\omega(t-t_0)+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right\}. \tag{7.14}$$

そこで Poisson 括弧を求めてみよう．

$$\begin{aligned} (\phi(\boldsymbol{r}_0,t_0),\phi(\boldsymbol{r},t)) &= \int d\boldsymbol{k}\frac{\delta(\phi(\boldsymbol{r}_0,t_0),\phi(\boldsymbol{r},t))}{\delta(q_k{}^0,p_k{}^0)} \\ &= (2\pi)^{-3}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{\omega}\sin\{\omega(t-t_0)+\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\}, \end{aligned}$$

この右辺は (7.3) と同じであるから

$$(\phi(\boldsymbol{r}_0,t_0),\phi(\boldsymbol{r},t))=G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\qquad t\geqq t_0 \tag{7.15}$$

が得られる．これが我々の求める結果であって，$(\boldsymbol{r}_0,t_0)$ から $(\boldsymbol{r},t)$ への伝播函数は，二点の $\phi$ の Poisson 括弧に等しい．量子力学に移ると Poisson 括弧は交換子に対応する．

問題〕　　$(\phi(\boldsymbol{r}_0,t_0),\pi(\boldsymbol{r},t_0))=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$
を証明せよ．

3)　**ミクロ因果律**[1]　$\phi$ で記述される波が散乱体にあたる場合にもどることにしよう．散乱体の中で，$\phi$ は散乱体の中の粒子や場と相互作用をするが，どんなに相互作用をしても，個々の相互作用の影響が光速以上の速さで伝わることがなければ，いつも $\phi(\boldsymbol{r}_0,t_0)$ と $\phi(\boldsymbol{r},t)$ との Poisson 括弧は $|t-t_0|<|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$ の所では 0 になるであろう．量子論の言葉でいえば互に空間的である二点（$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|>c|t-t_0|$ を意味する）における場の量は同時に測定できる，あるいは交換可能である．

$$(\phi(\boldsymbol{r}_0,t_0),\phi(\boldsymbol{r},t))=G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\qquad(t\geqq t_0) \tag{7.16}$$

---

(1)　M. Gell-Mann, M. L. Goldberger and W. E. Thirring: Phys. Rev., 95 (1954), 1 に量子論の場合が取り扱ってある．

をやはり伝播函数ということにすると

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) = 0 \qquad |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| > t-t_0 > 0 \tag{7.17}$$

がミクロ因果律である.

4)　**ミクロ因果律と分散公式**　相互作用があって散乱がおこるときには, (7.14) のように Fourier 積分に展開するわけにはいかないが, $e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ の代りに波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の入射波があったとき, 入射波と外向きに出て行く波という境界条件を満たす

$$U_k(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$$

を使うことにする. そうすれば

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = (2\pi)^{-3/2}\int d\boldsymbol{k}\left\{\frac{q_k{}^0}{2}[U_k(\boldsymbol{r})e^{-i\omega(t-t_0)} + U_k(\boldsymbol{r})^* e^{i\omega(t-t_0)}]\right.$$
$$\left. + \frac{p_k{}^0}{2\omega i}[U_k(\boldsymbol{r})e^{-i\omega(t-t_0)} - U_k(\boldsymbol{r})^* e^{i\omega(t-t_0)}]\right\}. \tag{7.18}$$

従って

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) = (2\pi)^{-3}\int \frac{d\boldsymbol{k}}{2i\omega}\{U_k(\boldsymbol{r}_0)U_k(\boldsymbol{r})^* e^{-i\omega(t-t_0)} - U_k(\boldsymbol{r})U_k(\boldsymbol{r}_0)^* e^{i\omega(t-t_0)}\}. \tag{7.19}$$

相互作用のある領域が半径 $a$ くらいの部分に限られているとすると, その外側では $U_k$ は自由場の重ね合わせとして書かれる. 位相のずれ $\delta_l$ を導入すれば

$$U_k(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)i^l}{2}[h_l(kr) + h_l{}^*(kr)]P_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r})$$
$$+ \sum \frac{(2l+1)i^l}{2}[e^{2i\delta_l}-1]h_l(kr)P_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}), \tag{7.20}$$

ここに $h_l(x) = (\pi/2x)^{1/2}H^{(1)}_{l+1/2}(x)$ は球面 Hankel 函数であり, $P_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}$ との間の角の余弦の Legendre 函数である. $U_k$ を (7.19) に代入すると, (7.20) の右辺の第一行は $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ であるから, この部分だけからちょうど $G_0(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0)$ が出る. 次に $\boldsymbol{k}$ の方向について積分すると, $P_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r})P_{l'}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_0)$ の積分は明らかに $l \neq l'$ のときに 0 になり, $l = l'$ のときには, たとえば $P_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_0)$ を $\boldsymbol{r}$ を軸とする極座標の球函数で展開して (加法定理 §14 (e)) から積分すれば $\dfrac{4\pi}{2l+1}P_l(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ になる. 従って

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) = G_0(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}_0, t_0) + (2\pi)^{-3}\int^{\infty}\frac{k^2 dk}{2i\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\left(\frac{2l+1}{2}\right)^2$$
$$\times P_l(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\{[(h_l(kr_0) + h_l{}^*(kr_0))(e^{-2i\delta_l}-1)h_l{}^*(kr)$$

$$+(h_l(kr)+h_l^*(kr))(e^{2i\delta_l}-1)h_l(kr_0)$$
$$+(e^{2i\delta_l}-1)(e^{-2i\delta_l}-1)h_l(kr_0)h_l^*(kr)]e^{-i\omega T}-\text{共役複素}\}$$
$$=G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)+(2\pi)^{-3}\int_0^\infty \pi\frac{k^2dk}{2i\omega}\sum_{l=0}^\infty(2l+1)P_l(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$$
$$\times\{(e^{2i\delta_l}-1)h_l(kr)h_l(kr_0)+(e^{-2i\delta_l}-1)h_l^*(kr)h_l^*(kr_0)\}$$
$$\times(e^{-i\omega T}-e^{i\omega T}), \tag{7.21}$$

ここに $T=t-t_0$ とおいた．特に $r=r_0=\dfrac{R}{2}$ の場合を考え，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}_0$ との間の角を $\theta$，散乱振幅を

$$f_l(k)=(e^{2i\delta_l}-1)/2ik \tag{7.22}$$

とおく．$k<0$ の部分にたいしても

$$f_l(-k)\equiv f_l^*(k) \tag{7.23}$$

と約束する．$h_l(-x)=(-1)^{l+1}h_l^*(x)$ で $h_l$ も負の方へ延長できる．また (5.13) の $q_l$ を使うと

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)_{r=r_0}=G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)_{r=r_0}$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^\infty\frac{dk}{2}\left[\sum(2l+1)f_l(k)q_l^2\left(\frac{kR}{2}\right)(-1)^lP_l(\cos\theta)\right]$$
$$\cdot e^{ikR}[e^{-i\omega T}-e^{+i\omega T}]$$

となる．$\omega=|k|$ で，$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=R\sin\dfrac{\theta}{2}$ であるから，ミクロ因果律は

$$G(R,\theta,T)=\int_{-\infty}^\infty\frac{dk}{2}\left[\sum_{l=0}^\infty(2l+1)f_l(k)(-1)^lP_l(\cos\theta)q_l^2\left(\frac{kR}{2}\right)\right]$$
$$\cdot e^{ikR}[e^{-i\omega T}-e^{i\omega T}] \tag{7.24}$$

が

$$R\sin\frac{\theta}{2}>T,\qquad R>a \tag{7.25}$$

で0になると表現される．

このミクロ因果律のために $f_l(k)$ に要求される条件が完全に明らかになればおもしろいのであるが，まだ成功していない．

$\theta=\pi$，つまり $\boldsymbol{r}'=-\boldsymbol{r}$ のときに限って話を進めることにする．この場合の $G$ を $G(R,T)$ とすると

$$\begin{aligned}G(R,T)&=\int_{-\infty}^\infty\frac{dk}{2}\sum(2l+1)f_l(k)q_l^2(kR/2)e^{ikR}(e^{-i\omega T}-e^{i\omega T})\\&=0,\qquad\qquad R>T,\quad R>a,\end{aligned} \tag{7.26}$$

あるいは

$$M(k,R)\equiv\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l(k)q_l^2(kR/2) \tag{7.27}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}G(R,T)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2}M(k,R)e^{ikR}(e^{-i|k|T}-e^{i|k|T})\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu}{2}e^{i\nu z}\{M(\nu,R)-M(-\nu,R)e^{-2i\nu R}\}\end{aligned} \tag{7.28}$$

と書くことができる．ここに $z=R-T$ である．$R$ を十分大きくとると

$$M(\nu,R)\to f(0,k)=\sum(2l+1)f_l(k) \tag{7.29}$$

は (5.8) の下に定義した前方散乱振幅である．(7.28) の第二項は $e^{-2i\nu R}$ のために $R\to\infty$ では 0 になる．従って

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\, e^{i\nu z}f(\nu)=0 \qquad z>0 \tag{7.30}$$

となる．これは §6 でのべたマクロ因果律と同じであるから，同様にこれから分散公式が導かれる．

このようにして，ミクロ因果律からマクロ因果律と同じく分散公式が導かれた．前方散乱の場合だけでなく，任意の角の関係を用いれば，もっといろいろの条件が得られるかもしれない(1)．

## §8　相反関係 (reciprocity)

次に一般の散乱体について考えよう．球対称の散乱体の場合には，$P_n(\cos\theta)$ で展開すると，$n$ に対応する球面波が入射するとき，散乱される波も同じ $n$ だけである．散乱体が球対称でなければ，球面函数 $P_n^m(\theta,\varphi)$ で表わされる球面波が入ってきても，$P_{n'}^{m'}(\theta,\varphi)$ の波が出て行く．

いま $n,m$ をまとめて単に $n$, たがいに球面上で直交する球面函数を $Y_n(\theta,\varphi)$ とかき，その大きさを

$$\int|Y_n|^2\,d\Omega=1$$

にしておく．$d\Omega$ は $\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ である．また $Y_n$ は実函数としておく．

大きい球面 (半径 $r$) をとって，その上で $Y_n$ の球面波の入射振幅を $\alpha_n$, 散

(1) 物理学会発行の物理学論文選集 75，場の理論には分散公式と因果律についての論文が集められている．

乱波の振幅を $\beta_n$ にとっておくと,

$$\psi\sim\sum_n\left(\alpha_n\frac{e^{-ikr}}{r}-\beta_n\frac{e^{ikr}}{r}\right)Y_n(\theta,\varphi)e^{-i\omega t} \tag{8.1}$$

である．流れこむ波の強さは $|\alpha_n|^2$, 散乱されて流れ出る波の強さは $|\beta_n|^2$ である．

$\alpha_m\neq0,\ \alpha_{m'}=0\ (m'\neq m)$ であるとき，すなわちある一つの型の波 $m$ だけが入射し，ほかに入射波がないときの散乱波を $\beta_n=S_{nm}\alpha_m$ と書こう．そうすると一般に

$$\beta_n=\sum_m S_{nm}\alpha_m \tag{8.2}$$

である．つぎに $S_{nm}$ についていろいろの一般的性質を調べよう．なお $n$ で区別される波の型をチャネルと呼ぶことにする．チャネル $n$ から $n$ へ反射率は $\beta_{nn}$, $m$ から $n$ への透過率は $\beta_{nm}$ である．

$\psi$ は波動方程式 $\nabla^2\psi+(k^2-U)\psi=0$ を満たす．いま別に同じ方程式を満たす $\varphi$ を考える．Gauss の定理により

$$0=\int(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)d\tau=\int r^2\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)d\Omega \tag{8.3}$$

である．ここに右辺は半径 $r$ の球面上で積分する．また $\varphi$ と同じく $\varphi^*$ も同じ式を満たすから

$$\int r^2\left(\varphi^*\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}\right)d\Omega=0. \tag{8.4}$$

さて，$\varphi$ として $\alpha_n=\delta_{np}$ の解，すなわち $p$ 番目のチャネルの入射球面波だけある場合，$\psi$ として $\alpha_n=\delta_{nq}$ の場合をとって，(8.3) に入れる．$Y_n$ の直交規格性を使うと

$$S_{pq}=S_{qp} \tag{8.5}$$

を得る．これを**相反性**という．$q$ から入って $p$ に出て行く振幅と，$p$ から入って $q$ に出て行く振幅とが同じであることを意味する．

同様に (8.4) から

$$\sum_n S_{np}^*S_{nq}=\delta_{pq}; \tag{8.6}$$

$p=q$ の部分 $\sum_n|S_{np}|^2=1$ は明らかに保存則である．$S_{mn}$ を要素とするマトリックスを $S$ とし，これを**散乱マトリックス** (scattering matrix) という．

(*8.6*) を満たすマトリックスをユニタリ (unitary) という．$S$ はまた対称である．

$S$ は $\omega$ または $k$ の函数である．チャネル一個の場合とちがって，一般には因果律と，$S$ の対称，ユニタリ性だけで $S_{pq}(\omega)$ の性質を完全にきめるのは容易ではない．ここでは共鳴散乱の近くだけを考えるとし，因果律を満たす

$$S_{pq}=\frac{\alpha_{pq}}{\omega-\omega_0{}^*}+\beta_{pq}$$

の形を仮定して，定数 $\alpha, \beta$ をきめることにする．$\omega_0$ は $\omega_r+i\omega_i\ (\omega_i\geqq 0)$ とする．$\alpha_{pq}, \beta_{pq}$ は対称である．これを (*8.6*) に入れ，$\omega$ について恒等的に成り立つための条件を求めると

$$\sum_n \beta_{np}^*\beta_{nq}=\delta_{pq},$$

$$(\omega_0-\omega_0{}^*)\sum_n \alpha_{np}^*\beta_{nq}+\sum_n \alpha_{np}^*\alpha_{nq}=0$$

が得られる．下の式に $\beta_{qr}^*$ をかけて加えると

$$\omega_0-\omega_0{}^*+\sum_{nq}\frac{\alpha_{np}^*}{\alpha_{rp}^*}\alpha_{nq}\beta_{qr}^*=0.$$

これから $\alpha_{np}/\alpha_{rp}$ は $p$ に関係しないことがわかる．したがって $\alpha_{pq}=\gamma_p\gamma_q$ の形をしている．これを使うと

$$\frac{\omega_0-\omega_0{}^*}{\sum|\gamma_n|^2}+\frac{1}{\gamma_r{}^*}\sum_q\gamma_q\beta_{qr}^*=0$$

となり，第一項と同様，第二項は $r$ によらない．これに $\beta$ のユニタリ性を使うと，

$$\omega_i=\frac{1}{2}\sum|\gamma_n|^2,$$

$$i\gamma_p=\sum_q\gamma_q{}^*\beta_{qp}$$

が得られる．

散乱体が，たとえば Helmholtz の共鳴器や，バイオリンの弦のように一定の振動数 $\omega_r$ に共鳴するとき，散乱は直接にチャネル $p$ から $q$ へ行くより，いったん共鳴振動を起して，それから $q$ へ行く波が放出されて出る方が強いであろう．このようなときには $\beta_{qp}$ は共鳴を通らずに行くのであるから，$p\neq q$ のとき $\beta_{qp}=0$ と近似してよいであろう．この場合

$$\gamma_p=\sqrt{\Gamma_p}\,e^{i\alpha_p}$$

とかくと，$\beta_{pq}=i\delta_{pq}e^{2i\alpha_p}$ となるから，

$$S_{pq}(\omega)=e^{i(\alpha_p+\alpha_q)}\left[\frac{\sqrt{\Gamma_p\Gamma_q}}{(\omega-\omega_r)+\dfrac{i}{2}\sum\limits_n\Gamma_n}+i\delta_{pq}\right]. \tag{8.7}$$

これが共鳴振動数 $\omega_r$ が一つあるときの $S$ マトリックスのかなり一般の形である．

上にのべた簡単な例と同様にして，原子核反応や，電波の散乱などいろいろの場合に，このような一般的議論が利用される．これらの方法は，現象を大雑把にとらえ，その枠をきめるのに役立つ．$\omega_r$ とか，$\Gamma_n$ とかの定数を計算できめるには，それぞれの具体的な場合に応じて計算するより仕方がない．しかし現象の内部的つながりを理解するには，一般論が有効な場合が多い．

問題 1〕 $S$ から $R=i(1-S)/(1+S)$ によってリアクタンス $R$ を定義すれば，$R$ は対称，Hermite マトリックスになることを示せ．$R_{pq}$ は $R_{qp}$ に等しく，実数である．したがって独立なパラメタは $\dfrac{N(N+1)}{2}$ 個ある．ここに $N$ はチャネル総数である．

問題 2〕 チャネルが一個で $S$ が (8.7) の形をとるとき，$R$ はどんな形になるか．$R$ の極はどこにあるか．ただし $\alpha_p=0$ として計算せよ．

## §9 小さな散乱体

波長に比べて小さい散乱体に波があたるとき，波の速さを $c$ とすると，物体の大きさを影響が伝わる時間は $a/c$ の程度である．ここに $a$ は物体の大きさを表わす量である．波長を $\lambda$ とすると周期は $\lambda/c$ であるから，周期に比べて短い間に影響は物体全体にわたってしまう．したがって物体のまわりの波の有様を考えるとき，波動が時間的に変化することを無視してもよい．いいかえると波動方程式 $(\nabla^2+k^2)\psi=0$ で $k^2$ を省略してよいことになる．そうすれば $\nabla^2\psi=0$ はポテンシアルをきめる Laplace 方程式であるから，波動方程式よりも解きやすい．つぎにいくつかの例で，この方法を説明しよう．

1) **球による波の散乱** 半径 $a$ の剛体球に波があたるとする．球面で $\psi=0$ の境界条件をおく．入射波を $\psi_0$ とし，$\psi_0=e^{ikz}=1+ikz+\cdots$ と展開する．$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ である．$\nabla^2\psi=0$ を球座標でとくと，遠方で $\psi_s\to0$ になる解は

$$\psi_s=A+\frac{B}{r}+\frac{C}{r^2}\cos\theta+\cdots.$$

$\psi=\psi_0+\psi_s$ が $r=a$ で0になるようにするには

$$A=0,\quad B=-a,\quad C=-ika^3.$$

球から遠方で正しい散乱波を

$$\psi_s = B'h_0^{(1)}(kr) + C'h_1^{(1)}(kr)\cos\theta + \cdots$$

とすれば，球の近く $kr \ll 1$ で

$$\psi_s \approx -\frac{B'}{kr} - \frac{C'i}{(kr)^2}\cos\theta$$

であるから，$B' = ka$, $C' = k^3a^3$. 遠方では $h_0^{(1)} \sim -\dfrac{i}{kr}e^{ikr}$, $h_1^{(1)} \sim -\dfrac{1}{kr}e^{ikr}$ であるから

$$\psi_s \sim -\frac{ka}{kr}e^{ikr} - \frac{k^3a^3}{kr}e^{ikr}\cos\theta + \cdots$$

となって，決定される．これを

$$\psi_s \sim \frac{e^{ikr}}{kr}\sum(2n+1)e^{-i\delta_n}\sin\delta_n P_n(\cos\theta)$$

とくらべると，

$$\delta_0 = -ka,$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{3}(ka)^3$$

となって，前節で求めた $\delta_n$ を $ka \ll 1$ で近似したものと完全に一致する．

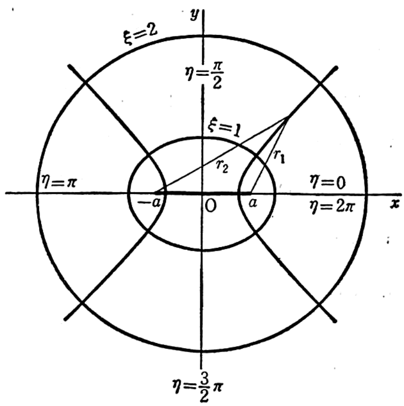
境界条件が $r = a$ で $\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = 0$ であれば，$B = 0$, $C = \dfrac{ika^3}{2}$ で $\delta_0 = 0$ になる．このとき散乱は起りにくい．

2) **長いリボンによる散乱** 剛体のリボンに平面波があたる場合を考える．リボンは無限に長く，$z$ 軸にそって中心軸があり，$x = \pm a$ の間で $xy$ 面を切るとする．入射波は $z$ 軸に垂直に入射しているとし，$z$ 方向には一様とすれば，二次元の問題として取り扱ってよい．このとき楕円座標をとると都合がよい．$(a,0), (-a,0)$ から $(x,y)$ までの距離を $r_1, r_2$ とし

$$r_1 + r_2 = 2a\cosh\xi,$$

$$r_2 - r_1 = 2a\cos\eta$$

とおくと，$\xi =$ 定数 は同焦点の楕円，$\eta =$ 定数 は同焦点の双曲線になる．




第 9.1 図

これをとくと

$$x = a\cosh\xi\cos\eta,\qquad y = a\sinh\xi\sin\eta \tag{9.1}$$

となる．Laplace 方程式は

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0 \tag{9.2}$$

となる．波動方程式も変数分離でき，Mathieu 函数で解かれるが，Laplace 方程式のときにはさらに簡単である．

$x, y$ の極座標を $r, \theta$ とすると，$r$ が大きくなると

$$r_1 \to r - a\cos\theta,\quad r_2 \to r + a\cos\theta,$$

$$ae^{\xi} \to 2r,\quad \eta \to \theta$$

となる．$\xi = 0$ は $x = -a$ から $x = a$ までの線分を表わす．これはちょうどリボンにあたる．

(9.2) を変数分離でとくと，

$$1,\ \xi,\ \frac{\sinh}{\cosh} m\xi \frac{\sin}{\cos} m\eta$$

などが得られる．リボンの上で $\psi = 0$ になるのは

$$\psi = A_1\xi + \sum_m (B_m \sinh m\xi \sin m\eta + C_m \sinh m\xi \cos m\eta) \tag{9.3}$$

である．またリボンの面で $\partial\psi/\partial n = 0$ になるのは，$\partial\psi/\partial\xi = 0$ であるから

$$\psi' = A_0' + \sum_m (B_m' \cosh m\xi \sin m\eta + C_m' \cosh m\xi \cos m\eta)$$

である．$x > a$ の $x$ 軸上で $\psi'$ と $\partial\psi'/\partial n$ が連続なためには $B_m'$ は下と上の半面で同じでよい．

入射波が $\theta = \alpha$ 方向に進むとし，$e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}$ とおく．このほかに散乱波を加えて

$$\psi_k = e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} + \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(kr)(D_n \sin n\theta + E_n \cos n\theta) \tag{9.4}$$

とおく．これが (9.3) の $\psi$ につながるとし，この $\psi$ をリボンから遠方で計算して (9.4) とつなぐ．

$$\sinh\xi\sin\eta = \frac{r}{a}\sin\theta,$$

$$\sinh\xi\cos\eta = \eta\cdot\frac{\cos\theta}{a} \approx \frac{r}{a}\cos\theta - \frac{a}{2r}\cos\theta.$$

$$\xi \sim \log \frac{2r}{a}$$

であるから (*9.3*) の $\psi$ は

$$\psi \sim A_1 \log \frac{2r}{a} + B_1 \frac{r}{a} \sin\theta + C_1\left(\frac{r}{a}\cos\theta - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

となる. (*9.4*) を $kr \ll 1$ で展開すれば $\gamma = 0.5772\cdots$ として,

$$\psi_k \sim 1 + ikr\cos(\theta-\alpha)$$
$$+E_0\left[1+\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{kr}{2}+\gamma\right)\right] - \frac{i}{\pi}\frac{2}{kr}(D_1\sin\theta + E_1\cos\theta)+\cdots; \quad (9.5)$$

これでみると, 角度 $\theta$ に比例する主な項は $1/r$ であるのに, (*9.3*) の方には $\frac{1}{r}$ は小さい補正でしかない. それで $\cos\theta$, $\sin\theta$ に比例する散乱はほとんどないといってよい.

球対称の部分をくらべると,

$$E_0\left[1+\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{ka}{4}+\gamma\right)\right]+1=0,$$

これから $E_0$ がきまる. $r$ が大きいときは

$$\psi_k \sim e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} + E_0\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{ikr-\frac{\pi i}{4}}. \quad (9.6)$$

したがって, 断面積は

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}|E_0|^2 \approx \frac{\pi^2}{k}\frac{1}{\left|\log\frac{ka}{4}+\gamma\right|^2},$$

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ で書き直すと

$$\sigma = \frac{\pi\lambda}{2[\log(0.717\lambda/a)]^2}. \quad (9.7)$$

散乱は角度によらず, 波長が長くなるにつれて断面積が大きくなる. これは入射波を打ち消してリボンの面で $\psi=0$ にするために, 大きな散乱波が必要となるからで, たとえリボンに平行に入射しても, 断面積はほとんど変らない.

次に同様の計算を $\partial\psi/\partial n=0$ の場合に行なってみる. この場合 (*9.4*) を $\psi'$ と比べる.

$$\psi' \approx A_0' + B_1'\left(\frac{r\sin\theta}{a}+\frac{a}{2r}\sin\theta\right)+C_1'\frac{r\cos\theta}{a}.$$

これから, $E_0=0$ が分る. すなわち球対称の散乱はない. また $\frac{C_1'}{a}=ik\cos\alpha$;

$E_1=0$ となる．$B_1'$ は $B_1'=iak\sin\alpha$ であって，これから $1/r$ の係数を比べて $D_1$ は $-\frac{\pi}{4}k^2a^2\sin\alpha$ に等しい．したがって $\psi$ の漸近形は $r\to\infty$ で

$$\psi_k \sim e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} - i\frac{\pi}{4}k^2a^2\sin\alpha\, e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{ikr}\sin\theta \tag{9.8}$$

となる．これから角分布と全断面積は

$$\sigma'(\theta)d\theta = \frac{\pi^2}{4}\frac{(ka)^4}{k}\sin^2\alpha\sin^2\theta\, d\theta, \tag{9.9}$$

$$\sigma' = \frac{\pi^2}{4}\frac{(ka)^4}{k}\sin^2\alpha$$

となる．$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，すなわちリボンの面に垂直方向に強さが最大である．また入射方向がリボンの面に平行 $(\alpha=0)$ のとき，散乱は全く起らない．これは $\partial\psi/\partial n=0$ が入射波自身で満たされているからである．リボン面に垂直に入射しても，$\partial\psi/\partial n$ はせいぜい $1/\lambda$ くらいであるから，長波長では散乱が少ないわけである．

3) **長いスリット** 前項のリボンの代りに，$x=-a$ から $x=+a$ までスリットがあいている無限に広い平面を考えよう．同じように楕円座標を使って取り扱う．

第一種の境界条件では面 $\eta=0$ または $\pi$ で $\psi=0$，第二種では $\partial\psi/\partial\eta=0$ である．第一種の場合

$$\psi = A\eta + B\sinh\xi\sin\eta + C\cosh\xi\sin\eta + \cdots, \tag{9.10}$$

第二種の場合

$$\psi' = A_0' + A'\xi + B'\sinh\xi\cos\eta + C\ \cosh\xi\cos\eta + \cdots \tag{9.11}$$

とおける．

波として考えた $\psi_k$ は，$x$ 軸の下半面では入射平面波のほかに反射平面波もある．第二種の場合，面上 $\theta=\pi$ または $\theta=2\pi$ で0になるように

$$\begin{aligned}\psi_k' &= e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} + e^{+ikr\cos(\theta+\alpha)} + \text{外向きの波}, &\quad \pi<\theta<2\pi,\\ &= \text{外向きの波}, &\quad 0<\theta<\pi\end{aligned}$$

の形になる．第一種の場合には二つの平面波の差をとる．

第二種の場合を例としてのべよう．$\xi=0$ はスリットがあいているから，そこでは $\psi'$ も $\partial\psi'/\partial y$ も連続である．しかし下半面では $\partial\psi'/\partial y$ は $-\partial\psi'/\partial\xi$ にあたる．したがって (*9.11*) が下にたいして成り立つとすれば，上半面では $A'$,

$B'$ の代りに $-A', -B'$ をとらねばならない.

下半面で

$$\psi_k' = 2+2ik\cos\theta\cos\alpha+\cdots$$
$$+E_0'H_0^{(1)}(kr)+H_1^{(1)}(kr)(D_1'\sin\theta+E_1'\cos\theta)+\cdots$$

とする.

スリットから $a$ に比べて遠い所で

$$\psi' \sim A_0'+A'\log\frac{2r}{a}+\frac{B'}{a}r\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{2r^2}\right)+\frac{C'}{a}r\cos\theta+\cdots.$$

また，そこで $kr \ll 1$ とすると

$$\psi_k' \sim 2+2ikr\cos\theta\cos\alpha+E_0\left[1+\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{kr}{2}+\gamma\right)\right]$$
$$-\frac{i}{\pi}\frac{2}{kr}(D_1'\sin\theta+E_1'\sin\theta)+\cdots.$$

これを比べて

$$A'=\frac{2i}{\pi}E_0',\quad A_0'=2+E_0'\left[\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{ka}{4}+\gamma\right)+1\right]$$

を得る．ところで，上半面では $A', B'$ の代りに $-A', -B'$ とおかねばならない．これに応じて $E_0', D_1'$ なども $E_0'', D_1''$ などとおくことにする．そうすれば同様にして上半面では散乱波のみとすると

$$-A'=\frac{2i}{\pi}E_0'',\quad A_0'=E_0''\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{ka}{4}+\gamma\right)$$

を得る．これから $E_0''=-E_0'$ で，$A_0'$ を消去すると

$$E_0''=+\frac{1}{\dfrac{2i}{\pi}\left(\log\dfrac{ka}{4}+\gamma\right)+1} \tag{9.12}$$

が得られる．この $E_0''$ は (9.6) の $E_0$ と大きさ等しく，符号が反対である．この結果から第二種の境界条件のときのスリットからの散乱波は，第一種の境界条件のときの同じ幅のリボンから散乱波とちょうど異符号で，角分布は等しい．これは Babinet の原理といわれるものの例である．ここでは近似計算として示したが，波動方程式の空間的な対称性から導かれることである．スリットに第一種，リボンに第二種の境界条件をおいたときも同様である．

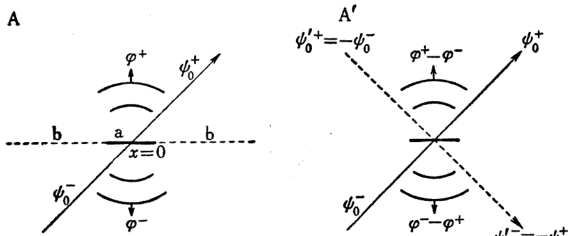
4) **Babinet の原理** 無理に広い平面状の反射壁に孔 a をあけた場合と，a

に反射壁をおき，それ以外に何もない場合とを比べてみよう．平面の a 以外の部分を b とする．a+b が全平面になるという条件のほか，a の形はどうでもよい．したがって前項のスリットやリボンの場合も含まれる．ここでは例として，次の二つの場合を比較する．平面の上下を $+x$, $-x$ で区別し，上，下半面の量に + または − をつけて区別する．

A： a が反射板で b には何もない．a の表面で**第一種**の境界条件を課す（第9.2, A 図）．このとき，入射波を $\psi_0$，散乱波を $\varphi^+, \varphi^-$ で表わす．A′ では上下を裏返し，符号を変えたものを重ね合わせる．平面 $x=0$ に対して反対称であるから，平面全体にわたって波の振幅は 0 になっている．これは単に二つの平面波 $\psi_0$ と $\psi_0'$ を重ねただけで満たされるから，境界はなくても同じで，反射は起らないはずである．したがって $\varphi^+-\varphi^-=0$．これから A の場合，散乱波は上下**対称**であることが分る．波の満たす条件は

a では　　$\psi_0(0)+\varphi(0)=0,$

b では連続の条件　　$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0)=0.$



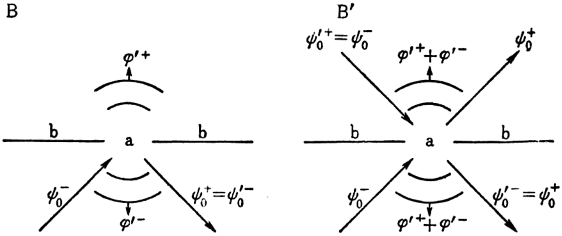

第 9.2 図

B： a は孔で b は反射壁．b は**第二種**の境界条件．このとき散乱波を $\varphi'$ とする．入射波は無限に広い反射板のために反射されるので，下半面で反射波 $\psi_0'$ をつけ加えておく．$\psi_0'$ としては孔のないときの反射波と同じくして，$\psi_0$ を上にのばしてそのまま裏返したものをとる．B′ では上下を裏返したものをそのまま重ねてある．このときも二つの入射波が互に重なり合ったのと同じであるから，散乱波はないはずで，$\varphi'^+ + \varphi'^- = 0$ である．それで B の場合には上下**反対称**である．B の場合，$x=0$ の面で波の満たす条件は

a では　連続条件 $\varphi'(0)=2\psi_0(0)-\varphi'(0)$,

すなわち $\varphi'(0)=\psi_0(0)$,

b では　$\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x}(0)=0$.




第 9.3 図

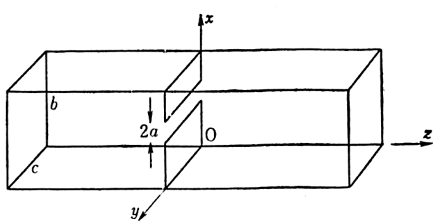
さて，以上の結果をみると，A の場合の散乱波 $\varphi$ と，B の場合の散乱波 $\varphi'$ とは，b ではどちらも第二種の条件を満たし，a では $\varphi(0)$ は $-\psi_0(0)$, $\varphi'(0)$ は $+\psi_0(0)$ になっている．$\varphi$ も $\varphi'$ も同じ波動方程式を満たし，境界条件の符号が反対だから，上の空間で

$$\varphi(x)=-\varphi'(x)$$

が成り立つ．すなわち a に反射板をおいて第一種の条件をおくときの散乱波は，a を孔にし残りの平面を第二種の反射板にしたときの散乱波と符号が反対で大きさが等しい．これは Babinet の原理である．

5) **導波管内のスリット**　前項の結果を利用して，導波管内にせまいスリットをおいたときの作用をしらべよう．

音波を例として考え，境界面で第二種の条件をおくことにする．そうするとスリットの作用は波長が長いとき大きい．




第 9.4 図

導波管として矩形の断面をもつものを考え，第 9.4 図のように座標をとる．スリットは図のように $y$ 軸に平行に幅 $2a$ をもち，ちょうど上下対称においてあるとしよう．$x, y$ 辺の長さを $b, c$ とする．

導波管内の波動方程式の解は，直交軸で分離すると

$$\cos\frac{m\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{c}e^{\mu_{mn}z}\cdot e^{-i\omega t} \tag{9.13}$$

の形になる．cosine を採用したのは壁で第二種の条件を満たすためである．振動数 $\omega$ に対応する波数を $k$ とすると，$k$ は $\omega$ できまる量である．$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ を満たすためには

$$\mu_{mn}^2=\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2-k^2 \tag{9.14}$$

でなくてはならない．$m, n$ は負でない整数であるから $m=n=0$ という基底姿態では $\mu_{mn}$ は純虚数になり，境界のない空間を伝わる波と全く同じである．$k$ がきまっているとき，$m, n$ の値によっては，$\mu_{mn}$ が実数になることがある．このような波は $z$ 方向に動くにつれて減衰するか増大するかで，周期的にはなり得ない．このような波は遮断されているという．$(m, n)$ 姿態に対して $\mu_{mn}=0$ にする周波数を遮断周波数という．このような事情は矩形の断面のときだけでなく，円形，楕円形などのときにもあって，断面の固有値問題 $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\mu^2\psi=0$ をといて求められる．第一種の境界条件をつけると，遮断周波数は第二種のときと異なるのが普通であるが，矩形のときにはほとんど一致する．ただ，このときには cosine の代りに sine をとるから，$m=n=0$ は恒等的に 0 になって，存在しない．

さて，スリットの左から振幅1の基本姿態の波を送りこむとき，通りぬける波や反射される波を考えてみよう．はじめの条件が $y$ 軸にそって変化がないから $n=0$ の波しかスリットで発生することはない．それで $y$ については考えないでよい．また周波数は高くなく，基底姿態以外は遮断されるとし，$\mu_{m0}$ は $m\neq0$ のとき実数とし，これを単に $\mu_m$ と書くことにする．

$z=0$ で $\psi$, $\partial\psi/\partial z$ が連続である$\left(\text{スリットの壁のところでは両側で }\frac{\partial\psi}{\partial z}=0\right)$から，

$$\begin{aligned}\psi&=e^{ikz}+S_{11}e^{-ikz}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi x}{b}e^{\mu_m z}, \qquad z<0,\\ &=S_{12}e^{ikz}-\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi x}{b}e^{-\mu_m z}, \qquad z>0\end{aligned} \tag{9.15}$$

と書くことにしよう．$S_{11}, S_{12}$ は $S$ マトリックスの要素であって，対称性から $S_{11}=S_{22}$ である．$\partial\psi/\partial z$ の連続性を使うとさらに

$$1-S_{11}=S_{12}\equiv A_0$$

である．ユニタリ性によって，

$$|A_0|^2+|1-A_0|^2=1,$$

$$(1-A_0{}^*)A_0+A_0{}^*(1-A_0)=0$$

であるから，$A_0+A_0{}^*=2|A_0|^2$．これにより，ただ一つの実パラメタできまることがわかる．(*9. 11*) に示したようにスリットの面の近くで楕円座標 $\xi$ は 0 に近く，$x, z$ を楕円座標でかくと，

$$x-\frac{b}{2}\approx a\cos\eta,\quad z\approx a\eta\sin\eta \tag{9.16}$$

で，$\psi$ は

$$\psi=\mathrm{const}+C\xi \tag{9.17}$$

の形をしている．したがってスリットの間で

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\sim\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{a\sin\eta}=\frac{C}{a\sin\eta}, \tag{9.18}$$

$\partial\psi/\partial z$ はこれ以外では 0 である．$z=0$ におけるこの条件を使って，$A_0, A_m$ をきめることができる．すなわち

$$ikA_0+\sum\mu_m A_m\cos\frac{m\pi x}{b}=\frac{C}{a\sin\eta},\qquad \text{スリットの間,}$$

$$=0,\qquad \text{それ以外.}$$

これから

$$A_0=\frac{C}{ikab}\int\frac{dx}{\sin\eta}=\frac{C}{ikb}\int^{\pi}d\eta=-i\frac{C\pi}{kb},$$

$$A_m=\frac{2C}{a\mu_m b}\cdot\int\cos\frac{m\pi x}{b}\cdot\frac{dx}{\sin\eta}=\frac{2C}{\mu}\int_0^{\pi}\cos\left[\frac{m\pi}{b}\left(\frac{b}{2}+a\cos\eta\right)\right]d\eta$$

$$=\frac{2C\pi}{\mu_m b}\cos\frac{m\pi}{2}\cdot J_0\left(\frac{ma\pi}{b}\right)$$

が得られる．したがって $C$ をきめればよい．

$C$ をきめるには $\psi$ をスリットの近くで展開して，(*9. 17*) と比べればよい．しかしそのためには前節でやったように $\psi$ を (*9. 17*) でなく，次の近似まで求めなくてはならない．いまの場合，スリットの両側で $\psi$ の値を比べるということにしよう．

$z$ の正の側から，スリットの中心に近づくとき

$$\psi \to \psi^+ = -\frac{iC\pi}{kb} - \frac{2C\pi}{b} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2m}} J_0\left(\frac{ma\pi}{b}\right)$$

で，この級数は収束する．

$$\psi^+ = -\frac{iC\pi}{kb} - \frac{2C}{b} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left[n\pi\left(1+\frac{2a}{b}\cos\xi\right)\right] \frac{d\xi}{\mu_{2n}} \cos n\pi.$$

$\mu_{2n}$ を $\dfrac{2\pi n}{b}$ で近似すれば和は求まる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi a}{b}\cos\xi\right) = -\frac{b}{4\pi} \log\left[4\sin^2\left(\frac{\pi a}{b}\cos\xi\right)\right].$$

$\pi a \ll b$ として積分できる．近似的に積分は $-\dfrac{b}{2}\log\dfrac{\pi a}{b}$ となる．また $n$ の小さい所では $\mu_{2n}$ の置換えはよくないが，その部分の補正ははじめの方だけすればよい．

$$\psi^+ \sim -\frac{iC\pi}{kb} - C\log\frac{b}{\pi a},$$

同様にして

$$\psi^- \sim 2 + \frac{iC\pi}{kb} + C\log\frac{b}{\pi a}.$$

これを等しいとおいて，

$$C = \frac{\dfrac{ikb}{\pi}}{1 - \dfrac{ikb}{\pi}\log\dfrac{b}{\pi a}},$$

したがって

$$A_0 = \frac{1}{1 - \dfrac{ikb}{\pi}\log\dfrac{b}{\pi a}}. \qquad (9.19)$$

$|A_0|^2$ が透過率を与える．

$$|A_0|^2 = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{kb}{\pi}\log\dfrac{b}{\pi a}\right)^2}. \qquad (9.20)$$

$k$ が小さいとき，$|A_0|^2$ はほとんど 1 に近い．$\dfrac{kb}{\pi} \sim 1$，すなわち $k$ が次の遮断波数 $\dfrac{\pi}{b}$ に近づくと透過率がへってくる．$k$ がそれ以上になると，次の姿態も発生して伝わるから，もっと近似を進める必要がある．

問題〕 矩形導波管内の遮断されない $(m, n)$ 姿態の波の位相速度は，自由空間の音速より大きいことを示せ．これは波が自由空間より速く伝わることを意味するか．電磁波の場合，位相速度が光速をこえることは，相対性理論に反するであろうか．

# 第 3 章　電磁波の境界値問題

## §1　Maxwell の方程式

電磁場は最も重要なベクトル場である．この章では真空中および真空に準ずる簡単な媒質の中の電磁場，特に電磁振動を取り扱う．

電磁場の状態は次の **Maxwell の方程式**を満たす四種のベクトル，電場 $\boldsymbol{E}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ および電束密度 $\boldsymbol{D}$，磁場 $\boldsymbol{H}$ によって定まる．

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}=0, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}=\rho^{*}. \tag{1.4}$$

ただし $\boldsymbol{J}$ は電流密度，$\rho^*$ は電荷密度を表わす．電束密度の時間変化 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ を電束電流の密度と呼ぶこともあるが，その際には $\boldsymbol{J}$ は伝導電流密度といって区別する．次の章で物質密度 $\rho$ を用いるので，電荷密度に * をつけた．

これらの関係は，すべては独立でない．すなわち (*1.1*) よりその div を作れば

$$\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \boldsymbol{B}=0;$$

したがって $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$ は時間によらない．ここで時間的に十分前に場が存在しなかったとするか，あるいは定まった振動数（周波数）で振動する場を考えるならば，この量は 0 でなければならない．これは (*1.2*) にほかならない．(*1.3*) と (*1.4*) とにより

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J}+\frac{\partial \rho^{*}}{\partial t}=0 \tag{1.5}$$

を得るが，これは電荷の保存を示すいわゆる連続の式である．

$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ との間，ならびに $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ との間には媒質に特有な関係があって，これらの関係が Maxwell 方程式を補足する．まず真空中では $\boldsymbol{D}$ は $\boldsymbol{E}$ の定数倍にして，$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{H}$ の定数倍である：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}. \tag{1.6}$$

一般に一様な等方性物質では $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ とはそれぞれ平行にして，強誘電体や強磁性体を除けば

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.7}$$

なる比例の関係が成り立つ．これらの比例係数と真空中の値との比，$\varepsilon/\varepsilon_0$ および $\mu/\mu_0$ はそれぞれ誘電率および透磁率とよばれる．強磁性体でなければ透磁率はほとんど 1 に等しい．

Maxwell の方程式を補足するなお一つの関係は $\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{E}$ との関係である．通常の媒質では Ohm の法則

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.8}$$

が成り立つ．ここに $\sigma$ は電気伝導率と呼ばれる．

この章では MKS 有理単位系を用いる．この単位系では電磁的な量は実用単位で表わし，すべてをこれと調和させるために，長さはメートル (meter)，質量はキログラム (kilogram)，時間は秒 (second) で表わす．このとき

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ henry/meter}$$

にして，

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ meter/second} \tag{1.9}$$

は真空中の光速度に等しい．これから

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ farad/meter},$$

$$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.7 \approx 120\,\pi \text{ ohm}.$$

Maxwell の方程式は場の変化が連続である場所で成り立つ．不連続面では，不連続性を連続性の極限と考えて導かれる次の境界条件がこれに代る：

$E_t$ は連続，$B_n$ は連続，

$H_t$ の不連続量 = 電流の面密度，

$D_n$ の不連続量 = 電荷の面密度．

ここに添字 $t$ はベクトルの接線 (tangential) 成分，添字 $n$ は法線 (normal) 成分を表わす．

電気伝動率 $\sigma$ が無限に大きい理想的な導体を完全導体という．その中では電場 $\boldsymbol{E}$ は存在し得ない．このとき $E_t$ の連続性より，完全導体の表面では $\boldsymbol{E}$ の接線成分は 0 である．したがって振動電磁場のみを考えれば，表面での $\boldsymbol{B}$ の法

線成分も0に等しい．本章では波長がセンチメートル程度以上のいわゆる電波を取り扱うが，そのとき通常の金属は近似的に完全導体と見なされる．したがって完全導体を単に導体と呼ぼう．導体以外の空間では$\varepsilon$と$\mu$とが一様である場合のみを取り扱う．この場合は数理的に真空と違わない．

## §2 エネルギー，運動量および力

恒等式

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$$

は Maxwell 方程式により

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=0,$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}+\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=0 \tag{2.1}$$

と書きかえられる．閉曲面で囲まれた領域の内部にのみ場が存在するとき，その領域にわたって(2.1)を積分すれば

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)d\tau+\int\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\,d\tau=0. \tag{2.2}$$

電流が存在しないときは，第一項の積分は時間によらない．電流が存在する場合に，(2.2)の二つの積分を場のエネルギーおよび場が単位時間になす仕事と解釈すれば，(2.2)はエネルギー保存則を表わす．この解釈が当を得ていることについては，後に説明がある．

つぎに運動量を取り扱うために電気的応力テンソル

$$\mathsf{T}^{\mathrm{e}}\equiv\varepsilon\begin{pmatrix} E_x^2-\frac{1}{2}E^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_xE_y & E_y^2-\frac{1}{2}E^2 & E_yE_z \\ E_xE_z & E_yE_z & E_z^2-\frac{1}{2}E^2 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$(E\equiv|\boldsymbol{E}|)$ ならびに磁気的応力テンソル

$$\mathsf{T}^{\mathrm{m}}\equiv\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} B_x^2-\frac{1}{2}B^2 & B_xB_y & B_xB_z \\ B_xB_y & B_y^2-\frac{1}{2}B^2 & B_yB_z \\ B_xB_z & B_yB_z & B_z^2-\frac{1}{2}B^2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

を導入する．これらの和

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}^{e} + \mathbf{T}^{m} \tag{2.5}$$

が **Maxwell のテンソル**である．

さて，一般にテンソルの Div を

$$(\mathrm{Div}\,\mathbf{T})_x \equiv \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}, \qquad \text{など}$$

で定義すれば，

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{e} = \varepsilon \boldsymbol{E}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + \varepsilon\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E},$$

したがって

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{e} = \rho^* \boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{D} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right).$$

同様に

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{m} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \times \boldsymbol{B}\right) + (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}),$$

結局

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) + (\rho^* \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) - \mathrm{Div}\,\mathbf{T} = 0 \tag{2.6}$$

を得る．閉曲面で囲まれた領域の内部にのみ場が存在するとき，その領域にわたって上式を積分すれば，

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}\, d\tau + \int (\rho^* \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) d\tau = 0 \tag{2.7}$$

となる．第一項の積分を場の運動量，第二項を電磁場が物質に及ぼす力と解釈すれば，(2.7) は運動量の保存則にほかならない．

このような解釈が正しければ，電磁場の**エネルギー密度**は $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})/2$，**運動量密度**は $\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}$，場のなす仕事率の密度は $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$，場が物質に及ぼす力 (**Lorentz 力**) の密度は $\rho^* \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ で与えられる．実際こうすれば，(2.6) よりテンソル $\mathbf{T}$ の対称性を用いて得られる，場全体にわたる積分

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) d\tau + \int \boldsymbol{r} \times (\rho^* \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) d\tau = 0$$

は角運動量の関係式と見られ，このほか種々の関係式が適当に理解されるのである．

このとき，(2.1) の第三項，**Poynting ベクトル** $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ の div，はエネルギーの流れの発散を意味し，(2.5) は電磁場の張力を表わすテンソルにほかならな

い．特に電場がなく，$z$ 方向に一様な磁場が存在するときは

$$\mathbf{T}=\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}B^2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}B^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}B^2\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

となるから，$z$ 軸に垂直に $B^2/2\mu$ なる圧力が働き，平行に $B^2/2\mu$ なる張力が働く．いいかえれば，等方的な圧力 $B^2/2\mu$ のほかに磁束方向にその二倍の張力が働くことになる．磁束の圧力と張力とは次の章で重要な役割を演じるであろう．

## §3 波動方程式，平面波

これから数節にわたって，電荷も電流も存在しない場合に一様な等方性電媒質について Maxwell 方程式

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0,\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0,\\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0,\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

を応用する．

まず第一式の rot を作り，第三式を用いて書きかえれば，

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0, \tag{3.2}$$

同様に $\boldsymbol{H}$ についても同じ形の方程式

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0 \tag{3.3}$$

を得る．あるいは $\nabla^2\equiv\mathrm{grad}\,\mathrm{div}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$ を使って，これらは

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0,\\ \nabla^2\boldsymbol{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

と書かれる．$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ の Descartes $(x, y, z)$ 座標に関して，(3.4) の $\nabla^2$ は Laplace の演算子に等しく，これらは通常の波動方程式にほかならない．

以上の諸式に現われている物質定数 $\varepsilon, \mu$ は電磁振動の速さの程度によって一般に異なるであろうから，厳密には単弦振動に分解して議論しなければならな

い．本章の対象は主として定まった周波数の振動であるが，このさい角周波数($2\pi\times$周波数) $\omega$ の単弦振動については，場の量に時間因子 $\exp(-i\omega t)$ をつけて複素量の計算をすることが広く行われている．そうすれば Maxwell の方程式 (*3.1*) は

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}-i\omega\mu\boldsymbol{H}=0, & \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0,\\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}+i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=0, & \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0,\end{array}\right\} \qquad (3.5)$$

波動方程式 (*3.2*), (*3.3*) は

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}-\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{E}=0,\\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{H}=0\end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

となる．

場の量にこの時間因子をつけて計算するとき，$\boldsymbol{E}$ または $\boldsymbol{H}$ 自身については結果において実部（あるいは虚部）を採るのであるが，それらについて一次でない量の計算には注意を要する．たとえばエネルギー密度の時間平均は

$$\frac{1}{4}(\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}+\mu\boldsymbol{H}\cdot\overline{\boldsymbol{H}})$$

で与えられ（$\overline{\boldsymbol{E}}$ は $\boldsymbol{E}$ の複素共役量），Poynting ベクトルの平均は $(\boldsymbol{E}\times\overline{\boldsymbol{H}})/2$ の実部で与えられる．これらの形に 1/2 がつくのは，複素量として表わした $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H}$ はその振幅の最大値を表わしていることに起因することはいうまでもない．

Maxwell の方程式，したがってまた波動方程式を満たす振動性の電磁場のうち，最も基本的な平面波について必要な範囲で述べる．$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ は $x$ と $y$ とによらないとし，$\boldsymbol{E}$ は $y$ 成分のみをもつとする（直線偏波）．そうすれば $\boldsymbol{H}$ は $x$ 成分のみをもつことになる．したがって

$$\left.\begin{array}{l}E_y=E_0\exp(-i\omega t+ikz),\\ -H_x=H_0\exp(-i\omega t+ikz)\end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

とおき ($E_0, H_0$ は実)，(*3.6*) に入れれば

$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu \quad \text{すなわち} \quad k=\pm\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad (3.8)$$

で伝播定数 $k$ が与えられる．波が伝わる速度は $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ であって，真空中では (*1.9*) に等しい．

$E_0$ と $H_0$ との関係を求めるには Maxwell の方程式 (*3.5*) まで戻らなけれ

ばならない．(*3.7*)の形をとったことにより，div $\boldsymbol{H}=0$, div $\boldsymbol{E}=0$ は恒等的に満たされている．第一式では $x$ 成分，第三式では $y$ 成分のみが問題となり，それぞれ

$$kE_0-\omega\mu H_0=0,$$
$$-kH_0+\omega\varepsilon E_0=0$$

を与える．これから $E_0$ と $H_0$ とを消去したものが(*3.8*)にほかならない．そうして

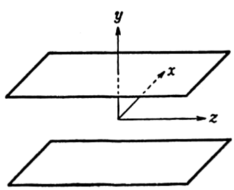
$$E_0/H_0=\omega\mu/k=k/\omega\varepsilon=\pm\sqrt{\mu/\varepsilon}\quad(\text{複号は}\,(3.8)\,\text{と同順}).$$

$\sqrt{\mu/\varepsilon}$ の単位は ohm であるから，この量は媒質の波動抵抗と呼ばれることがある．このさいエネルギー密度について，電気的な項と磁気的な項とは相等しく，その上エネルギー流の平均値は，エネルギー密度の平均値に速度 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ を乗じたものに等しいことが確かめられる．

直線偏波状の平面波

$$\left.\begin{aligned}E_y&=\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H_0\exp(-i\omega t+ikz),\\ -H_x&=H_0\exp(-i\omega t+ikz),\end{aligned}\right\}\quad k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\qquad(3.9)$$

は，$xz$ 面に平行な二枚の十分広い導体面の間の空間を伝わる波としても可能なものである(第3.1図)．何となれば導体の表面では $\boldsymbol{E}$ の接線成分が0になればよいが，これは(*3.9*)のままですでに満たされているからである．



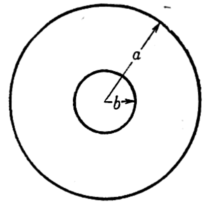
第 3.1 図　平行平面の間を伝わる横波

導体の円管の中央に一段と細い導体円柱を入れた**同軸ケーブル**は，上に述べた平行平面を同軸円筒の形にまるめたものにほかならない．円筒の軸を $z$ 軸とし，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ で与えられる円筒座標$(r,\theta,z)$を導入すれば，$r$ 成分のみをもつ $\boldsymbol{E}$ と，$\theta$ 成分のみをもつ $\boldsymbol{H}$ とからなる．

$$\left.\begin{aligned}E_r&=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{H_0}{r}\exp(-i\omega t+ikz),\\ H_\theta&=\frac{H_0}{r}\exp(-i\omega t+ikz),\end{aligned}\right\}\quad k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\qquad(3.10)$$

は Maxwell の方程式ならびに導体面の境界条件を満たす一つの可能な波であることは容易に確かめられる．ここに $\varepsilon,\mu$ は両円筒間の媒質の定数で，特に間

が真空あるいは空気であれば，この横波の伝わる速さは光速度 $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ に等しい．



第 3.2 図　同軸ケーブル

内部を伝わる電磁波のエネルギーを求めるには，

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\overline{\boldsymbol{H}}=\frac{1}{2}E_r\overline{H}_\theta$$

を両円柱の断面間に積分すればよい．外側および内側の円の半径をそれぞれ $a$ および $b$ とおけば，送られる電力は

$$\int_b^a \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{H_0{}^2}{r^2}2\pi r\,dr=\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_0{}^2\log\frac{a}{b} \tag{3.11}$$

である．

両導体における表面電流の面密度は，導体表面における $H_\theta$ に等しく，$z$ 成分のみをもつ．したがって内側の導体を流れる全電流は (3.10) の $H_\theta$ に $2\pi r$ を乗じたもの

$$I=2\pi H_0\exp(-i\omega t+ikz)$$

にして，外側の導体を流れる全電流は上式の符号を変えたものである．また導体間の電位差は $E_r$ を積分したもの

$$V=\int_b^a E_r dr=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_0\log\frac{a}{b}\exp(-i\omega t+ikz)$$

で与えられる．したがって伝送される電力 (3.11) はちょうど

$$\frac{1}{2}V\overline{I}$$

に等しい．

## §4　導波管の一般的性質

同軸ケーブルの内側の導体を次第に細くしてゆけば，それに接する所の $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ は次第に強くなり，ついには場の特異点となる．導体でできている中空の管，すなわち**導波管**の内部にはこのような特異点の存在は許されないから，導波管の中を伝わる波には同軸ケーブルの場合存在したような完全な横波はあり得ないことが了解されよう．

一般に Maxwell の方程式 (3.5) は，波動方程式

$$\nabla^2\Phi+\omega^2\varepsilon\mu\Phi=0,\quad \nabla^2\Psi+\omega^2\varepsilon\mu\Psi=0 \tag{4.1}$$

を満たす二つのスカラー函数 $\Phi, \Psi$ を用いて

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}+i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial y}, & H_x &= \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}-i\omega\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ E_y &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}, & H_y &= \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}+i\omega\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ E_z &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\omega^2\varepsilon\mu\Phi, & H_z &= \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\omega^2\varepsilon\mu\Psi \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

とおくことにより全部満たされる．これは直接入れてみれば容易に確かめられるが，(4.2) を得た経過は後に電磁ポテンシアルの節で学ぶことにする．

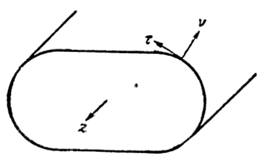
(4.2) は，線素 $ds$ が

$$ds^2 = h_1{}^2d\xi^2+h_2{}^2d\eta^2+dz^2 \tag{4.3}$$

であらわされる一般の筒座標に拡張できる：

$$\left.\begin{aligned} E_\xi &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial z}+\frac{i\omega\mu}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}, & H_\xi &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial z}-\frac{i\omega\varepsilon}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \\ E_\eta &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial z}-\frac{i\omega\mu}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}, & H_\eta &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta\partial z}+\frac{i\omega\varepsilon}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \\ &(E_z \text{ と } H_z \text{ とは } (4.2) \text{ に同じ}). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

導波管内の電磁波について，管に沿って $z$ 軸をとれば，壁面で $\boldsymbol{E}$ が満たさねばならない条件は $z$ 成分 $E_z$ と断面内の周囲に沿った接線成分 $E_\tau$ とが共に 0 になることである．壁面の外向法線 $\nu$ をとって，$\nu, \tau, z$ がこの順に右手系となるようにすれば (第4.1図)



第 4.1 図　$\nu, \tau$ の取り方

$$E_\tau = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau\partial z}-i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}, \tag{4.5}$$

したがって壁面において

$$\text{境界条件} \quad \Phi=0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\nu}=0 \tag{4.6}$$

が要求される．

境界条件が $\Phi$ と $\Psi$ とについて別々に離れている結果，つねに $\Phi=0$ が満たされている場と，つねに $\Psi=0$ が満たされている場とは分離して存在しうることになる．前の場合は $z$ 成分が $H_z$ のみであることより H 型の場あるいは H 波と呼ばれ，後の場合は同様の理由で E 型の場あるいは E 波と呼ばれる．そうして一般の場 (4.2) は H 型と E 型との和で表わされている．

さて管の中の電磁場として，角周波数 $\omega$ の H 型をとり，

$$\Psi=\psi(x,y)\exp(-i\omega t+i\beta z) \tag{4.7}$$

とおく．(*4.1*) に入れ

$$\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2=\omega_c{}^2\varepsilon\mu \tag{4.8}$$

とおけば

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\omega_c{}^2\varepsilon\mu\psi=0 \tag{4.9}$$

を得る．$\psi$ の境界条件は明らかに $\Psi$ と同じで

境界条件 $$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}=0 \tag{4.10}$$

が要求される．$\psi$ の満たすべき微分方程式 (*4.9*) と境界条件 (*4.10*) とを合せ考えるとき，これは二次元の**固有値問題**で，$\omega_c{}^2\varepsilon\mu$ が**固有値**といわれる一連の飛び飛びの値のいずれかに等しいときに，**固有函数** $\psi(x,y)$ が存在する．$\omega_c{}^2\varepsilon\mu$ がこれらの固有値の一つであるとき (*4.8*) によって $\beta^2$ が定まり，この伝播定数 $\beta$ と固有函数 $\psi$ とによって作られた $\Psi$ が一波型の波をあらわすことになる．

(*4.8*) によれば，$\omega>\omega_c$ なる場合は $\beta^2>0$ にして，その波は**進行波**として遠方まで伝わるものをあらわす．$\omega<\omega_c$ のときは $\beta^2<0$ にして，その波は指数函数的に振幅を減ずる**減衰波**をあらわす．振動の角周波数 $\omega$ がちょうど $\omega_c$ に等しいときは遮断 (cut-off) される境目であるから，$\omega_c$ は**遮断角周波数**といわれ，その $2\pi$ 分の 1 は**遮断周波数**あるいは臨界周波数と呼ばれる．またそれに相当する自由空間波長

$$\lambda_c=2\pi/\omega_c\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{4.11}$$

は**遮断波長**あるいは臨界波長と名づけられる．

$\beta$ が実数であるとき，すなわち進行波をあらわすとき，管内波長を guide の頭文字をつけて $\lambda_g$ で示せば

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}} \tag{4.12}$$

であり，また位相速度は

$$\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}} \tag{4.13}$$

で与えられる．すなわち管内波長 (*4.12*) は自由空間波長 $\lambda=2\pi/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ に比

べ，位相速度 (*4.13*) は自由空間における速度 $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ に比べいずれも $1/\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}$ 倍に大きくなっている.

位相速度が管内で増大しているのに反し，エネルギーが伝わる速さ $v_g$ は当然 $v$ よりも小さいであろう．ここで $v_g$ を種々の観点から計算してみよう.

(i) 管内波は一般に複雑な形をしているが，それは無数の (特殊な場合には有限の) 平面波が合成されてできたものだという見方をすることが許されよう．一つの波型をとれば，それが一定の管内波長をもつことより，このような要素的な平面波は管の方向と

$$\lambda=\lambda_g\cos\theta$$

なる角 $\theta$ だけいずれも傾いていると考えられる．要素的な平面波に関してはエネルギーは自由空間における速度 $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ で伝わると考えるのが当然であるから，エネルギーが管の方向に伝わる速さは

$$v\cos\theta=v\frac{\lambda}{\lambda_g}=v\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2} \tag{4.14}$$

で与えられる.

(ii) 管の単位長に含まれる平均のエネルギーは，断面にわたって作られた積分

$$\frac{1}{4}\iint(\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}+\mu\boldsymbol{H}\cdot\overline{\boldsymbol{H}})dx\,dy \tag{4.15}$$

で与えられるが，この量は (*4.7*) から定まる場については

$$\frac{\mu}{4}\{(\omega^2\varepsilon\mu+\beta^2)D(\psi)+(\omega_c{}^2\varepsilon\mu)^2J(\psi)\} \tag{4.16}$$

となる．ただしここに $D(\psi)$ と $J(\psi)$ とは断面にわたってとられた積分

$$\left.\begin{aligned}D(\psi)&=\iint\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy,\\ J(\psi)&=\iint\psi^2dx\,dy\end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

を意味する．(*4.16*) の第二項は次のように変形される：

$$\begin{aligned}\iint\omega_c{}^2\varepsilon\mu\psi^2dx\,dy&=-\iint\psi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dx\,dy\\ &=\iint\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+\oint\psi\frac{\partial\psi}{\partial \nu}d\tau.\end{aligned}$$

ここに第二の変形は Green の定理を用いてあり，最後の項は周囲に沿った閉じた線積分であるが，$\partial\psi/\partial\nu=0$ のためにこの項は消える．すなわち

$$D(\psi)=\omega_c{}^2\varepsilon\mu J(\psi). \tag{4.18}$$

したがって (4.16) は，$\omega_c{}^2\varepsilon\mu=\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2$ を用いて，

$$\frac{\mu}{2}\omega^2\varepsilon\mu D(\psi) \tag{4.19}$$

となる．一方管を流れるエネルギーは Poynting ベクトルの平均

$$\frac{1}{2}\int\int \boldsymbol{E}\times\overline{\boldsymbol{H}}\,dx\,dy=\frac{\mu}{2}\omega\beta D(\psi) \tag{4.20}$$

で与えられるので，エネルギーの流れる速さ $v_g$ は (4.20) を (4.19) で除して得られる量

$$v_g=\frac{\beta}{\omega\varepsilon\mu}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2} \tag{4.21}$$

で与えられる．

(iii) 上に得られた $v_0$ はまた $(d\beta/d\omega)^{-1}$ に等しいが，これは**群速度** (group velocity) と呼ばれる量である．群速度がエネルギーの送られる速さを示すという事柄は多くの教科書に記されている．

以上もっぱら H 波について述べたが，E 波についても事情はほとんど同じで

$$\Phi=\varphi(x,y)\exp(-i\omega t+i\beta z)$$

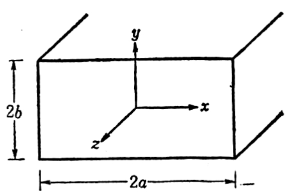
で定義される $\varphi$ について論じればよい．$\varphi$ が $\psi$ と異なる点はただ

$$\text{境界条件}\qquad \varphi=0 \tag{4.22}$$

にある．

## §5 長方形管

前節の所論を長方形断面の管について具体的に進めてゆこう．断面の中央を貫いて $z$ 軸をとり，長方形の長辺および短辺の長さをそれぞれ $2a$ および $2b$ とし，長辺および短辺に平行にそれぞれ $x$ および $y$ の座標軸をとる (第 5.1 図)．まず H 型の振動について調べる．$\psi(x,y)$ に関する固有値問題 (4.9)，(4.10) は変数分離でたやすく解けて，固有函数



第 5.1 図 長方形管における座標系の取り方

$$\psi(x,y)=\cos\frac{m\pi(x+a)}{2a}\cos\frac{n\pi(y+b)}{2b} \tag{5.1}$$

とそれに対する固有値

$$\omega_c{}^2\varepsilon\mu=\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \tag{5.2}$$

とが得られる．（ただし固有函数に掛る任意の定数は省くことにする．以下同じ.）ここに $m,n$ は整数

$$m,n=0,1,2,\cdots \tag{5.3}$$

であるが，$m$ と $n$ とがともに0となる場合は除外される．何となればそのとき $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0$ となって意味を失うからである．(5.1) の固有函数を含む $\Psi$ 函数

$$\Psi=\psi(x,y)\exp(-i\omega t+i\beta z), \tag{5.4}$$

$$\beta^2=\omega^2\varepsilon\mu-\omega_c{}^2\varepsilon\mu \tag{5.5}$$

によって定まる波は $\mathrm{H}_{mn}$ 型と名づけられる．

E 波については，固有の $\varphi$ 函数

$$\varphi(x,y)=\sin\frac{m\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{n\pi(y+b)}{2b} \tag{5.6}$$

によって作られた $\Phi$ 函数

$$\Phi=\varphi(x,y)\exp(-i\omega t+i\beta z) \tag{5.7}$$

より $\mathrm{E}_{mn}$ 型が定まる．このさい $\beta$ はやはり (5.5) および (5.2) であらわされるが，$m,n$ は今度は1より始まる

$$m,n=1,2,3,\cdots \tag{5.8}$$

である．

さし当り正方形 $a=b$ の場合を考えなければ，すなわち $a>b$ とすれば，$\omega_c{}^2\varepsilon\mu$ が最も小さい振動型は明らかに $\mathrm{H}_{10}$ 型である．この意味で $\mathrm{H}_{10}$ 波は最も通りやすい型であるといえる．通常この**基本波** $\mathrm{H}_{10}$ 型のみの進行を許して，他のすべての型を遮断するように管の大きさを選ぶが，こうすることによって種々の利点が得られる．そのためには

$$\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2<\omega^2\varepsilon\mu<\left(\frac{\pi}{a}\right)^2,\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2, \tag{5.9}$$

自由波長 $\lambda=2\pi/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ でいえば

$$4a>\lambda>2a,\ 4b \tag{5.10}$$

でなければならない.

$$\Psi=\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp(-i\omega t+i\beta z), \tag{5. 11}$$

$$\beta^2=\omega^2\varepsilon\mu-(\pi/2a)^2 \tag{5. 12}$$

で定まる基本波につき, $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ を求めれば時間因子を省略して次のようになる.

$$\left.\begin{aligned} E_y&=i\omega\mu\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp(i\beta z),\\ H_x&=-i\beta\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp(i\beta z),\\ H_z&=\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp(i\beta z). \end{aligned}\right\} \tag{5. 13}$$

この式で

$$\beta=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\theta,\quad \pi/2a=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\theta \tag{5. 14}$$

とおき, cos と sin とを指数函数に書き直してみれば, 上記の場は $z$ 軸と $\pm\theta$ をなす方向に進む二つの平面波の和であらわされることは容易にわかる. 前節で採用した, 管内波を平面波の合成と見なす考えは, 長方形管については極めて明瞭である.

一般に一つの固有値に二つ以上の独立な固有函数が属しているとき, その固有値は縮退をしているという. 長方形管の場合固有値 (5. 2) には $m\neq0$, $n\neq0$ のとき, $\mathrm{H}_{mn}$ 型と $\mathrm{E}_{mn}$ 型とが属しているから, これらは少なくとも二重に縮退していることになる. なお正方形断面のときは, 最低の固有値が縮退して $\mathrm{H}_{10}$ 型と $\mathrm{H}_{01}$ 型とが同じ遮断波長をもつことになり, このことは望ましいことでないから実際には用いられない. 長辺 $2a$ が短辺 $2b$ の二倍に等しいときは, 最も通りやすい $\mathrm{H}_{10}$ 波につぐ波型の固有値が縮退して, 第一高調波は $\mathrm{H}_{01}$ 型と $\mathrm{H}_{20}$ 型との組合せとなる. この形はただ一つの進行波型を有するという条件内で管の断面を割合大きく採れるから好都合である.

次に固有函数 $\psi(x,y)$ あるいは $\varphi(x,y)$ の対称関係と節点とを調べてみよう. まず $\mathrm{H}_{10}$ 型では

$$\psi(-x,y)=-\psi(x,y),\quad \psi(x,-y)=\psi(x,y), \tag{5. 15}$$

すなわち $x$ について奇函数, $y$ について偶函数である. $x$ と $y$ と両方についての偶函数を "偶" とおけば, $\mathrm{H}_{10}$ の対称関係は

$$\text{H}_{10}\text{ 型:}\quad \psi = x\times\text{偶} \tag{5.16}$$

とかかれる．このとき $x=0$ は $\psi=0$ になる所，すなわち $\psi$ の節線である．$\text{H}_{01}$ 型の対称関係は

$$\text{H}_{01}\text{ 型:}\quad \psi = y\times\text{偶} \tag{5.17}$$

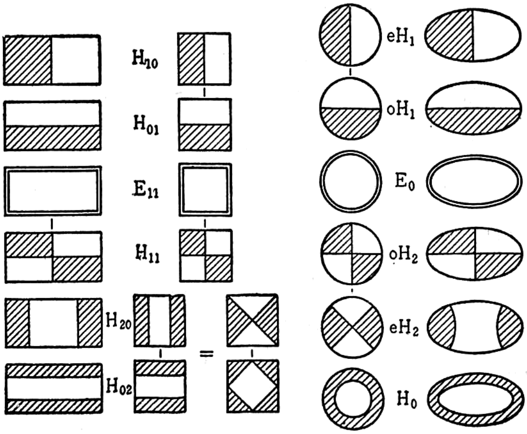
であるが，逆にこの対称関係を満たす範囲で最小固有値をもつものが $\text{H}_{01}$ 型に外ならない．さらに $\psi = xy\times$偶 の範囲で最小の固有値をもつものが $\text{H}_{11}$ 型であり，$\psi=$偶 の範囲では $a>b$ のとき $\text{H}_{20}$ 型である．これらの固有函数の節線は第 5.2 図の左半分に示したようになっている．図で縦棒の印を入れて結びつけた振動型は同じ固有値に属することを意味する．$a=b$ の場合は一般の長方形管の極限として理解されるが，多少説明を加えておこう．この場合，同一の固有値に属する $\text{H}_{20}$ 型と $\text{H}_{02}$ 型とはともに $x$ 軸と $y$ 軸とについて対称であり，したがってこれらの一次結合である一般の固有函数も $x, y$ 両軸について対称である．その中で

$$\psi(x,y) = \cos\frac{2\pi(x+a)}{2a} - \cos\frac{2\pi(y+a)}{2a},$$

$$\psi(x,y) = \cos\frac{2\pi(x+a)}{2a} + \cos\frac{2\pi(y+a)}{2a}$$

を図に書き入れてあるが，これは円管の場合との対応の上からである．

次に E 型については，最も遮断周波数の低い $\text{E}_{11}$ 型の固有函数は $x$ と $y$ とについて偶函数で，節線は縁以外にない．




第 5.2 図　長方形管および楕円管の固有振動

一般に E 振動における $\varphi$ 函数の値は，同じ断面形の枠に張られた一様な膜の振動と同じ形をしており，H 振動における $\psi$ 函数は同じ断面をもつ容器中の水の振動における水面の高さに相当している．この種の類似は力学的な振動の問題に馴れている人には，管内波の様子を考察し，理解する上に役立つことが多い．

第5.2図の右端は，断面が楕円形の導波管の諸振動型を示したものである．楕円管の波型につける名称は，通常，長方形管とは全く別な方式による．断面を

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>b \tag{5.18}$$

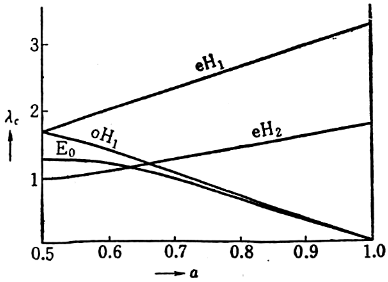
とするとき，$\psi(x,y)$ が $y$ について偶函数：

$$\psi(x,-y)=\psi(x,y)$$

なる H 型を even の頭文字をつけて eH 型と名づけ，$y$ について奇函数：

$$\psi(x,-y)=-\psi(x,y)$$

なる H 型を odd に因んで oH 型と呼ぶ．E 型についても $\varphi(x,y)$ の $y$ に関する even, odd によって eE, oE を定義する．さらに $\psi$ の節線として $y$ 軸のみをもつ eH 型を $eH_1$，$x$ 軸のみを節線とする oH 型を $oH_1$ と名づける．$eH_1$ が最も通りやすいことは長方形管からの類推より，または楕円形の容器の中の水の振動などからも予想される．一般に楕円を円に変えてゆくとき，その振動型がもつ放射状の節線の本数を右下に添えて $eH_n$ などを定義する．even と odd とを区別し，H 型と E 型とを区別し，さらに放射状節線の数 $n$ を与えても未だ振動型は確定しないが，その中で最小の固有値をもつものを単に $eH_n$ などと呼ぶのが普通である．右添字 $n$ が 0 のときは常に even で $oH_0$, $oE_0$ は存在しないことは明らかである．各振動型における $\psi$ または $\varphi$ の節線の位置を示せば第5.2図の右半分のようになる．




第 5.3 図　楕円形 $(a+b=1)$ における重要な波型の遮断波長

楕円管において $eH_1$ について固有値の小さい振動型は $a$ と $b$ との差が少ないときは当然 $oH_1$ であるし，また $a\gg b$ のときは $eH_2$ であることも理解できる．その中間では $oH_1$, $eH_2$, $E_0$ の

いずれかであろう．実際これら四種の振動型について，遮断波長 $\lambda_c$ を変分法で計算した結果[1]を第5.3図に示す．この図より，楕円管においても，長方形管と同様，最も通りやすい型とそれに次ぐ第一高調波とはともにH型に属することがわかる．

## §6　直方体空洞の中の固有振動

前節で取り扱った長方形管について，$E_{11}$ 型の振動の伝播定数がちょうど 0 になる特殊な場合：

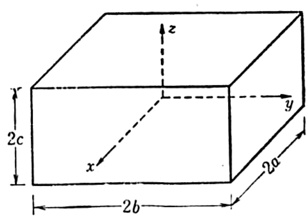
$$\Phi=\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{\pi(y+b)}{2b}\exp(-i\omega t), \tag{6.1}$$

$$\omega^2\varepsilon\mu=(\pi/2a)^2+(\pi/2b)^2 \tag{6.2}$$

を考える．このとき $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ は時間因子を略して

$$\left.\begin{aligned}E_z&=\omega^2\varepsilon\mu\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{\pi(y+b)}{2b},\\H_x&=-i\omega\varepsilon\frac{\pi}{2b}\sin\frac{\pi(x+a)}{2a}\cos\frac{\pi(y+b)}{2b},\\H_y&=i\omega\varepsilon\frac{\pi}{2a}\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{\pi(y+b)}{2b}\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

で与えられ，他の成分はすべて 0 となる．上式で表わされる場は $E_x=E_y=0$ をつねに満たしているから，管の二個所たとえば $z=\pm c$ に導板を入れて，その間の空洞における場としても一つの可能な状態である．言葉をかえれば (6.3) は三辺長 $2a, 2b, 2c$ の直方体空洞（第6.1図）の固有振動の一つであり，その角周波数 $\omega$ は (6.2) の形で $2a, 2b$ と関係する．すなわちこの固有周波数 $\omega/2\pi$ は導波管の $E_{11}$ 型の遮断周波数に等しい．




第 6.1 図　直方体空洞

(6.3) を見ると $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とでは位相が $\pi/2$ だけ異なることに気がつく．さらに場の平均のエネルギーを計算してみれば，容易に

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{4}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}|E_z|^2dx\,dy\,dz=\frac{\varepsilon}{2}abc(\omega^2\varepsilon\mu)^2,\\&\frac{\mu}{4}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}(|H_x|^2+|H_y|^2)dx\,dy\,dz=\frac{\mu}{2}abc\,\omega^2\varepsilon^2\left\{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2\right\}\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

(1)　編末文献〔16〕§11 参照．

となるが，これは (*6.2*) を参照して相等しいことを知る．すなわち空洞内の電磁振動について電気的エネルギーの時間平均と，磁気的エネルギーの時間平均とは相等しく，電気的ならびに磁気的エネルギーの振動性の移りかわりが空洞内で行われるわけである．このことは空洞壁を流れる電流に着眼すれば一層具体的である．ある時刻に空洞壁の上面に正電荷，下面に負電荷があり，電流は流れていないとする ($|\boldsymbol{E}|$ 極大, $\boldsymbol{H}=0$)．そうすれば電位の高い上面から電位の低い下面へと必然的に壁を伝わって電流が流れる．上面の正電荷と下面の負電荷とが共に消えた時刻に電流は極大となり ($|\boldsymbol{H}|$ 極大, $\boldsymbol{E}=0$)，さらに誘導起電力によって流れ続ける．そうして初めと同じ量だけ上面に負電荷を，下面に正電荷を帯びたときに電流は止み ($|\boldsymbol{E}|$ 極大, $\boldsymbol{H}=0$)，以下これを繰りかえす．

(*6.3*) はこの空洞の一つの固有振動であるが，一般の固有振動は波動方程式と境界条件とを満たす

$$\varPhi=\sin\frac{m\pi(x+a)}{2a}\sin\frac{n\pi(y+b)}{2b}\cos\frac{l\pi(z+c)}{2c}\exp(-i\omega t) \qquad (6.5)$$

によって定まる場と，同様の

$$\varPsi=\cos\frac{m\pi(x+a)}{2a}\cos\frac{n\pi(y+b)}{2b}\sin\frac{l\pi(z+c)}{2c}\exp(-i\omega t) \qquad (6.6)$$

で定まる場との結合である．そうしてこの場合 $\omega$ との関係は

$$\omega^2\varepsilon\mu=\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{2c}\right)^2 \qquad (6.7)$$

で与えられる．以上 $m, n, l$ は $0, 1, 2, \cdots$ の整数であるが，三個のうち 0 になるものは高々一個に限る．したがってもし三辺のうち最も短いものが $2c$ であれば，すべての型の固有振動の中で周波数が最低のもの (**基本振動**) は

$$m=n=1, \quad l=0 \qquad (6.8)$$

にして，これは (*6.3*) にほかならない．

(*6.5*) で定まる E 振動を $\mathrm{E}_{mnl}$ 型, (*6.6*) で定まる H 振動を $\mathrm{H}_{mnl}$ 型の固有振動と呼ぶことがあるが，元来直方体の空洞では三つの座標軸は同じ資格をもつから，この区別には大した意義はない．実際 $\mathrm{E}_{110}$ 型の (*6.3*) は，もし $\boldsymbol{E}$ の方向を $y$ 軸にとれば $\mathrm{H}_{101}$ 型と呼ばれることになる．このとき $\mathrm{H}_{101}$ 型振動は，長方形管の中を正および負の方向に伝わる二つの $\mathrm{H}_{10}$ 波 (正方向への波は (*5.13*) であり，負方向への波は同式で $\beta$ の符号を変えたもの) を加え合わせて作

られた定常波と同じ形である.

## §7 電磁ポテンシアル

Maxwell の方程式は場のベクトル $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の間に成立すべき条件

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0 \tag{7.1}$$

と，それらが場の源 $\boldsymbol{J}, \rho^*$ とに関係する有様

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho^* \tag{7.2}$$

とから構成されている．一般に $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{F}$ は，ポテンシアルと呼ばれる或るスカラーの grad として表わし，そのポテンシアルを用いることによって数理的な取扱いが著しく簡単になることはよく知られている．(7.1) を満たす $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ にも一種のポテンシアルが導入される．(7.1) の第二式より

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{7.3}$$

とおき，第一式に代入すれば

$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

となる．これより

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{7.4}$$

とおくことができる．$\boldsymbol{A}$ はベクトル・ポテンシアル，$\phi$ はスカラー・ポテンシアルと呼ばれる．$\boldsymbol{A}$ および $\phi$ は一義的には定まらないで，任意のスカラー函数 $f$ をとって上の $\boldsymbol{A}, \phi$ の代りにそれぞれ

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\,f, \quad \phi'=\phi+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{7.5}$$

を用いても同じ $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ が表わされる．

さて (7.2) に着目するに当り，媒質の $\varepsilon, \mu$ が一定であるような一様な等方性電媒質を問題とする:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \quad \sigma=0. \tag{7.6}$$

したがって (7.2) の $\boldsymbol{J}, \rho^*$ は外から与えられる源と解釈する．(7.3), (7.4) を (7.2) に代入すれば

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\mu\boldsymbol{J}, \tag{7.7}$$

$$\nabla^2\phi+\mathrm{div}\,\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho^*. \tag{7.8}$$

ここで上式の一つの特解 $\boldsymbol{A}', \phi'$ をとり

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

なる形式に (7.5) を代入すれば

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}'+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\nabla^2 f-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{7.9}$$

を得る．よって右辺を 0 にするように $f$ を選ぶとすれば, $\boldsymbol{A}, \phi$ の間に一つの副条件 (いわゆる Lorentz の条件)

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{7.10}$$

をおくことができる．そうすれば (7.7), (7.8) は

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\mu\boldsymbol{J}, \tag{7.11}$$

$$\nabla^2\phi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho^* \tag{7.12}$$

となる．あるいは $\nabla^2=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$ を用いて, (7.11) は (7.12) と同じ形

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J} \tag{7.13}$$

にもち来しうる．こうして, Maxwell の方程式を積分することは, 同じ形の微分方程式を満たす二種のポテンシアル $\boldsymbol{A}$ と $\phi$ とを決めることに帰着した．

ここで少しくわき道に入り

$$\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{M}_i=\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{H} \tag{7.14}$$

($\varepsilon_0, \mu_0$ は真空中の定数) で定義される電気的ならびに磁気的の偏極ベクトルを考える．添字 $i$ は induced polarization (**誘起された偏極**) の意味を表わして, 後出の似た量と区別する．真空中ではいうまでもなく $\boldsymbol{P}_i$ も $\boldsymbol{M}_i$ も 0 である．この関係を用いて (7.2) より $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ とを消去すれば

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{P}_i}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}_i\right),$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho^*-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}_i)$$

を得るが，この関係は次のように解釈される．場の中に物質が存在することは，

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}_i}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}_i$$

の密度の電流分布と，

$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}_i$$

の密度の電荷分布とに同等である．

そこで，外部より与えられる $\boldsymbol{J}$ と $\rho^*$ とに対して，同じ形

$$\boldsymbol{J}=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M},\quad \rho^*=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} \tag{7.15}$$

で関連する二つのベクトル $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{M}$ とを導入する．$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{M}$ とは $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H}$ によらず初めから外部より与えられたもので**固定された偏極** (fixed polarization) といわれる．今度は誘起された偏極の方は $\varepsilon$ と $\mu$ との中に含まれている．$\boldsymbol{P}$ はたとえば空中線の各部の双極子能率の密度を表わすものであり，$\boldsymbol{M}$ は同様に磁気双極子の能率密度であるが，磁気双極子はたとえば小さい環状電流として実現される．

この $\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{M}$ をそれぞれ源とする電気的および磁気的の Hertz ベクトル $\Pi_{\mathrm{e}}$ および $\Pi_{\mathrm{m}}$ を

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\Pi_{\mathrm{e}}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_{\mathrm{e}}}{\partial t^2}&=-\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{P},\\ \nabla^2\Pi_{\mathrm{m}}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_{\mathrm{m}}}{\partial t^2}&=-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

によって導入すれば

$$\boldsymbol{A}=\varepsilon\mu\frac{\partial \Pi_{\mathrm{e}}}{\partial t}+\mu\,\mathrm{rot}\,\Pi_{\mathrm{m}},\quad \phi=-\mathrm{div}\,\Pi_{\mathrm{e}} \tag{7.17}$$

とおくことにより，(7.12)，(7.13) および副条件 (7.10) が同時に満たされる．

なおここで上記の諸形式の相対論的不変性について一言しておくことは，導入された諸量の意味を正しく摑む上に役立つであろう．$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ とより成る六成分の量をいわゆる六元ベクトル（あるいは四次元の逆対称のテンソル）と見なせば，(7.1) は一つのテンソル形式にまとめられ，$\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{D}$ とで六元ベクトルを作り，$\boldsymbol{J}$ と $\rho$ とで**四元電流**といわれる四元ベクトルを作れば，(7.2) はまた一つのテンソル形式にまとめられる．さらに $\boldsymbol{A}$ と $\phi$ とで**四元ポテンシアル**と呼ばれる四元ベクトルを作れば (7.3) と (7.4) とは一形式にまとめられ，(7.

12), (7. 13) も一つの四次元のベクトル式となる．次に $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{M}$ とで六元ベクトルを作れば (7. 15) は相対論的に不変な形となり，最後に (7. 16) により $\Pi_e$ と $\Pi_m$ とを組み合わせた Hertz の六元ベクトルを作れば (7. 17) は一つのテンソル式となる．

(7. 17) を (7. 3), (7. 4) に代入すれば，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ とを Hertz ベクトルで表わした式を得る：

$$\boldsymbol{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_e-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_e}{\partial t^2}-\mu\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi_m}{\partial t}, \tag{7.18}$$

$$\boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t}+\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi_m.$$

$\boldsymbol{M}=0$ の場所では $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu$ は (7. 16) を用いて $\boldsymbol{E}$ と似た形の

$$\boldsymbol{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_m-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_m}{\partial t^2}+\varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t} \tag{7.19}$$

で表わされる．

(7. 18) および (7. 19) について，$\Pi_e, \Pi_m$ は同一の $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ に対して一義的に定まるわけではない．実際たとえば

$$\nabla^2 f-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0 \tag{7.20}$$

を満たす任意の $f$ を用いて

$$\Pi_e=\left(0,\,-\frac{\partial f}{\partial z},\,\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \Pi_m=\left(\varepsilon\frac{\partial f}{\partial t},\,0,\,0\right) \tag{7.21}$$

とおき，これより $\boldsymbol{E}$ ならびに $\boldsymbol{H}$ を計算すればいずれも 0 となることはすぐわかる．また同様に

$$\Pi_e=\left(\mu\frac{\partial f}{\partial t},\,0,\,0\right),\quad \Pi_m=\left(0,\,\frac{\partial f}{\partial z},\,-\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{7.22}$$

も 0 の場を与える．これらの関係より $\Pi_e, \Pi_m$ の合計六個の成分のうち二個たとえば $\Pi_e$ の $z$ 成分 $\Phi$, $\Pi_m$ の $z$ 成分 $\Psi$ 以外を 0 にとることが，特殊の場合（たとえば $z$ 方向に進む平面波）を除いて，許される．そのようにとった場合が，基礎の式 (4. 2) に外ならない．

(7. 16) の解は遅延ポテンシアルの公式により直ちに書き下すことができる．特に単弦振動：

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0\exp(-i\omega t),\quad \boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_0\exp(-i\omega t) \tag{7.23}$$

の場合は

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{e}}(x,y,z,t)&=\frac{\exp(-i\omega t)}{4\pi\varepsilon}\iiint\boldsymbol{P}_0(x',y',z')\frac{\exp(i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)}{r}dx'dy'dz',\\ \Pi_{\mathrm{m}}(x,y,z,t)&=\frac{\exp(-i\omega t)}{4\pi\mu}\iiint\boldsymbol{M}_0(x',y',z')\frac{\exp(i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)}{r}dx'dy'dz'\end{aligned}\right\}\tag{7.24}$$

で表わされる．ただし $r$ は源の点 $(x',y',z')$ と着目点 $(x,y,z)$ との距離である：

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.\tag{7.25}$$

$\boldsymbol{P},\boldsymbol{M}$ が或る一点 $(x_0,y_0,z_0)$ のごく近くを除いて0であるとき，すなわち双極子と見なしうるときは，その能率

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{p}_0&=\iiint\boldsymbol{P}_0(x',y',z')dx'dy'dz',\\ \boldsymbol{m}_0&=\iiint\boldsymbol{M}_0(x',y',z')dx'dy'dz'\end{aligned}\right\}\tag{7.26}$$

を用いて

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{e}}&=\frac{\boldsymbol{p}_0}{4\pi\varepsilon r}\exp[-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)],\\ \Pi_{\mathrm{m}}&=\frac{\boldsymbol{m}_0}{4\pi\mu r}\exp[-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)]\end{aligned}\right\}\tag{7.27}$$

で与えられる．ここに $r$ は点 $x_0,y_0,z_0$ と着目点との距離である．

## §8 補助定理

一つの小さい環状電流は，その面に垂直な磁気双極子でおきかえられる．ただし磁気双極子の方向は電流の向きと右ねじの関係にあり，能率は環の面積に $\mu$ と電流 $I$ とを乗じたものに等しい．逆に次のように述べることもできる：単位能率 $\exp(-i\omega t)$ の磁気双極子は，それに垂直な一辺長 $\delta$ の小正方形の周囲を（右ねじの向きに）流れる電流 $\boldsymbol{I}=(1/\mu\delta^2)\exp(-i\omega t)$ に相当する．この環状電流はまた，周囲に単位長あたりの能率

$$\frac{\boldsymbol{I}}{-i\omega}=\frac{\exp(-i\omega t)}{-i\omega\mu\delta^2}\tag{8.1}$$

の電気双極子が並んでいるものでおきかえられる．

さて $x_0,y_0,z_0$ の位置に $x$ 方向に向いた単位能率の磁（電）気双極子があるとき，それより生ずる場の Hertz ベクトル $\Pi_{\mathrm{e}},\Pi_{\mathrm{m}}$ を一まとめにして $\Pi^{\mathrm{m}x}(\Pi^{\mathrm{e}x})$

で表わし，$\Pi^{my}(\Pi^{ey})$ なども同様に定義する．このさい双極子の付近に他の物体があっても差支えなく，したがって $\Pi$ は一般には複雑な形をもつであろう．ここで上述のおきかえを用いれば，$\Pi^{mx}$ から導かれる場は

$$\frac{1}{-i\omega\mu\delta^2}\{(\Pi^{ez}\delta)_{y_0+\delta}-(\Pi^{ez}\delta)_{y_0}-(\Pi^{ey}\delta)_{z_0+\delta}+(\Pi^{ey}\delta)_{z_0}\}$$

$$=\frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{ez}-\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{ey}\right)$$

から導かれる場と同じものであることがわかる．この意味で

$$\Pi^{mx}=\frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{ez}-\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{ey}\right) \tag{8.2}$$

とおくことができる．さらに $x, y, z$ を順次にとり変えた関係式も導かれる．

特に問題の双極子のみが存在するときは，$\Pi$ は (7.27) で与えられる．このとき (8.2) の両辺の差

$$\left.\begin{aligned}\Pi_e &\equiv \Pi_e^{mx}-\frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi_e^{ez}-\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi_e^{ey}\right),\\ \Pi_m &\equiv \Pi_m^{mx}-\frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi_m^{ez}-\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi_m^{ey}\right)\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

は

$$f\equiv\frac{1}{4\pi r}\exp\left[-i\omega(t-\sqrt{\varepsilon\mu}\,r)\right] \tag{8.4}$$

を含んで

$$\left.\begin{aligned}\Pi_e &=\left(0, \frac{-1}{i\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial f}{\partial z_0}, \frac{1}{i\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial f}{\partial y_0}\right),\\ \Pi_m &=\left(\frac{1}{\mu}f, 0, 0\right)\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

となるが，これは 0 の場に導く (7.21) と相反 (reciprocal) の関係にある．すなわち (7.21) で

$$\frac{\partial}{\partial y} \text{ を } -\frac{\partial}{\partial y_0} \text{ に，} \quad \frac{\partial}{\partial z} \text{ を } -\frac{\partial}{\partial z_0} \text{ に}$$

それぞれおきかえれば (8.5) が得られる．

次に (7.22) から出発して，上記と逆に考えを進めてゆけば，(8.2) に対応して

$$\Pi^{ex}=\frac{-1}{-i\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{mz}-\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{my}\right) \tag{8.6}$$

が得られる．この関係は双極子のおきかえでいい表わせば次のようになる．単位能率 $\exp(-i\omega t)$ の電気双極子を，それに垂直な一辺長 $\delta$ の小正方形の周囲におかれた磁気双極子でおきかえれば，その能率は単位長あたり

$$\frac{-1}{-i\omega\varepsilon\delta^2}\exp(-i\omega t) \tag{8.7}$$

である．ここに分子の負号は方向が右ねじの向きに関して逆であることを示している．

(8.2) の右辺に

$$\Pi^{ey}=\frac{-1}{-i\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{mx}-\frac{\partial}{\partial x_0}\Pi^{mz}\right) \tag{8.8}$$

を入れれば

$$\left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}\right)\Pi^{mx}=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{mz}+i\omega\varepsilon\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{ez}, \tag{8.9}$$

同様にして

$$\left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}\right)\Pi^{ex}=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{ez}-i\omega\mu\frac{\partial}{\partial y_0}\Pi^{mz} \tag{8.10}$$

を得る．$\Pi^{my}, \Pi^{ey}$ については上式で $x_0\to y_0$, $y_0\to -x_0$ とおけばよい．これらの関係により，双極子が $z$ 方向にあるときの解 $\Pi^{ez}, \Pi^{mz}$ を用いて，他の任意の方向にある双極子に対する解が単なる演算によって得られる．

この補助定理（木原, 1947）は一般に筒座標を用いて電磁波に関する境界値問題を取り扱う際にしばしば有効に使うことができる．この一例が導波管内の輻射場の計算 (§9) に見られるが，円柱の外部の輻射場にも同様に適用しうる (§10)．さらにこの補助定理の極座標における表現も同様に作られる (§11)．

## §9 管の中での輻射

管内の輻射場を論ずる際の要素的な問題として，管内の一点 $x_0, y_0, z_0$ に単位能率 $\exp(-i\omega t)$ の双極子があるときの輻射を計算する．このさい双極子の向きが，管の軸すなわち $z$ 方向にある場合と，$z$ 軸に垂直方向にある場合とについて求めておけば，一般の場合はその一次結合として与えられる．

(i) 双極子が $z$ 軸に平行の場合，磁気双極子のときは輻射場は明らかに H 型にして，それを定める $\Psi$ 函数は，固有函数 $\psi_n(x,y)$ と，その波型の伝播定数 $\beta_n$ とを用いて

$$\Psi^{mz}=\sum_n A_n\psi_n(x,y)\exp[-i\omega t\pm i\beta_n(z-z_0)] \tag{9.1}$$

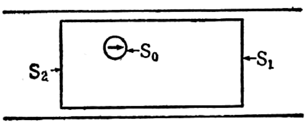
のごとく置くことができる．$\Psi$ の肩につけた mz は前節のように，$z$ 方向の magnetic な双極子によることを意味する．exp の変数中の複号は $z-z_0>0$ のとき上部を，$z-z_0<0$ のとき下部をとる．係数 $A_n$ を定めるために，(9.1) と仮想的な場

$$\Psi' = \psi_n(x,y)\exp[i\omega t - i\beta_n(z-z_0)] \tag{9.2}$$

との間に Green の定理

$$\iint\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial\nu}\right)dS = 0 \tag{9.3}$$

を適用する．ただし面積分の範囲は双極子を間にはさむ二断面 $S_1, S_2$ とその間の壁面とで囲まれた柱状体より，$x_0, y_0, z_0$ を中心とする小球を除いた部分の全境界面である (第 9.1 図)．$\partial/\partial\nu$ は領域より外部に向う法線に沿った微係数を意味する．そうすれば (9.3) の積分において壁面では被積分函数は



第 9.1 図　Green の定理 (9.3) の積分範囲

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} = \frac{\partial\Psi'}{\partial\nu} = 0$$

より 0 になり，二断面 $S_1, S_2$ では固有函数の直交性

$$\iint\psi_n\psi_m dx\,dy = 0 \qquad (n \neq m)$$

により (9.2) と同じ波型との積分だけが残る．これは $S_1$ では

$$\left.\begin{aligned}\iint_{S_1}\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right)dx\,dy &= 2i\beta_n A_n\iint\psi_n{}^2 dx\,dy\\ &= 2i\beta_n A_n J(\psi_n)\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

となるが，$S_2$ では 0 となる．次に小球面 $S_0$ での積分を求めるために，双極子を中心とする極座標 $r, \theta, \varphi$:

$$z-z_0 = r\cos\theta, \quad x-x_0 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y-y_0 = r\sin\theta\sin\varphi$$

を導入し，球面の半径を $r_1$ としよう．双極子の近くでは (7.27) の第二式より

$$\Psi = \frac{1}{4\pi\mu r}\exp(-i\omega t), \quad \frac{\partial\Psi}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\mu r^2}\exp(-i\omega t) \tag{9.5}$$

であるから

$$\iint_{S_0}\left(-\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial r}\right)r_1{}^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \frac{1}{\mu}\psi_n(x_0, y_0), \tag{9.6}$$

(*9.4*) と (*9.6*) との和が0であるから

$$2i\beta_n A_n J(\psi_n)+\frac{1}{\mu}\psi_n(x_0, y_0)=0, \tag{9.7}$$

したがって (*9.1*) は

$$\Psi^{mz}=\frac{1}{2\mu}\sum_n\frac{\psi_n(x_0, y_0)\psi_n(x, y)}{-i\beta_n J(\psi_n)}\exp[-i\omega t\pm i\beta_n(z-z_0)]. \tag{9.8}$$

電気双極子の場合も同様で

$$\Phi^{ez}=\frac{1}{2\varepsilon}\sum_n\frac{\varphi_n(x_0, y_0)\varphi_n(x, y)}{-i\beta_n' J(\varphi_n)}\exp[-i\omega t\pm i\beta_n'(z-z_0)] \tag{9.9}$$

で定まるE波を生ずる．ここに $\varphi_n$ は固有波型，$\beta_n'$ はその伝播定数である．

(ii) 双極子が $z$ 軸に垂直，たとえば $x$ 軸に平行である場合は前節の補助定理を利用して解決される．この場合はH波もE波もともに発生することは明らかで，単位能率の磁気双極子のとき (*8.9*) すなわち

$$\left.\begin{aligned}\left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial z_0{}^2}\right)\Psi^{mx}&=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Psi^{mz},\\ \left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial z_0{}^2}\right)\Phi^{mx}&=i\omega\varepsilon\frac{\partial}{\partial y_0}\Phi^{ez}\end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

より

$$\left.\begin{aligned}\Psi^{mx}&=\mp\frac{1}{2\mu}\sum_n\frac{\psi_n(x, y)}{D(\psi_n)}\frac{\partial\psi_n(x_0, y_0)}{\partial x_0}\exp[-i\omega t\pm i\beta_n(z-z_0)],\\ \Phi^{mx}&=-\frac{\omega}{2}\sum_n\frac{\varphi_n(x, y)}{\beta_n' D(\varphi_n)}\frac{\partial\varphi_n(x_0, y_0)}{\partial y_0}\exp[-i\omega t\pm i\beta_n'(z-z_0)].\end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}J(\psi_n)&=(\omega^2\varepsilon\mu-\beta_n{}^2)D(\psi_n),\\ J(\varphi_n)&=(\omega^2\varepsilon\mu-\beta_n'^2)D(\varphi_n).\end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

電気双極子のときは (*8.10*) すなわち

$$\left.\begin{aligned}\left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial z_0{}^2}\right)\Phi^{ex}&=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Phi^{ez},\\ \left(\omega^2\varepsilon\mu+\frac{\partial^2}{\partial z_0{}^2}\right)\Psi^{ex}&=-i\omega\mu\frac{\partial}{\partial y_0}\Psi^{mz}\end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

より

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{ex}&=\pm\frac{1}{2\varepsilon}\sum\frac{\varphi_n(x, y)}{D(\varphi_n)}\frac{\partial\varphi_n(x_0, y_0)}{\partial x_0}\exp[-i\omega t\pm i\beta_n'(z-z_0)],\\ \Psi^{ex}&=\frac{\omega}{2}\sum\frac{\psi_n(x, y)}{\beta_n D(\psi_n)}\frac{\partial\psi_n(x_0, y_0)}{\partial y_0}\exp[-i\omega t\pm i\beta_n(z-z_0)].\end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

双極子が $y$ 方向を向いているときは, (9. 11), (9. 14) において $x$ を $y$ に, $y$ を $-x$ にそれぞれ変えればよい.

(9. 10) を満たす一般の $\Phi, \Psi$ は (9. 11) の表式に, $(\omega^2\varepsilon\mu+\partial^2/\partial z_0{}^2)\chi=0$ の解 $\chi$ を加えたものであるが, 結果には影響がない. 何となれば $\Phi, \Psi$ は明らかに $z-z_0$ を通して $z$ と $z_0$ とに依存するから, $\chi$ もまたそうでなくてはならない: $(\omega^2\varepsilon\mu+\partial^2/\partial z^2)\chi=0$. もともと $(\nabla^2+\omega^2\varepsilon\mu)\chi=0$ ゆえ, $(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)\chi=0$; 境界で $\chi=0$ あるいは $\partial\chi/\partial\nu=0$ を満たす必要上 $\chi$ は $x$ と $y$ とによらない. したがってこのような $\chi$ から導かれる電磁波は (4. 2) よりつねに 0 となる. なお $z$ 方向に進む平面波は (4. 2) の形には表わせないが, いまの場合には問題とならない.

(iii)　以上単位双極子から輻射されるすべての波型を求めたが, ただ一つの進行波型 (H 波) をもつ普通の管ではその進行波型が特に重要である. この $\psi$ 函数および伝播定数を添字を略して, それぞれ単に $\psi(x, y)$ および $\beta$ と書こう. そうすれば管内の一点 $x_0, y_0, z_0$ に電気双極子 $(p_x, p_y, p_z)\exp(-i\omega t)$ ならびに磁気双極子 $(m_x, m_y, m_z)\exp(-i\omega t)$ があるとき, これより輻射される基本波を定める $\Psi$ 函数は次の形をとる:

$$\Psi=\frac{g\psi(x,y)}{-2i\beta\mu D(\psi)}\exp[-i\omega t\pm i\beta(z-z_0)], \tag{9. 15}$$

$$g=m_z(\omega^2\varepsilon\mu-\beta^2)\psi_0\mp i\beta\left\{m_x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0+m_y\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0\right\}$$
$$-i\omega\mu\left\{p_x\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0-p_y\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0\right\}, \tag{9. 16}$$

ここに添字 0 は $x_0, y_0, z_0$ における値の意味である (複号は同順).

$z-z_0>0$ なる部分で (9. 15) より得られる

$$\left.\begin{aligned}E_x&=i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial y}, & H_x&=i\beta\frac{\partial\Psi}{\partial x},\\E_y&=-i\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}, & H_y&=i\beta\frac{\partial\Psi}{\partial y},\\E_z&=0, & H_z&=(\omega\varepsilon\mu-\beta^2)\Psi\end{aligned}\right\} \tag{9. 17}$$

を用いて, $z-z_0$ の正方向へのエネルギー流量は

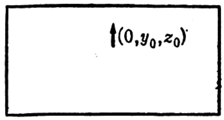
$$\frac{1}{2}\int\int(E_x\overline{H}_y-E_y\overline{H}_x)dx\,dy=\frac{\varphi|g|^2}{8\mu\beta D(\psi)} \tag{9. 18}$$

と計算される．$z-z_0$ の負の側へも同量だけ送り出されるから，結局輻射される全電力は

$$輻射電力=\frac{\omega|g|^2}{4\mu\beta D(\psi)} \tag{9.19}$$

となる．

最も広く用いられる場合を例にとって，長方形管（管の壁は $x=\pm a,\ y=\pm b,\ a>b$）の中におかれた単位能率の電気双極子からの輻射を求めておく．ただし双極子の位置と方向とは輻射を最大ならしめるごとく，すなわち $x_0=0$ の面内に $y$ 軸に平行にあるものとする（第 9.2 図）．



第 9.2 図　長方形管内に置かれた双極子

$$\psi=\cos\frac{\pi(x+a)}{2a} \tag{9.20}$$

をとれば

$$D(\psi)=2ab\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2,\quad g=-i\omega\mu\frac{\pi}{2a}$$

を用い (9.15) は

$$\Psi=\frac{\omega}{2b\pi\beta}\cos\frac{\pi(x+a)}{2a}\exp[-i\omega t\pm i\beta(z-z_0)], \tag{9.21}$$

また (9.19) は

$$輻射電力=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{2a\,2b}\frac{\omega\mu}{\beta},$$

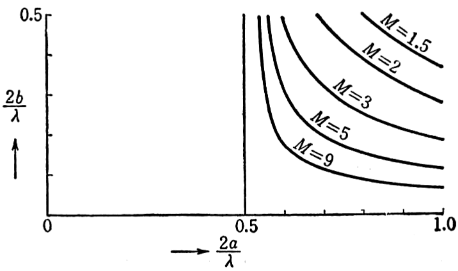
あるいは自由空間の波長 $\lambda=2\pi/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ を使って

$$=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{2a\,2b}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/4a)^2}} \tag{9.22}$$

となる．輻射電力を，同じ双極子が自由空間にあるときの輻射電力

$$\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\omega^2}{\lambda^2} \tag{9.23}$$

で除した量は重要な量であるが（いわゆる輻射抵抗の比に当る），これを**輻射倍率** (radiation

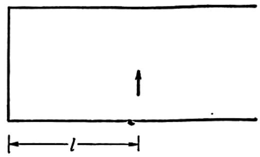


第 9.3 図　前図における輻射倍率 $M$

magnification）と名づけ $M$ であらわせば

$$M=\frac{3}{2\pi}\frac{\lambda}{2a}\frac{\lambda}{2b}\frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/4a)^2}} \qquad (9.24)$$

となる．この輻射倍率を，$2a/\lambda$, $2b/\lambda$ の函数として画けば第 9.3 図を得る．



第 9.4 図　反射板を持つ管での輻射

管が両側に開いておらず，第 9.4 図のように双極子の後方 $l$ の距離で管の一端が閉じているときは，前方に輻射される電力および倍率は上に求めた (9.22), (9.24) などにそれぞれ

$$\frac{1}{2}[1-\exp(2i\beta l)]^2$$

を乗ずればよい．

## §10　Bessel 諸函数の応用

円形断面の導波管の内を伝わる波，円筒形の空洞共振器の固有振動，無限円柱導体による電磁波の回折などは，本節で見るように円筒函数を用いて取り扱われる．また球状空洞の固有振動，球形導体による回折の問題には球函数と球 Bessel 函数とが用いられる (§11)．このような計算は相当複雑になるので，いままでの記法を変えて，できるだけ数式を短くしたい．まず場の量に共通な時間因子 $\exp(-i\omega t)$ をいちいち書くことを止める．また $\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{E}$, $\sqrt{\mu}\boldsymbol{H}$ を改めて $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ と書き，同様に $\sqrt{\varepsilon}\Phi$, $\sqrt{\mu}\Psi$ をそれぞれ $\Phi, \Psi$ で表わそう．なお

$$\omega^2\varepsilon\mu \equiv k^2$$

とおく．そうすれば，Maxwell 方程式 (3.5) は

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}-ik\boldsymbol{H}=0, & \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0,\\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}+ik\boldsymbol{E}=0, & \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0\end{array}\right\} \qquad (10.1)$$

となる．最後に双極子の能率に関し，(7.27) を参照して，大きさ $4\pi\sqrt{\varepsilon}$ の電気双極子と大きさ $4\pi\sqrt{\mu}$ の磁気双極子とを“単位能率”で呼ぶことにする．

1)　**円筒座標の導入**　一般に円筒座標 $(r, \theta, z)$ に関して，方程式 (10.1) は特殊な場合（たとえば $z$ 方向に進む平面波）を除き，波動方程式

$$\nabla^2\Phi+k^2\Phi=0, \quad \nabla^2\Psi+k^2\Psi=0 \qquad (10.2)$$

を満たす二つのスカラー函数 $\Phi(r, \theta, z)$, $\Psi(r, \theta, z)$ により

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}+ik\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, & H_r &= \frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}-ik\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \\ E_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial z}-ik\frac{\partial\Psi}{\partial r}, & H_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial z}+ik\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \\ E_z &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+k^2\Phi, & H_z &= \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+k^2\Psi \end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

で満たされる(§4, §7).

波動方程式 (10.2) は

$$\frac{\cos}{\sin} m\theta\cdot\frac{\cos}{\sin}\beta z\cdot Z_m(hr), \qquad m=0,1,\cdots \qquad (10.4)$$

の形の特解をもつ. ここに

$$h=\begin{cases}\sqrt{k^2-\beta^2}, & k^2>\beta^2,\\ i\sqrt{\beta^2-k^2}, & k^2<\beta^2\end{cases} \qquad (10.5)$$

にして, $Z_m$ は $m$ 次の円筒 (Zylinder) 函数を一般に示す.

2) **円筒形空洞共振器** 円筒形空洞共振器に応用するには, 円筒の軸を $z$ 軸に選べば, 特解 (10.4) が利用できる. ただし $r=0$ で正則なる必要上 $Z_m$ としては Bessel 函数 $J_m$ のみが採用できる. 固有振動には $\Psi=0$ (すなわち $H_z=0$) の E 型振動と $\Phi=0$ (すなわち $E_z=0$) の H 型振動とがある.

空洞の半径を $a$, 高さを $2c$ とし, 中央を原点にとれば, 一般の E 型振動を与える $\Phi$ 函数は

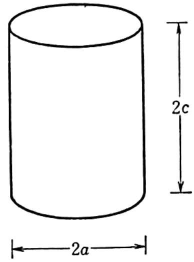
$$\Phi=\frac{\cos}{\sin} m\theta\cdot\cos\frac{l\pi(z+c)}{2c}J_m(hr), \qquad (10.6)$$

$$h^2=k^2-\left(\frac{l\pi}{2c}\right)^2, \qquad m,l=0,1,2,\cdots \qquad (10.7)$$

に定数を乗じたものである. 両底面での境界条件 $E_r=E_\theta=0$ はこれで満たされているが, 側面での境界条件は

$$J_m(ha)=0 \qquad (10.8)$$

で与えられる. $J_m(x)=0$ の正根を小さい方から順に $r_{m1}, r_{m2}, \cdots$ とおけば, それらに応じて固有振動数 $\omega$ が



第 10.1 図 円筒空洞共振器

$$\omega^2\varepsilon\mu\equiv k^2=\left(\frac{r_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{2c}\right)^2 \qquad (10.9)$$

から定まる. E 型の基本振動は $m=0,\ n=1,\ l=0$ の場合で

$$\Phi = J_0(2.40r/a), \quad \omega^2\varepsilon\mu = (2.40/a)^2. \tag{10.10}$$

H 型振動を与える $\Psi$ 函数は

$$\Psi = \frac{\cos}{\sin} m\theta \cdot \sin\frac{l\pi(z+c)}{2c} J_m(hr), \tag{10.11}$$

$$J'_m(ha) = 0 \tag{10.12}$$

と定まる．$J'_m(x) \equiv dJ_m(x)/dx$ の正根を小さい方から $r'_{m1}, r'_{m2}, \cdots$ とおけば，固有振動数 $\omega$ は

$$\omega^2\varepsilon\mu = \left(\frac{r'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{2c}\right)^2. \tag{10.13}$$

$r'_{mn}$ の最小のものは $r'_{11} = 1.84$ であるから，H 型の基本振動は $m=1$, $n=1$, $l=1$ の場合で

$$\Psi = \frac{\cos}{\sin} \theta \cdot \sin\frac{\pi(z+c)}{2c} J_1\left(\frac{1.84r}{a}\right), \tag{10.14}$$

$$\omega^2\varepsilon\mu = \left(\frac{1.84}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2c}\right)^2. \tag{10.15}$$

これは二重に縮退している．

空洞の高さ $2c$ が直径 $2a$ の 1.02 倍より大きい場合は H 型の基本振動が全体の基本振動になる．(*10.15*) で $c \to \infty$ とすれば，円形導波管の最も通りやすい波に対する遮断周波数が得られる．

**3）無限円柱の外部での双極子輻射**[(1)]　車，船，航空機などに取りつけられたアンテナでは，その指向性がこれら導体によって影響を受けるであろう．このような現象に関連して，無限円柱あるいは球 (§11) の形をした導体による回折を問題とする．このとき要素的な問題として，源がただ一つの単位能率の振動双極子である場合を解いておけば，一般の場合はそれに適当な係数を乗じて加え合せればよい．しかし双極子としては普通の電気的なものの他に，ループ・アンテナなどによって実現される磁気双極子をも考えねばならない．

円柱の軸を $z$ 軸に選び，半径を $a$ とおく．境界条件

$$r = a \quad \text{で} \quad E_\theta = E_z = 0$$

は (*10.3*) を参照して，次の関係で与えられる：

$$r = a \quad \text{で} \quad \Phi = 0, \quad \partial\Psi/\partial r = 0. \tag{10.16}$$

（i）双極子が円柱の軸に平行である場合には，それが電気的か磁気的かに

---

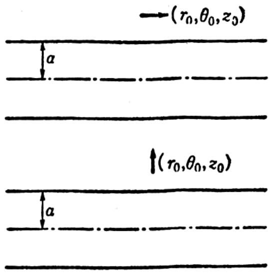
(1) 小谷正雄，木原太郎：応用数学力学 1 (1947), 195.

従って，それぞれ $\Psi=0$ か $\Phi=0$ かであり，前者はE波，後者はH波と呼ぶことが適当であろう．まず電気的双極子を考えよう．双極子の位置を $(r_0, \theta_0, z_0)$ とおけば，一次波を表わす $\Phi$ 函数

$$\Phi_0 = R^{-1}\exp(ikR), \qquad (10.17)$$

$$R^2=(z-z_0)^2+r_0^2+r^2-2r_0r\cos(\theta-\theta_0)$$

は $z-z_0$ と $\theta-\theta_0$ との偶函数で $r$ と $r_0$ とに関して対称であるから



第 10.2 図　円柱外部の双極子輻射

$$\Phi_0=\begin{cases} i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^\infty F_m(\beta)H_m(hr_0)J_m(hr)\cos\beta(z-z_0)d\beta, & \text{ただし } r_0>r, \\ i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^\infty F_m(\beta)J_m(hr_0)H_m(hr)\cos\beta(z-z_0)d\beta, & \text{ただし } r_0<r \end{cases} \qquad (10.18)$$

の形におくことができる．ここに $H_m$ は次数 $m$ の第一種 Hankel 函数（通常の $H_m^{(1)}$）であり，$h$ は (10.5) で与えられ，$\varepsilon_m$ は

$$\varepsilon_0=1, \quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=2$$

と約束する．

$F_m(\beta)$ を決めるために源が遠方 ($kr_0\gg1$, $kz_0\gg1$) にある漸近形を見よう．一般に $G(\beta)=G(-\beta)$ なる函数 $G$ について漸近的に

$$i\int_0^\infty G(\beta)H_m(hr_0)\cos\beta(z-z_0)d\beta$$
$$\sim(-i)^m G(k\cos\alpha)s_0^{-1}\exp(iks_0-ikz\cos\alpha), \qquad (10.19)$$

ただし $r_0=s_0\sin\alpha$, $z_0=s_0\cos\alpha$.

（証明）円筒函数の漸近形（(I 11.56) 参照）

$$H_m(hr_0)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi hr_0}}\exp\left(ihr_0-\frac{m\pi}{2}i-\frac{\pi}{4}i\right)$$

を，左辺すなわち

$$\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}G(\beta)H_m(hr_0)\exp(i\beta z_0-i\beta z)d\beta$$

に入れれば，左辺は漸近的に

$$\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi r_0}}\exp\left(-\frac{m\pi}{2}i-\frac{\pi}{4}i\right)\int_{-\infty}^{\infty}g(\beta)\exp\left[is_0 f(\beta)\right]d\beta,$$

ここに

$$f(\beta)=h\sin\alpha+\beta\cos\alpha,\quad g(\beta)=G(\beta)h^{-\frac{1}{2}}\exp(-i\beta z).$$

積分にとうげ道の方法（章末補註参照）を用いる．とうげの上，すなわち

$$f'(\beta)=0 \quad \text{の根} \quad \beta=\beta_0=k\cos\alpha$$

において

$$f(\beta_0)=k,\quad f''(\beta_0)=-(k\sin^2\alpha)^{-1}$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(\beta)\exp\left[is_0 f(\beta)\right]d\beta$$

$$\sim g(\beta_0)\exp\left[is_0 f(\beta_0)\right]\int\exp\left[\frac{i}{2}s_0 f''(\beta_0)(\beta-\beta_0)^2\right]d\beta$$

$$=g(\beta_0)\exp(iks_0)\int\exp\left[-\frac{is_0(\beta-\beta_0)^2}{2k\sin^2\alpha}\right]d\beta.$$

積分はとうげ越えの道，すなわち $\beta_0$ において実軸を 45° に左上から右下に切る道に沿って行う．結果は

$$\sqrt{\frac{2\pi k}{s_0}}\sin\alpha\, g(\beta_0)\exp\left(iks_0-\frac{\pi}{4}i\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi\sin\alpha}{s_0}}G(k\cos\alpha)\exp\left(iks_0-\frac{\pi}{4}i-ikz\cos\alpha\right),$$

これから公式 (*10. 19*) を得る．

この公式を $\Phi_0$ の展開式に用いれば

$$\Phi_0\sim W_0\sum\varepsilon_m(-i)^m\cos m(\theta-\theta_0)J_m(kr\cos\alpha)F_m(k\cos\alpha),$$

ここに

$$W_0=s_0^{-1}\exp(iks_0-ikz\cos\alpha).$$

一方 (*10. 17*) より

$$\Phi_0=R^{-1}\exp(ikR)$$

$$\sim W_0\exp\left[-ikr\sin\alpha\cos(\theta-\theta_0)\right]$$

$$=W_0\sum\varepsilon_m(-i)^m\cos m(\theta-\theta_0)J_m(kr\cos\alpha),$$

したがって

$$F_m=1,\qquad m=0,1,2,\cdots; \tag{10.20}$$

二次波を表わす $\Phi$ 函数を $\Phi_1$ とおけば，境界条件

$$r=a \quad \text{で} \quad \Phi_0+\Phi_1=0 \tag{10.21}$$

より，次の通り定まる：

$$\Phi_1=-i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}\frac{J_m(ha)}{H_m(ha)}H_m(hr_0)H_m(hr)\cos\beta(z-z_0)d\beta. \tag{10.22}$$

これで問題は一応解けたことになる．

十分遠い所 ($kr\gg1$, $kz\gg1$) での漸近形は

$$r=s\sin\alpha,\quad z=s\cos\alpha,$$
$$W=s^{-1}\exp(iks-ikz_0\cos\alpha)$$

とおけば

$$\Phi_0=R^{-1}\exp(ikR)\sim W\exp[-ikr_0\sin\alpha\cos(\theta-\theta_0)],$$
$$\Phi_1\sim -W\sum\varepsilon_m(-i)^m\cos m(\theta-\theta_0)H_m(kr_0\sin\alpha)\frac{J_m(ka\sin\alpha)}{H_m(ka\sin\alpha)}$$

で与えられる．ただし $\Phi_1$ の変形には公式 (*10. 19*) が再び使ってある．このとき，場の成分の漸近形のうち主要なもの——高次の微小量にならないもの——は $H_\theta$ と $E_\alpha\equiv E_r\cos\alpha-E_z\sin\alpha$ とで，これらはともに

$$E_\alpha\sim H_\theta\sim-(\Phi_0+\Phi_1)k^2\sin\alpha$$

で表わされる．

磁気双極子の場合は，一次波

$$\Psi_0=R^{-1}\exp(ikR)$$

に対して，二次波 $\Psi_1$ は境界条件

$$r=a \quad \text{で} \quad \frac{\partial\Psi_0}{\partial r}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}=0$$

より

$$\Psi_1=-i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}\frac{J_m'(ha)}{H_m'(ha)}H_m(hr_0)H_m(hr)\cos\beta(z-z_0)d\beta$$

(ダッシュは変数での微分) と定まる．遠方での漸近形は

$$\Psi_1\sim-W\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m(-i)^m\cos m(\theta-\theta_0)H_m(kr_0\sin\alpha)\frac{J_m'(ka\sin\alpha)}{H_m'(ka\sin\alpha)}.$$

場の成分で残るものは $E_\theta$ と $H_\alpha\equiv H_r\cos\alpha-H_z\sin\alpha$ とで，

$$E_\theta\sim-H_\alpha\sim(\Psi_0+\Psi_1)k^2\sin\alpha.$$

遠方での漸近形のみ必要であるときは，平面波の回折に関する解と，相反定理とを組み合わせて計算した方がやや簡単である．

(ii)　双極子が軸に垂直である場合には，$\Phi$ 函数と $\Psi$ 函数と両方必要となるが，それらは§8の補助定理を使って容易に求められる．$\Phi$ と $\Psi$ とをまとめて

$$\Pi \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}$$

とおき，$(r_0, \theta_0, z_0)$ の位置に $r$ 方向に単位能率の電気双極子があるときの $\Pi$ 函数を $\Pi^{er}$，同じく磁気双極子の場合を $\Pi^{mr}$ とおく．他の $\Pi^{e\theta}$ なども同様に定義する．そうすれば (*8.9*) の内容を円筒座標で書き表わしたものは

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}\right)\Pi^{er}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{ez}-\frac{ik}{r_0}\frac{\partial}{\partial \theta_0}\Pi^{mz},$$

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}\right)\Pi^{mr}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{mz}+\frac{ik}{r_0}\frac{\partial}{\partial \theta_0}\Pi^{ez},$$

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}\right)\Pi^{e\theta}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \theta_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{ez}+ik\frac{\partial}{\partial r_0}\Pi^{mz},$$

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}\right)\Pi^{m\theta}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \theta_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi^{mz}-ik\frac{\partial}{\partial r_0}\Pi^{ez}.$$

一例として，$r$ 方向の電気双極子をとれば，二次波を定める $\Phi_1^{er}$ と $\Psi_1^{er}$ とは次の通りに求められる．すなわち

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}\right)\Phi_1^{er}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\Phi_1^{ez}$$

$$=-i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}\frac{J_m(ha)}{H_m(ha)}H_m'(hr_0)H_m(hr)$$

$$\cdot\sin[\beta(z-z_0)]h\beta\,d\beta$$

より

$$\Phi_1^{er}=-i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}\frac{J_m(ha)}{H_m(ha)}H_m'(hr_0)H_m(hr)\sin\beta(z-z_0)\frac{\beta\,d\beta}{h};$$

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial {z_0}^2}\right)\Psi_1^{er}=-ik\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \theta_0}\Psi_1^{mz}$$

より

$$\Psi_1^{er}=-2k\sum_{m=1}^{\infty}m\sin m(\theta-\theta_0)\int_0^{\infty}\frac{J_m'(ha)}{H_m'(ha)}H_m(hr_0)H_m(hr)\cos\beta(z-z_0)\frac{d\beta}{hr_0}.$$

## §11　球 Bessel 函数の応用

### 1)　極座標の導入

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

で定義される極座標 $r,\theta,\varphi$ を導入し，前節初めに述べた記法を用いる．このとき，波動方程式

$$\nabla^2\frac{\Phi}{r}+k^2\frac{\Phi}{r}=0,\quad \nabla^2\frac{\Psi}{r}+k^2\frac{\Psi}{r}=0 \tag{11.1}$$

を満たす二つのスカラー函数 $\Phi$ および $\Psi$ を用いて

$$\left.\begin{aligned}
E_r&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+k^2\Phi, & H_r&=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+k^2\Psi,\\
E_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\,\partial r}+\frac{ik}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}, & H_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\,\partial r}-\frac{ik}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\\
E_\varphi&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\,\partial r}-\frac{ik}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, & H_\varphi&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi\,\partial r}+\frac{ik}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

とおくことにより，Maxwell の方程式 (*10.1*) は満たされる．なお，極座標での波動方程式 $\nabla^2U+k^2U=0$ の特解は

$$U=z_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi,\quad \begin{matrix}l=0,1,2,\cdots,\\ m=0,1,\cdots,l\end{matrix} \tag{11.3}$$

で与えられる．ここに $P_l^m$ は第一種の Legendre の陪函数, $z_l$ は spherical Bessel 函数

$$j_l(x)\equiv\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x),\quad h_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{l+1/2}(x),\quad \text{など} \tag{11.4}$$

をあらわす．もっとも，球対称 $l=0$ の場は $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ の全成分が消えるから意味がない．

**2)　球形空洞共振器**　球形の空洞共振器に応用するには，その中心を座標原点に選び，特解 (*11.3*) が利用できる．ただし $r=0$ で正則なる必要上 $z_l$ としては $j_l$ のみが採用できる．固有振動には $\Psi=0$ (すなわち $H_r=0$) の E 型振動と, $\Phi=0$ (すなわち $E_r=0$) の H 型振動とがある.

一般の E 型振動を与える $\Phi$ 函数は

$$\Phi=krj_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi,\quad \begin{matrix}l=1,2,\cdots,\\ m=0,1,\cdots,l\end{matrix}$$

に定数を乗じたものであるが，空洞の半径を $a$ として，境界条件

$$r=a \quad \text{で} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r}=0$$

が要求される．

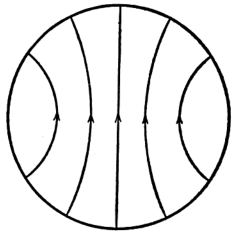
$$\frac{d}{dr}[\sqrt{x}\,J_{l+1/2}(x)]=0$$

の正根を小さい方から順に $r_{l1}, r_{l2}, \cdots$ とおけば，それらに応じて共振波長 $\lambda$ が

$$\lambda=2\pi/k=2\pi a/r_{ln}$$

で定まる．E 型の基本振動は $l=n=1$ の場合で（第 11.1 図）．これは三重に縮退している．共振波長は，$r_{11}=2.74$ により，

$$\lambda=2.29a. \qquad (11.5)$$



第 11.1 図　球形空洞の基本振動（定性的）

H 型の固有振動数は E 型の基本振動数よりすべて高い．

3）　**球外部での双極子輻射**　導体球の外部におかれた双極子からの輻射を論ずるに当って，球の半径を $a$ とし，その中心に座標原点をとる．境界条件は

$$r=a \ \text{で} \ E_\theta=E_\varphi=0 \quad \text{すなわち} \quad \partial\Phi/\partial r=0 \quad \text{および} \quad \Psi=0$$

である．双極子を単位能率とし，その位置を $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ とする $(r_0 \geqq a)$．

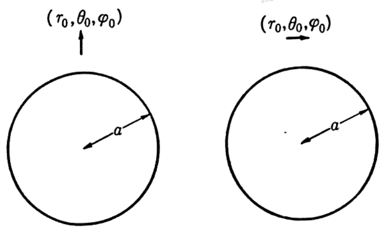
$r$ 方向におかれた電気双極子については $\Psi \equiv 0$；$\Phi$ 函数を $\Phi^{er}$ とおく．一次波を添字 0 で，二次波を添字 1 で示せば

$$\Phi_0^{er}=\frac{r}{r_0}\frac{1}{R}\exp(ikR),$$

$$R^2=r_0{}^2+r^2-2r_0 r\cos\gamma,$$

ここに $\gamma$ は $(\theta_0, \varphi_0)$ 方向と $(\theta, \varphi)$ 方向をなす角，すなわち

$$\cos\gamma=\cos\theta_0\cos\theta$$
$$+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0)$$




第 11.2 図　導体球の外部におかれた振動双極子

である．展開定理により，$r<r_0$ で

$$\Phi_0^{er}=ik\frac{r}{r_0}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)h_l(kr_0)j_l(kr)P_l(\cos\gamma)$$

であるから，境界条件

$$r=a \quad \text{で} \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}=0$$

より

$$\Phi_1^{er}=-ik\frac{r}{r_0}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{[kaj_l(ka)]'}{[kah_l(ka)]'}h_l(kr_0)n_l(kr)P_l(\cos\gamma)$$

(ダッシュは変数 $ka$ についての微分).

同様，$r$ 方向の磁気双極子について，

$$\Psi_0^{mr}=rr_0^{-1}R^{-1}\exp(ikR)$$

に対する二次波は

$$\Psi_1^{mr}=-ik\frac{r}{r_0}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{j_l(ka)}{h_l(ka)}h_l(kr_0)h_l(kr)P_l(\cos\gamma).$$

双極子が $r$ 方向に垂直の場合は，双極子のおきかえに関する補助定理を用いて解ける．極座標でのこの定理は，$\Phi$ と $\Psi$ とをまとめて $\Pi$ で表わし，たとえば電気双極子が $\theta$ 方向にあるときを $\Pi^{e\theta}$ と記すことにすれば，

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial r_0{}^2}\right)r_0\Pi^{e\theta}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\Pi^{er}-\frac{ik}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\Pi^{mr},$$

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial r_0{}^2}\right)r_0\Pi^{m\theta}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{\partial}{\partial\theta_0}\Pi^{mr}+\frac{ik}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\Pi^{er}$$

($\Pi^{e\varphi}, \Pi^{m\varphi}$ も同様) となる．

一例として，$\theta_0=0$ の位置に $x$ 方向 ($\varphi=0$ の方向) に磁気双極子がある場合を考える．

$$\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial r_0{}^2}\right)\frac{r_0h_l(kr_0)}{l(l+1)}=\frac{h_l(kr_0)}{r_0},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta_0}P_l(\cos\gamma)\right]_{\theta_0=\varphi_0=0}=\cos\varphi P_l{}^1(\cos\theta),$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}P_l(\cos\gamma)\right]_{\theta_0=\varphi_0=0}=\sin\varphi P_l{}^1(\cos\theta)$$

を用いて

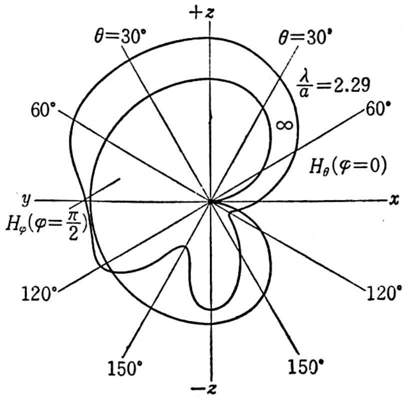
$$\Psi_1^{mx}=-ik\frac{r}{r_0}\cos\varphi\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}[kr_0h_l(kr_0)]'\frac{j_l(ka)}{h_l(ka)}h_l(kr)P_l{}^1(\cos\theta),$$

$$\Phi_1^{mx}=k^2r\sin\varphi\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}h_l(kr_0)\frac{[kaj_l(ka)]'}{[kah_l(ka)]'}h_l(kr)P_l{}^1(\cos\theta).$$

$\Psi_0^{mx}, \Phi_0^{mx}$ も必要に応じて作ることは容易である．

一つの具体的応用をあげる．薄い金属で作った球形空洞に細くて短いスリッ

トがあるとき，スリットからもれ出る基本振動電波 (*11.5*) の遠方での指向性を求めよう．細くて短いスリットは磁気双極子に等価であるから，球形導体上の表面に平行に磁気双極子がある場合の解が使える．結果を第 11.3 図に示すが，ここでスリットは $+z$ 軸上 $(\theta=0)$ に位置し，$x$ 方向にあるとし，遠方磁場を $xz$ 面内と $yz$ 面内とに着目して画いてある．なお波長の長い極限の場合を比較のために加えておく．




第 11.3 図　薄い球形空洞の短いスリットからもれる電波の指向性．スリットが $z$ 軸上にあり，$x$ 軸に平行のとき，図の右半分は $xz$ 面，左半分は $yz$ 面での指向性を示す．$a$ は球の半径，$\lambda=2.29a$ は球形空洞の基本振動の波長．

このような長波長の極限について少し述べておこう．球の半径 $a$ が波長 $\lambda=2\pi/k$ に比べて十分小さいとき $(ka\ll 1)$ には，球の影響は球の位置に誘起された振動双極子でおきかえられる．特にもとの双極子が球の付近にある場合すなわち $kr_0\ll 1$ の場合を考えよう．双極子が半径方向にあるときは誘起双極子も同方向（正または負の）にあることは明らかで，これらの和も同方向である．したがってこの場合，球の影響は初めの双極子の能率に一つのスカラー $M$ を乗ずることに等しいことになる．双極子が半径方向に垂直である場合にも，やはりこのような**倍率** $M$ が考えられる．$M$ の値は準静的な計算からも求められるが，前に述べたような一般的な形式の極限としても導かれて次の通りになる：

| | |
|---|---|
| 半径の方向の電気双極子では | $1+2(a/r_0)^3$, |
| 半径に垂直な電気双極子では | $1-(a/r_0)^3$, |
| 半径の方向の磁気双極子では | $1-(a/r_0)^3$, |
| 半径に垂直な磁気双極子では | $1+2^{-1}(a/r_0)^3$. |

## §12　補註——とうげ道の方法

一般に，正の実数 $x$ を含んだ複素積分

$$\int_C e^{xf(\tau)}g(\tau)d\tau$$

の $x$ が大きい所での漸近形を考える．ここに解析函数 $f(\tau)$ の実部 $\Re(f)$ は積分路 C の両端で $-\infty$ に近づき，途中で極大を一回とるものとする．$g(\tau)$ は $\tau$ について比較的ゆるやかに変る函数である．$x$ が大きいとき $\Re(f(\tau))$ が大きく負になる部分の寄与は小さい．そこで積分路を変形して，$x$ の大きいとき積分の値に最も寄与する部分ができるだけせまくなるようにする．すなわち $\Re(f(\tau))$ が極大になる点から最も急な傾斜で降下するように積分路を選ぶ．いいかえれば，$\tau$ 平面からの高さとして $\Re(f(\tau))$ をえがくとき，曲面のとうげ点（鞍点）を最も急傾斜で越える路に積分する．そうすれば，$x$ が大きいとき，とうげ点のごく近くだけが積分に寄与する．積分のこのような計算法を**とうげ道の方法** (method of steepest descent) または**鞍点法** (Sattelpunktmethode) という．

このとうげ越えの路を表わす曲線は $\Re(f(\tau))=$ 一定 への直交曲線であるから $\Im(f(\tau))=$ 一定 を満たす．とうげの上では $\Im(f(\tau))=$ 一定 の曲線に沿って $\Re(f(\tau))$ の微係数が 0 となるのであるから，そこでは函数 $f(\tau)$ の実部と虚部との微係数が消える．すなわち，とうげ点は

$$f'(\tau)=0$$

で与えられる．

応用例の一つが §10 に見られる．

# 第 4 章　プラズマの力学

## §1　プラズマ

放電管の内部の気体，アーク放電の電極間の気体，地球内部の流体核，電離層，太陽などの高温な天体，これらはいずれも電離した流体で，電気を導き，しかも正負電荷は大部分打ち消し合って電気的に中性に近い．このような電離流体は Langmuir に従ってプラズマ (plasma) と呼ばれる．いいかえれば，電子，(正) イオン，中性原子から“混合形成 ($\pi\lambda\alpha\sigma\sigma\epsilon\iota\nu$)”された流体で電気的に中性に近いものをプラズマという．プラズマの特徴として，その中では流体力学的現象と電磁現象とがたがいに影響し合う．

この章では主として密度が大して高くない気体状のプラズマを取り扱うが，結果の多くは密度の高い場合にも使える．また主として力学を論じるのが目的であるから，温度が一様でない場合に見られる熱伝導や熱拡散の現象は問題にしない．

プラズマ内の電磁場を定める四個のベクトル，すなわち電場 $\boldsymbol{E}$, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$, 電束密度 $\boldsymbol{D}$, 磁場 $\boldsymbol{H}$ は Maxwell の方程式

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J}, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho^* \tag{1.4}$$

を満たす．ここに $\boldsymbol{J}$ は電流密度, $\rho^*$ は電荷密度である．(*1.3*) と (*1.4*) とから電荷の流れに関する連続の式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}+\frac{\partial \rho^*}{\partial t}=0 \tag{1.5}$$

が得られる．通例のように

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \quad \text{および} \quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{1.6}$$

の関係をおき，$\varepsilon$ と $\mu$ とを一定と仮定する．密度が大して高くない気状のプラズマでは，この $\varepsilon$ と $\mu$ とは真空中の値 ($\varepsilon_0$ と $\mu_0$) にほとんど等しい．この章を

通じて MKS 有理単位系 (§3.1) を用いる.

## §2 基礎方程式

電子，各種のイオン，各種の中性原子から成るプラズマを一般に考え，その中では電離も再結合も行われないと仮定する．このとき第 $j$ 種の成分粒子の質量を $m_j$，粒子密度を $n_j$，平均速度を $\boldsymbol{v}_j$ とおけば，その成分の流れに関する連続の方程式は

$$\operatorname{div}(m_j n_j \boldsymbol{v}_j)+\frac{\partial m_j n_j}{\partial t}=0 \tag{2.1}$$

である．各成分の流れに関する運動方程式として Euler の形

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_j n_j \boldsymbol{v}_j)=e_j n_j(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{B})-m_j n_j \operatorname{grad}\phi+\boldsymbol{R}_j \\ -\operatorname{Div}(\mathbf{P}_j+m_j n_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j) \tag{2.2}$$

($\boldsymbol{vv}$ はテンソル，$\mathrm{Div}_x\,\mathbf{P}\equiv\partial P_{xx}/\partial x+\partial P_{yx}/\partial y+\partial P_{zx}/\partial z$ など) を採用しよう．ここに $e_j$ は粒子電荷，$\mathbf{P}_j$ は分圧テンソル，$\boldsymbol{R}_j$ は単位容積あたり第 $j$ 成分に働く抵抗，$\phi$ は重力のポテンシアルを表わす．抵抗 $\boldsymbol{R}_j$ については，他成分との摩擦によるものだけを考えることにしよう．そうすれば

$$\sum\boldsymbol{R}_j=0 \qquad \left(\text{ただしつねに } \sum\equiv\sum_j\right). \tag{2.3}$$

電荷密度と電流密度とは

$$\rho^*=\sum e_j n_j \quad \text{および} \quad \boldsymbol{J}=\sum e_j n_j \boldsymbol{v}_j \tag{2.4}$$

で与えられる．

物質密度 $\rho$ と物質の流れの速度 $\boldsymbol{v}$ とは

$$\rho=\sum m_j n_j \quad \text{および} \quad \rho\boldsymbol{v}=\sum m_j n_j \boldsymbol{v}_j \tag{2.5}$$

によって定義される．こうすれば，(2.1) を加え合わせて，

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{2.6}$$

を得る．これは物質の流れに関する**連続の式**にほかならない．

同様に (2.2) から

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})=\rho^*\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\rho\operatorname{grad}\phi-\operatorname{Div}(\mathbf{P}+\rho\boldsymbol{vv}) \tag{2.7}$$

が得られるが，これはプラズマ全体の**運動方程式**である．ここに $\mathbf{P}$ は全圧テンソルであって，分圧テンソルと

$$\mathsf{P}+\rho\boldsymbol{vv} = \sum(\mathsf{P}_j+m_jn_j\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_j) \tag{2.8}$$

で結びつく：

厳密には，運動方程式が分圧テンソルを用いて (2.2) の形に表わされるのは，希薄な気体に限られる．このとき圧力テンソルは

$$\mathsf{P}_j = m_jn_j\langle(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{v}_j)\rangle$$

および

$$\mathsf{P} = \sum m_jn_j\langle(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{v})(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{v})\rangle$$

で与えられる；ただし $\boldsymbol{c}_j$ は粒子速度であって，$\langle\ \rangle$ は速度分布に従って平均をとることを意味する (ゆえに $\boldsymbol{v}_j=\langle\boldsymbol{c}_j\rangle$)．この場合 (2.8) の両辺はともに $\sum m_jn_j\langle\boldsymbol{c}_j\boldsymbol{c}_j\rangle$ に等しい．

(2.6) と (2.7) とはつぎの形にも書かれる：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\rho+\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0, \tag{2.6a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v}=\rho^*\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\rho\,\mathrm{grad}\,\phi-\mathrm{Div}\,\mathsf{P}, \tag{2.7a}$$

ここに $\partial/\partial t+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}$ は流れゆく実質に沿った時間的変化を意味する．

(2.2) に $e_j/m_j$ を乗じ全成分に加え合せて，電流の微分方程式

$$\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}=\sum\frac{e_j^2n_j}{m_j}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{B})-\rho^*\,\mathrm{grad}\,\phi+\sum\frac{e_j}{m_j}\boldsymbol{R}_j$$
$$-\mathrm{Div}\sum\frac{e_j}{m_j}(\mathsf{P}_j+m_jn_j\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_j) \tag{2.9}$$

が得られる．この方程式は後に簡単な形で近似してから使用するであろう．

## §3　一つの静力学的な解

力学的に静的である場合 ($\boldsymbol{v}=0$) には通常，圧力テンソルはスカラー量 $P$ に簡単化する．このときプラズマが中性 ($\rho^*=0$) であれば，運動方程式は

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\rho\,\mathrm{grad}\,\phi-\mathrm{grad}\,P=0$$

となる．ここで $\mathrm{grad}\,\phi$ が一定で，その向きに $z$ 軸をとったとき，$\boldsymbol{B}$ が $z$ 成分のみをもつ場合

$$(B_x, B_y, B_z)=(0, 0, B(x, y))$$

を考えよう．そうすれば

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}=\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}=-(2\mu)^{-1}\,\mathrm{grad}\,B^2$$

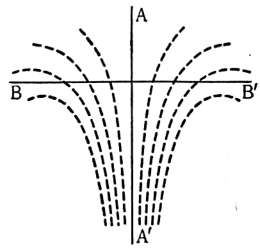
であるから，

$$\text{水平面内で}\quad P+(2\mu)^{-1}B^2=\text{一定},$$
$$\text{鉛直変化は}\quad \partial P/\partial z=-g\rho \qquad (g=\text{重力の加速度})$$

を得る．

$B^2/2\mu$ は磁束の圧力で（§3.2 を参照），それと物質の圧力 $P$ との和が一水平面内で一定となっている．数種をあげれば $B^2/2\mu=1\,\text{bar}=10^5\,\text{newton/m}^2$ となるのは $B=0.5\,\text{weber/m}^2 \doteqdot 5000\,\text{gauss}$ のときである．

ここで取り扱った特別な場合は，Alfvén により太陽の黒点の内部に応用された．黒点の中心を通る鉛直平面による切口での磁束は第 3.1 図のように考えられる．すなわち太陽表面より少しく内部に入れば $\boldsymbol{B}$ はほぼ鉛直($z$)成分しかもたない．一水平面内で，磁束の柱の内部の気体圧力 $P$ は外部のそれより磁気圧力 $B^2/2\mu$ だけ小さい．しかしその磁気圧力は $z$ によらないから，$\partial P/\partial z$ は柱の内外で相等しく，したがって物質密度 $\rho$ も内外で相等しい．これらのことから，磁束の柱の中の温度は周囲の温度より低くなければならない．実際，太陽表面の正常部の温度は 6000°K であるが，黒点部では 4500°K 程度である．なお黒点の磁場は 2000 gauss 程度と観測されている．




第 3.1 図 太陽黒点の磁束線．AA′ は中心を通る鉛直軸，BB′ は太陽の表面．(H. Alfvén: *Cosmical Electrodynamics*)

## §4 エネルギー定理，運動量定理，相似則

(2.2) に $\boldsymbol{v}_j$ を乗じ成分について和をとれば

$$\sum \boldsymbol{v}_j\cdot\frac{\partial}{\partial t}(m_jn_j\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}-\rho\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\phi+\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{R}_j$$
$$-\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\operatorname{Div}(\mathbf{P}_j+m_jn_j\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_j).$$

この等式は，$\operatorname{Div}\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{b}$ などの公式を使って，つぎの形に変えられる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum\frac{1}{2}m_jn_jv_j^2+\phi\rho\right)=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}+\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{R}_j-\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\operatorname{Div}\mathbf{P}_j$$
$$-\operatorname{div}\left(\sum\frac{1}{2}m_jn_jv_j^2\boldsymbol{v}_j+\phi\rho\boldsymbol{v}\right).$$

左辺は単位体積あたり巨視的な運動エネルギーとポテンシアル・エネルギーと

の時間的増加である．この等式と，電磁場のエネルギー定理 (*3. 2. 1*)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)=-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}-\mathrm{div}\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H})$$

とから，力学的および電磁気的なエネルギーに関する定理が得られる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum\frac{1}{2}m_jn_j{v_j}^2+\phi\rho+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)$$
$$=\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{R}_j-\sum\boldsymbol{v}_j\cdot\mathrm{Div}\,\mathsf{P}_j-\mathrm{div}\left(\sum\frac{1}{2}m_jn_j{v_j}^2\boldsymbol{v}_j+\phi\rho\boldsymbol{v}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right). \quad (4.1)$$

右辺第一，第二項はそれぞれ成分流体相互間の摩擦および分圧によってなされる仕事を表わす．第三項はエネルギーの流れの発散で，閉じた系について積分すれば消える量である．この定理は熱エネルギーを数え入れていないから，必要な場合には熱の流れに関する等式をつけ加えておかねばならないことを注意しておく．

電磁場の運動量定理は，Maxwell の張力テンソルを $\mathsf{T}$ として，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})=-(\rho^*\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})+\mathrm{Div}\,\mathsf{T}$$

で表わされる ((*3. 2. 6*) 参照)．これと運動方程式 (*2. 7*) とから全系の運動量定理

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})=-\rho\,\mathrm{grad}\,\phi-\mathrm{Div}\,(\mathsf{P}+\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}-\mathsf{T}) \quad (4.2)$$

が得られる．$\mathsf{P}$ と $\mathsf{T}$ とで係数の符号が異なるのは，前者では pressure の向きを正に，後者では tension の向きを正にとったからである．

これまでの諸式が，$s$ を任意の正数として，つぎの変換で変らないことは容易にたしかめられる：

$$(\boldsymbol{r},t)\to s^{-1}(\boldsymbol{r},t),$$
$$\varepsilon,\mu,\phi,m_j,e_j,\boldsymbol{v}_j\ \text{は変えない},$$
$$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H})\to s(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}),$$
$$(\boldsymbol{J},\rho^*,\rho,n_j,\mathsf{P}_j,\mathsf{T})\to s^2(\boldsymbol{J},\rho^*,\rho,n_j,\mathsf{P}_j,\mathsf{T}),$$
$$\boldsymbol{R}_j\to s^3\boldsymbol{R}_j.$$

このような性質は一般に**相似則**と呼ばれる．つまり基礎方程式の一つの解があるとき，それを空間時間的に相似に $s^{-1}$ 倍し，各時空点の電磁場を $s$ 倍し，他の量にも上記のように係数を乗じた場合，やはり一つの解となるのである．

## §5　二成分系および準二成分系

基礎方程式 (2.6), (2.7) および (2.9) のうち，電流の微分方程式が極めて複雑である．しかし，プラズマの構成粒子の中で電子のみが極端に軽いという事実によって，この式はある場合にかなり簡単化される．

まず，プラズマが完全に電離され電子とただ一種類の正イオンとから構成されている場合を考える．一電子の質量を $m$, 電荷を $-e$ とし, 単位体積中の電子数を $n$ とおき, 電子の負電荷はイオンによって大部分打ち消されていると仮定する: $en \gg |\rho^*|$. イオンと電子との平均速度は近似的にそれぞれ $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{v}-(en)^{-1}\boldsymbol{J}$ で与えられる．(2.9) で $\sum e_j{}^2 n_j/m_j$ は $e^2 n/m$ で近似され，$\sum e_j{}^2 n_j \boldsymbol{v}_j/m_j$ は $(e^2 n\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{J})/m$ で近似され, 重力の項は無視できる．さらに摩擦による抵抗は電子流体とイオン流体との相対速度に比例すると仮定すれば $\sum e_j \boldsymbol{R}_j/m_j$ は電流密度 $\boldsymbol{J}$ に比例することになる．最後に，$\sum (e_j/m_j)(\mathbf{P}_j + m_j n_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j)$ は分子的に見れば $\sum e_j n_j \langle \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{c}_j \rangle$ である．通常，電子の粒子速度はイオンのそれに比べて十分大きく，その上，電子の速度分布がほとんど等方的であるから，この量はスカラー $-eP_e/m$ と簡単化される．ここに $P_e$ は電子の分圧を意味する．こうして上記の条件を満たす二成分系では，電流方程式として近似式

$$\frac{m}{e}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = en\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}\right) - \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} + \mathrm{grad}\, P_e \tag{5.1}$$

が用いられる．比例係数として導き入れた $\sigma$ は電気伝導率にほかならない．

方程式 (5.1) は二成分系でなくても，すべての重い構成粒子がほとんど相等しい平均速度 (したがって $\boldsymbol{v}$) をもつときには成立する．この場合を準二成分系と呼ぼう．この条件は磁場が非常に強い場合を除いて通常満たされる．定量的に少しく調べてみよう．

一様な，定常的に静止している中性気体が僅かに電離している場合を考えよう．この気体は，中性原子の他に，電子と一種類の一価正イオンを含むだけであるとし, 電子およびイオンの粒子密度をともに $n$ とおく．この $n$ は仮定によって中性原子の数の密度より十分小さい．このとき，電子およびイオンに関する方程式 (2.2) はそれぞれ

$$\boldsymbol{K}_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{v}_e = 0,$$

および

$$\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{v}_i = 0$$

である．ただし，$\boldsymbol{v}_e$ と $\boldsymbol{v}_i$ とはそれぞれ電子とイオンとの平均速度にして，$K_e \equiv -|K_e|$ と $K_i$ とはそれらの移動度を意味する．第一式より

$$\boldsymbol{v}_e = [K_e\boldsymbol{E} + K_e{}^2(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) + K_e{}^3(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}]/(1+K_e{}^2B^2),$$

さらに

$$v_e{}^2 \equiv |\boldsymbol{v}_e|^2 = K_e{}^2[E^2 + K_e{}^2(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2]/(1+K_e{}^2B^2)$$

が得られ，第二式よりイオンに関する同様な式が得られる．ところが $|K_e|/K_i$ は $10^3$ 程度であり，また

$$\frac{v_i}{v_e} \lesssim \frac{K_i}{K_e}(1+K_e{}^2B^2)^{1/2}$$

であるから，$|K_e|B \ll 10^3$ であるかぎりイオンの運動は無視できる．

(*2.6*), (*2.7*) および (*5.1*) に Maxwell 方程式を組み合わせて準二成分系のプラズマ力学の基礎方程式がそろった．相似則はつぎのように簡単化される：方程式系は変換

$$(\boldsymbol{r}, t) \to s^{-1}(\boldsymbol{r}, t),$$

$$\varepsilon, \mu, \phi, m/e, \boldsymbol{v} \text{ は変えない},$$

$$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \sigma) \to s(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \sigma),$$

$$(\boldsymbol{J}, \rho^*, en, \rho, \mathbf{P}, P_e) \to s^2(\boldsymbol{J}, \rho^*, en, \rho, \mathbf{P}, P_e)$$

で不変である．

## §6 平面的な横波

具体的な問題の一つとして，プラズマ中を伝わる平面的な横波を取り扱う．媒質は中性で，重力は考えず，電子の分圧が一定の場合とする ($\rho^* = 0$, $\mathrm{grad}\,\phi = 0$, $\mathrm{grad}\,P_e = 0$)．波の進む方向に $z$ 軸をとり，すべての量は $x, y$ によらないとして，つぎのようにおく．

$$\boldsymbol{B} = (b_x(z,t), b_y(z,t), B_0), \qquad B_0 > 0,$$

$$\boldsymbol{J} = (J_x(z,t), J_y(z,t), 0),$$

$$\boldsymbol{v} = (v_x(z,t), v_y(z,t), 0),$$

$$\boldsymbol{E} = (E_x(z,t), E_y(z,t), 0).$$

ここに $\boldsymbol{B}_0 \equiv (0, 0, B_0)$ は一定の磁束密度で，これ以外の他の量はすべて小さく二乗が無視できるとする．すなわち主な一定の磁場の中を，その方向に小振幅の横波が伝わる現象を問題にする．

この場合，複素量

$$b_x+ib_y \equiv \mathfrak{b}, \quad J_x+iJ_y \equiv \mathfrak{J}, \quad \text{など}$$

を導入することが常識である．(*1.1*) より

$$i\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial t} = 0,$$

(*1.3*) より

$$i\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial z}-\varepsilon\mu\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \mu\mathfrak{J}$$

が得られ，これらより $\mathfrak{b}$ を消して

$$\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial z^2}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial t} \tag{6.1}$$

となる．運動方程式 (*2.7*) は現在の場合

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}_0-\mathrm{Div}\,\mathbf{P}$$

であるが，これは

$$\rho\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} = -iB_0\mathfrak{J}+\eta\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial z^2} \tag{6.2}$$

と書ける．ただしこの現象に有効な粘性率を $\eta$ として，

$$P_{zx} = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad P_{zy} = -\eta\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

なる関係を用いた．最後に電流方程式

$$\frac{m}{e}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = en(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0-\sigma^{-1}\boldsymbol{J})-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}_0$$

はつぎの形をとる：

$$\frac{m}{e}\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial t} = en(\mathfrak{E}-iB_0\mathfrak{v}-\sigma^{-1}\mathfrak{J})+iB_0\mathfrak{J}. \tag{6.3}$$

分散式を出すために，すべての量が $z, t$ に関して $\exp(-i\omega t+ikz)$ の因子で変る解をとる．すなわち

$$\mathfrak{E} = E\exp(-i\omega t+ikz), \quad \mathfrak{J} = J\exp(-i\omega t+ikz), \quad \text{など}$$

とおく．そうすれば (*6.1*) より

$$(-k^2+\omega^2\varepsilon\mu)E = -i\omega\mu J,$$

(*6.2*) より

$$(\omega\rho+ik^2\eta)v = B_0 J,$$

$(6.3)$ より

$$\left(\omega\frac{m}{e}+B_0+i\frac{en}{\sigma}\right)J=ienE+enB_0v$$

が得られ，これらから $E, J, v$ を消して分散式が求まる．

$$\left(\omega\frac{m}{e}+B_0+i\frac{en}{\sigma}-\frac{enB_0^2}{\omega\rho+ik^2\eta}\right)(\omega^2\varepsilon\mu-k^2)=en\mu\omega. \tag{6.4}$$

角振動数 $\omega$ が極めて大きいときは $\omega^2/k^2=(\varepsilon\mu)^{-1}$，すなわち光速度 $(\varepsilon\mu)^{-1/2}$ で進む電磁波になる．逆に $\omega$ が極めて小さいときは

$$\omega^2/k^2=B_0^2/\mu\rho \tag{6.5}$$

となり，これは $B_0/\sqrt{\mu\rho}$ なる速さで伝わる波動を意味する．（ここに，この速さが光速度に比べて十分小さいことを使ってある．）磁場は本来 $B^2/2\mu$ の大きさの静圧のほかに，磁束に沿って $B^2/\mu$ だけの張力を示す（$(3.2.8)$ 参照）．この張力のみによって密度 $\rho$ の媒質が力学的に振動するときの波の速さが（張力/密度）$^{1/2}=B_0/\sqrt{\mu\rho}$ にほかならない．これは Alfvén によって最初に注目されたので，**Alfvén 波**と呼ばれる．精しくは Alfvén: Cosmical Electrodynamics (Oxford, 1950) を参照されるとよい．

抵抗 $\sigma^{-1}$ と粘性 $\eta$ とによる減衰が無視できるとき，分散式は

$$\left(\omega\frac{m}{e}+B_0-\frac{enB_0^2}{\omega\rho}\right)(\omega^2\varepsilon\mu-k^2)=en\mu\omega \tag{6.6}$$

となる．特に $B_0=0$ ならば

$$k^2=\varepsilon\mu\left(\omega^2-\frac{e^2n}{\varepsilon m}\right). \tag{6.7}$$

変位が進行波として伝わるための最低角振動数

$$\omega_p\equiv\left(\frac{en}{\varepsilon\, m/e}\right)^{1/2} \tag{6.8}$$

がいわゆるプラズマ（角）振動数である．これは電子密度 $n$ の平方根に比例する．なお，この電波の位相速度は

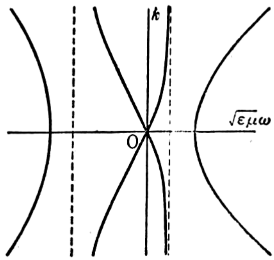
$$\left|\frac{\omega}{k}\right|=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1/2},$$

群速度は

$$\left|\frac{d\omega}{dk}\right|=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

で与えられる．ここで得た結果は，電離層で電波が反射する現象を説明する．すなわち電離層に垂直に入射する電波は，プラズマ振動数がちょうど使用周波数に等しくなるところで反射することになる．

一般に (*6.6*) を図示すれば，第6.1図あるいはそれに類似な形となる．進行波の存在する領域は，$|\omega|$ の大きい電波域と，Alfvén 波を含むいわゆる**流体磁波** (hydromagnetic wave) の域とに分離している．そして主磁束 $\boldsymbol{B}_0$ に右回りの円偏波と左回りの円偏波とでは伝わる速さが異なることがわかる．$k$ を $-k$ におきかえても変らないことは，回転の向きが一定ならば波の伝わる速さは $z$ の正負の向きによらないことを意味する．



第 6.1 図　横波の分散式を図示した一例

図の原点付近は

$$\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{B_0{}^2}{\mu\rho}\left(1-\frac{\omega}{enB_0/\rho}\right)$$

であるから，Alfvén 波 (*6.5*) がそのまま成り立つためには条件

$$|\omega|\ll enB_0/\rho$$

が満たされねばならない．周期的現象の場合は振動数を考え，また時間に関して $\exp(t/\tau)$ のように変るときは変化率 $\tau^{-1}$ を考えるとき，一般にそのような量が $enB/\rho$ より十分小さい場合を**準静的**と呼ぶことにしよう．いいかえれば，準静的現象は，運動方程式 (*2.7*) の慣性項 $\partial(\rho\boldsymbol{v})/\partial t$ が電子集団に働く Lorentz 力 $en(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ に比べて無視できる場合に相当する．なお，§5の初めに述べた二成分系では，$enB/\rho$ はイオンのサイクロトロン振動数と呼ばれる量と一致することを注意しておく．

## §7 電荷の縦振動

磁場のない場合に限れば，電流の方程式 (*5.1*) は

$$-\frac{m}{e}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}+en\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}\right)+\mathrm{grad}\,P_e=0$$

となる．この div を作れば，(*1.4*) と (*1.5*) とを用い，

$$\frac{m}{e}\frac{\partial^2\rho^*}{\partial t^2}+\frac{en}{\varepsilon}\rho^*+\frac{en}{\sigma}\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+\nabla^2P_e=0 \tag{7.1}$$

を得る．$\rho^*$ は電荷密度である．

さて，中性プラズマに電子集団の濃淡振動が起って，微小な電荷密度が現われる場合を問題としよう．電子の分圧 $P_e$ の微小変化と電子密度 $n$ の微小変化とを結びつける関係として

$$\nabla^2 P_e = (\partial P_e/\partial n)_{\text{有効}} \nabla^2 n$$

を用いる．そうすれば $-e\nabla^2 n = \nabla^2 \rho^*$ を考慮して，(*7.1*) は電荷の満たす微分方程式

$$\frac{\partial^2 \rho^*}{\partial t^2} + \omega_p{}^2 \rho^* + \omega_p{}^2 \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial P_e}{\partial n} \right)_{\text{有効}} \nabla^2 \rho^* \tag{7.2}$$

となる．ここに $\omega_p$ はプラズマ振動数 (*6.8*) にほかならない．

係数 $\partial P_e/\partial n$ は，気状のプラズマについて，もし変化が等温的に起るならば電子温度と Boltzmann 定数との積に等しいはずであるし，もし普通の断熱変化ならばその 5/3 倍をとることになる．現在の場合は断熱変化であるが，厳密には，振動中の電子の速度分布は等方的でないから上記の値より多少大きくなるであろう．添字“有効”をつけたのはそのような事情による．

平面的な縦振動

$$\rho^* \propto \exp(-i\omega t + ikz)$$

を採れば，分散式

$$\omega^2 - \omega_p{}^2 \left( 1 - i\omega \frac{\varepsilon}{\sigma} \right) = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial P_e}{\partial n} \right)_{\text{有効}} k^2 \tag{7.3}$$

を得る．減衰項が無視できるときは，(*6.7*) と同じ形である．ただ光速度 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ の代りに電子流体の音波の速さ $m^{-1/2}(\partial P_e/\partial n)^{1/2}$ に関係する．

## §8 準定常現象と準静的現象

(*1.3*) で電束電流が無視でき，さらに (*5.1*) で電子の慣性が無視できる場合は**準定常**と呼ばれる．すなわちこのとき

$$\boldsymbol{J} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \tag{8.1}$$

$$en(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - \sigma^{-1} \boldsymbol{J}) - \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} + \operatorname{grad} P_e = 0. \tag{8.2}$$

もし電子密度 $n$ の変る方向とその分圧 $P_e$ の変る方向とが一致し，したがって $\operatorname{rot}[(en)^{-1} \operatorname{grad} P_e] = 0$ ならば，(*8.2*) から

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - (en)^{-1} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \sigma^{-1} \boldsymbol{J}] = 0 \tag{8.2a}$$

が結果する．この条件は電磁場の量について線形でないが，しかし重要な多くの場合に

$$\mathrm{rot}\,[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}-\sigma^{-1}\boldsymbol{J}]=0 \tag{8.3}$$

で近似できる．たとえば問題の対称性から恒等的に

$$\mathrm{rot}\,[(en)^{-1}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}]=0 \tag{8.4}$$

が成り立つことがある（§9）．あるいは §6 の最後に定義した準静的現象で $\mathrm{rot}\,(n^{-1}\,\mathrm{Div}\,\mathsf{P})$ および $\mathrm{rot}\,(n^{-1}\rho\,\mathrm{grad}\,\phi)$ がともに小さいときには，運動方程式より $\mathrm{rot}\,[(en)^{-1}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}]$ は $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ に比べて無視できる．

(8.1) と (8.3) とが成り立つとき，$\partial\boldsymbol{B}/\partial t+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=0$ により

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\right) \tag{8.5}$$

を得る．電気伝導率 $\sigma$ が一様の場合は

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2\boldsymbol{B} \tag{8.6}$$

($\nabla^2\equiv\mathrm{grad\ div}-\mathrm{rot\ rot}$) となる．この関係式は**磁気流体力学** (magnetohydrodynamics) の基礎となり，しばしば**誘導方程式** (induction equation) と呼ばれる．

物質が静止しているときの上式

$$\partial\boldsymbol{B}/\partial t=(\mu\sigma)^{-1}\nabla^2\boldsymbol{B} \tag{8.7}$$

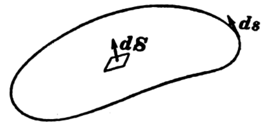
は拡散の方程式にほかならない．すなわち拡散係数 $(\mu\sigma)^{-1}$ で磁束が物質中を拡散することがわかる．この拡散が十分小さいとき，誘導方程式は

$$\partial\boldsymbol{B}/\partial t=\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{B}) \tag{8.8}$$

となるが，これは粘性をもたない流体の中のうずの運動を規定する方程式と同形である．速度 $\boldsymbol{v}$ の場に乗って動いてゆく曲面の一部分を貫き通る磁束 $\Phi$ の時間的変化は

$$\frac{d\Phi}{dt}=\int\!\!\int\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}+\int\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{s} \tag{8.9}$$

で与えられる．ここに $d\boldsymbol{S}$ は曲面上の面素を，$d\boldsymbol{s}$ は周囲の線素を意味し，積分はそれぞれ面分と周囲との全部にわたるものとする．右辺第二項を Stokes の定理を用いて書きかえれば



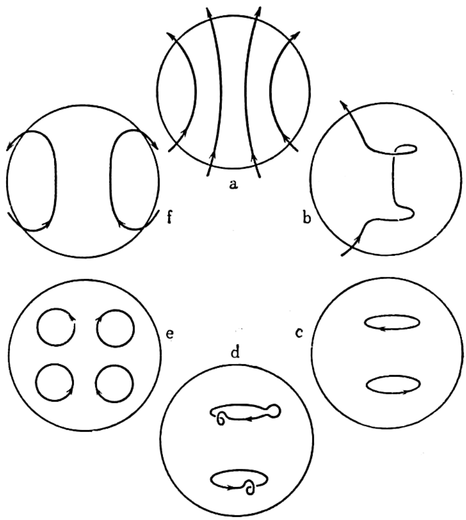
第 8.1 図 (8.9) の説明

$$\frac{d\Phi}{dt}=\iint\left[\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}-\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right]\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{8.10}$$

となるから，磁束 $\Phi$ は変らないことがわかる．Alfvén に従っていいかえれば，電気伝導率の大きいとき（あるいはスケールの大きい系で）磁束は流体に**凍りつく** (frozen in the fluid).

ここで“地球の磁場がどうして持続するか？”の問に答える流体磁気ダイナモ理論 (hydromagnetic dynamo theory) の要点を紹介しよう．地球内部にはその半径の半分くらいの半径をもつ流体の核心がある．この核心には第 8.2 図 a のように磁束が存在している．核心の電気伝導率が有限であるのに，この磁束が拡散消滅しないで持続する原因が問題となる．

この球状流体は回転しているが，対流によって混り合う際に角運動量が多少保存されるから，その角速度は一様でなく，内部の方がはやいと考えられる．そこで，簡単のために球状流体を二つの同心球で近似し，内部は外部より多少はやく，ともに定角速度で回転していると見なそう．そうすれば，流体に凍りついた磁束は同図 b を経て，c のような二つの逆向き円環状磁束を生成することになる．

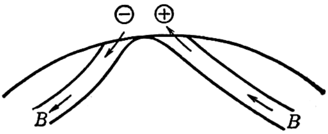


第 8.2 図　地球磁場に関する流体磁気ダイナモ理論による過程．(主として W. H. Elsasser による.)

この円環状磁束の一部分が局部的対流によってもち上げられることは可能である．このとき周囲の流体が，ちょうど台風の風のような運動をすると考えれば，もち上げられた磁束は北半球では（上から見て）時計の針と逆向きに，南半球では針の向きにねじれる．もしこのねじれの量が 180° を越えなければ図 d のようになり，平均的に図 e の形の磁束を生成し，図 f を経て初めに仮定した図 a の磁束を強める結果となる．このような機構で強められる傾向と，拡散に

よって弱まる傾向とがつり合って，ほぼ定常的な地球磁場が持続されると考えるのが最も自然な説明であろう．環状磁束が対流でもち上げられた部分のねじれた量が 270° 程度であれば，上記の機構で生成される磁束は最初のものと逆向きになってしまうが，このことは地球が過去にしばしば経験した磁場の逆転と関係があるかもしれない．

このダイナモ理論は太陽にも当てはまり，図cのような環状の磁束が太陽内部にも存在していると思われる．これが第8.3図のように表面におし出されたものが，たがいに極性を異にする黒点の対にほかならない．黒点対の先行する黒点の極性が太陽の北半球と南半球とで逆になっている事実も説明できたことになる．



第 8.3 図　太陽の黒点対の生成．(図は W. M. Elsasser: Revs. Modern Phys., 1956).

## §9　軸対称な準定常解

軸対称性をもって準定常的に変るプラズマは数理的にも興味があり，また応用上も重要である．対称軸を $z$ 軸として，円筒座標 $r, \theta, z$ を導入し，すべての量が $\theta$ と $z$ とによらない場合を考え，

$$\left.\begin{aligned}(B_r, B_\theta, B_z) &= (0, B_\theta(r,t), B_z(r,t)),\\ (J_r, J_\theta, J_z) &= (0, J_\theta(r,t), J_z(r,t)),\\ (v_r, v_\theta, v_z) &= (v_r(r,t), v_\theta(r,t), v_z(r,t))\end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

とおく．重力場は問題としない．電荷の流れの連続の式 (*1.5*) より $\rho^*$ は $t$ によらない：$\rho^*(r)$．物質の流れについて，(*2.6*) は

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{9.2}$$

$r, \theta, z$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_z$ とおけば，一般に

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{P}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\boldsymbol{u}_r\cdot\mathbf{P})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\boldsymbol{u}_\theta\cdot\mathbf{P})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{u}_z\cdot\mathbf{P}).$$

ここで

$$\boldsymbol{u}_r\cdot\mathbf{P}=P_{rr}\boldsymbol{u}_r+P_{r\theta}\boldsymbol{u}_\theta+P_{rz}\boldsymbol{u}_z \qquad \text{など}.$$

さらに

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_\theta}{\partial\theta}=-\boldsymbol{u}_r,\quad \frac{\partial\boldsymbol{u}_r}{\partial\theta}=\boldsymbol{u}_\theta$$

であること，およびこの円柱座標系での $\mathsf{P}$ のすべての成分が $\theta$ と $z$ とによらない点を考慮して

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{P}=\boldsymbol{u}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rr})-\frac{1}{r}P_{\theta\theta}\right]+\boldsymbol{u}_\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{r\theta})+\frac{1}{r}P_{\theta r}\right]+\boldsymbol{u}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rz})$$

を得る．あるいは対称性 $P_{r\theta}=P_{\theta r}$ によって，

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{P}=\boldsymbol{u}_r\left[\frac{\partial}{\partial r}P_{rr}+\frac{1}{r}(P_{rr}-P_{\theta\theta})\right]+\boldsymbol{u}_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_{r\theta})+\boldsymbol{u}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rz})$$

と書き変えることもできる．同様に

$$\mathrm{Div}\,(\rho\boldsymbol{vv})=\boldsymbol{u}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r^2)-\frac{\rho}{r}v_\theta^2\right]+\boldsymbol{u}_\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_rv_\theta)+\frac{\rho}{r}v_rv_\theta\right]+\boldsymbol{u}_z\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_rv_z).$$

これらの表式を使って，運動方程式

$$\partial(\rho\boldsymbol{v})/\partial t-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+\mathrm{Div}\,(\mathsf{P}+\rho\boldsymbol{vv})=0$$

が計算できる．ただしプラズマが中性に近いとして，(*2.7*) で $\rho^*\boldsymbol{E}$ の項を無視した．$r$ 成分は，$\boldsymbol{J}=\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$ を用いて，

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)v_r-\frac{\rho}{r}v_\theta^2+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B^2}{2\mu}+P_{rr}\right)+\frac{B_\theta^2}{\mu r}+\frac{1}{r}(P_{rr}-P_{\theta\theta})=0 \quad (9.3)$$

となり ($B^2\equiv B_\theta^2+B_z^2$)，また $\theta$ および $z$ 成分は

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)v_\theta+\frac{\rho}{r}v_rv_\theta+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_{r\theta})=0 \quad (9.4)$$

および

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)v_z+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rz})=0 \quad (9.5)$$

となる．

これらの方程式で，$\partial/\partial t+v_r\,\partial/\partial r$ は実質的な加速度，$\rho v_\theta^2/r$ は遠心力，$-\rho v_rv_\theta/r$

は Coriolis の力(の一部)である．すでに知っているように，磁束は $B^2/2\mu$ なる静圧に加えて縦方向に $B^2/\mu$ なる張力を示すが，このことは (*9.3*) にも現われている．方程式 (*9.3*), (*9.4*), (*9.5*) は，等方的な粘性率 $\eta$ を

$$P_{rr}=P+\frac{2}{3}\eta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}-2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$P_{\theta\theta}=P+\frac{2}{3}\eta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}-2\eta\frac{v_r}{r},$$

$$P_{r\theta}=-\eta r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right),\quad P_{rz}=-\eta\frac{\partial v_z}{\partial r}$$

で導入するとき，Navier-Stokes の方程式と一致することが示される．しかし実際には粘性率は必ずしも等方的ではない．

現在の場合 (*8.4*) が正確に成り立ち，したがって (*8.3*) が満たされる．(*8.5*) は

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial r}(v_rB_\theta)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)\right),\tag{9.6}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_rB_z)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mu\sigma}\frac{\partial B_z}{\partial r}\right).\tag{9.7}$$

電気抵抗が無視できるプラズマにあっては，これらの方程式と連続の式 (*9.2*) とから

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{B_\theta}{r\rho}=0\tag{9.8}$$

および

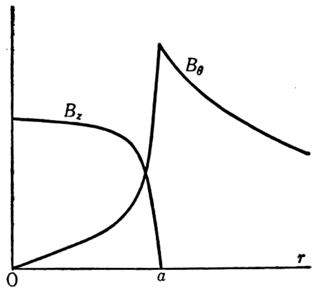
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{B_z}{\rho}=0\tag{9.9}$$

を得る．これから，流れに乗って動いてゆく1点で $B_z$ と $B_\theta/r$ とは物質密度 $\rho$ に比例することがわかる．(もっともこれは磁束が流体に凍りついていることからも当然であるが.) 比 $B_\theta/rB_z$ も流れに乗って一定である：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{B_\theta}{rB_z}=0.\tag{9.10}$$

具体的問題として，応用上重要な柱状の高温プラズマを取り扱おう．プラズマは完全に電離されその電気伝導率は十分大きいとし，柱の中を流れる電流は $z, \varphi$ 両成分をもつとし，柱から十分離れたところでは磁束は十分小さいとする．このような状況で縦電流を増してゆくと，プラズマ柱を円形にとり巻く磁束が

増し，その圧力のために柱はしめつけられ細くなる．この現象を**ピンチ**(pinch)**効果**という．ピンチが進んでゆくにつれ，磁束の $z$ 成分 $B_z$ は $\theta$ 成分 $B_\theta$ に比べて一層激しく増大する；何となれば $B_\theta/rB_z$ が定まった実質点で一定であるからである．電流の増し方が急ならば，新たに増した電流は表面近くを流れるから，磁束の分布は第 9.1 図のようになるであろう．この事情を理想化し，われわれはプラズマ柱の表面にのみ電流が存在する模型



第 9.1 図　ピンチされたプラズマ柱の内外の磁束密度（可能な形）．$B_z$ は軸方向，$B_\theta$ は角方向の成分．第一近似として模型 (9.11) が使える．

$$\sigma=\begin{cases}\infty, \\ 0,\end{cases}\quad (B_r, B_\theta, B_z)=\begin{cases}(0,\quad 0,\quad B_0), & \text{ただし}\quad 0\leqq r<a, \\ (0,\ B_1a/r,\ 0), & \text{ただし}\quad r>a\end{cases}\tag{9.11}$$

を採用する．ここに $a(t)$ は柱の半径，$B_0, B_1$ は時間 $t$ だけの函数とする．プラズマ内の密度も一様と仮定しよう．

流体の速度 $\boldsymbol{v}$ については，$v_\theta=v_z=0$ とし，ピンチが極端にはやくないとして (9.3) の慣性項 $\rho(\partial t+v_r\,\partial/\partial r)v_r$ も無視できると仮定する．そうすればプラズマ中の粒子速度が柱に垂直な平面内で等方的であろうから，

$$P_{rr}=P_{\theta\theta}\qquad (\neq P_{zz}\ \text{一般に}).\tag{9.12}$$

したがって (9.3) より，柱の中で $P_{rr}$ は一様である．物質的圧力と磁束圧との和はプラズマ柱の表面の両側で相等しいことが必要であるから，外部の物質圧が無視できるとき

$$P_{rr}+(2\mu)^{-1}B_0{}^2=(2\mu)^{-1}B_1{}^2\tag{9.13}$$

が成り立たねばならない．プラズマに凍りついた全磁束 $\Phi$ は $\pi a^2B_0$ であって一定：全縦電流 $I$ は $2\pi aB_1/\mu$ で与えられる．よって上の式は

$$P_{rr}+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\Phi}{\pi a^2}\right)^2=\frac{\mu}{2}\left(\frac{I}{2\pi a}\right)^2\tag{9.14}$$

と変形される．

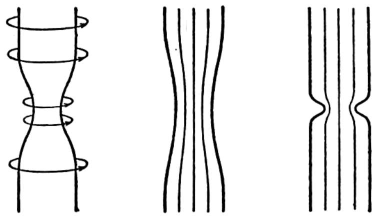
エネルギーの放射などによる損失が無視できて，ピンチの過程が断熱的に行われるときは，$P_{rr}$ は $\rho^\gamma$ すなわち $a^{-2\gamma}$ に比例するであろう．ただし $\gamma$ は熱力学での定圧比熱と定積比熱との比に当る量であるが，強い磁場における非常に

高温なプラズマでは $\gamma=2$ と採ることができる．こうとれば (*9. 14*) の左辺は $a^{-4}$ に比例するから，$a$ と $I$ とはたがいに逆比例することになる．すなわち柱の半径は縦電流 $I$ に逆比例する．完全に電離されたプラズマの温度は $P_{rr}/\rho$ に比例するであろうから，密度と温度とはともに $I^2$ に比例することになる．

以上最も理想的な模型についてピンチ効果を取り扱ったが，実際はずっと複雑であることはいうまでもない．しかしこの問題はこれだけにして，つぎの節で安定性をしらべよう．

## §10　ピンチされたプラズマ柱の安定性

**1)　初等的な説明**　プラズマ柱を縦に強い電流が通ると，周囲に生じた円形磁束の圧力によって，柱はしめつけられる．もし柱の内部に縦に磁束が存在しなければ，このプラズマは安定でない．もし一個所がくびれると，そこをとり巻く磁束密度が大きくなって，ますますくびれ，ついに切れてしまう (第10. 1図a参照)．




第 10. 1 図　プラズマ柱のくびれに対する不安定性 (a) は，内部に縦に磁束を入れることによって安定となる．

この種の不安定性は，模型 (*9. 11*) のように縦に磁束を入れておくことによって除かれることをつぎに示そう．(*9. 13*) を満たしてつり合っているプラズマ柱 (*9. 11*) を考える．こんどは $a, B_0, B_1$ は定数である．もしこの柱が図 b のように軸に沿ってゆるやかに変るくびれを静かに生じ，一部分の半径が $a$ から $a(1-\delta)$ に変ったとする ($\delta$ は $z$ のゆるやかに変る函数)．そのときは，この部分の $\boldsymbol{B}$ は

$$(B_r, B_\theta, B_z)=\begin{cases}(0,\quad 0,\quad B_0(1-\delta)^{-2}), & \text{ただし}\quad 0\leqq r<a(1-\delta),\\ (0,\ B_1a/r,\quad 0), & \text{ただし}\quad r>a(1-\delta)\end{cases}$$

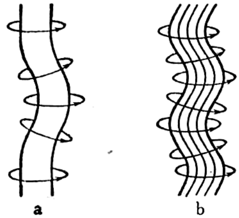
と変る．内部の物質圧と磁束圧との和は $P_{rr}+B_0{}^2/2\mu(1-\delta)^4$ あるいは，$\delta$ が小さいから，$P_{rr}+B_0{}^2(1+4\delta)/2\mu$ である；また柱表面のすぐ外側の磁束圧は $B_1{}^2/2\mu(1-\delta)^2$ あるいは $B_1{}^2(1+2\delta)/2\mu$ である．したがってゆるやかなくびれに対する安定性の条件として $2B_0{}^2>B_1{}^2$ を得る．

図 c のように急傾斜でくびれる場合には，プラズマ中の磁束密度は表面近くで特に大きい．したがってこの形の変位に対する安定性の条件は上のものより

ゆるい．結局われわれの簡単な模型で，くびれに対し安定であるための必要十分な条件は

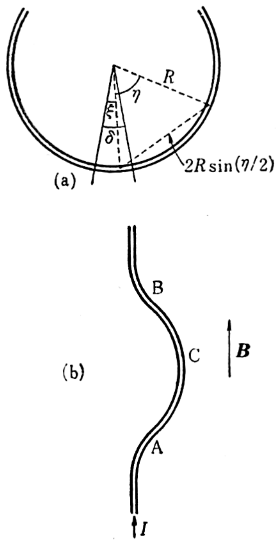
$$2B_0^2 > B_1^2 \qquad (> B_0^2) \tag{10.1}$$

で与えられる．これはプラズマ内部で磁束の圧力が物質の圧力より大であることに相当する．




第 10.2 図　プラズマ柱の曲りに対する不安定性 (a) は縦に磁束を入れることによって，小さい波長の場合には安定化される．

このように縦に十分強い磁束を入れることによって，くびれに対して安定にすることができる．しかし軸対称でない変位が種々考えられるから，それらに対する安定性がつぎに問題となる．最も重要な曲りについて，もし縦に磁束が通っていなければ，一個所が曲ると，その内側の磁束密度が大きくなって，ますます曲り，ついに飛び散ってしまう (第 10.2 図 a)．この場合にも縦磁束が安定化の方向に働き，小さい波長で曲ることに対しては，縦磁束の張力だけで安定となることが明らかであろう (図 b)．しかし大きい波長で曲ることに対しては，磁束の張力だけでは完全な安定性が得られない．このことは次のようにして示される．




第 10.3 図　プラズマ柱のゆるやかな曲りに対しては，中に縦磁束を入れても，外から縦磁束を加えても安定にできない．

半径 $a$ のプラズマ柱 (*9.11*) がほぼ一様な大きい曲率半径 $R$ ($\gg a$) で曲るときを考えれば，縦磁束の張力によって内向きに引き戻そうとする力は，単位長さあたり $\pi a^2 B_0^2/\pi R$ である．これに対して縦電流による力は外向きに働き，その大きさは $a/R$ が十分小さいとき内向きの力より強くなってしまうのである．第 10.3 図 a のように $a \ll \delta R \ll R$ なる $\delta$ を選ぶ．縦電流 $I$ がこの $\delta R$ の部分に及ぼす力を Biot-Savart の公式で求めれば，

$$\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_0^\delta \int_{\delta-\xi}^{2\pi-\xi} \frac{\sin(\eta/2)}{[R\sin(\eta/2)]^2} R^2 d\eta\, d\xi$$

$$=\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_0^\delta\int_{\delta-\xi}^{2\pi-\xi}\frac{d\eta}{4\sin(\eta/2)}d\xi$$

$$=-\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_0^\delta \log\tan\frac{\xi}{4}d\xi$$

$$\fallingdotseq-\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_0^\delta \log\frac{\xi}{4}d\xi$$

$$=\frac{\mu I^2}{4\pi}\delta\left(\log\frac{1}{\delta}+1\right).$$

$I=2\pi a B_1/\mu$ であるから，上記の量は

$$\pi a^2 B_1{}^2\mu^{-1}\delta\,[\log(4/\delta)+1]$$

に等しく，これは縦磁束によって $\delta R$ を内向きに引き戻す力 $\pi a^2B_0{}^2\mu^{-1}\delta$ より大きい．結局プラズマ柱 (*9. 11*) は大きな曲率半径でゆるやかに曲る変位に対して不安定である．

このように，縦に電流が通っているプラズマ柱は，ゆるやかな曲りに対して完全に安定ではない．この不安定性は外部から柱に平行に磁束を加えても取り除かれない．柱が図 b のようにゆるやかに曲ったとき A 点は手前に動かされ，B 点は先方に動かされる．柱はつる巻き状になって C 点には外方に Lorentz 力が働く．軸方向の周期（ピッチ）が長いつる巻き状の変形に対しては，この Lorentz 力は内部の縦磁束の張力では完全には打ち消し得ないで不安定になることが次のようにして示される．一般に，つる巻き線

$$x=A\cos\tau,\quad y=A\sin\tau,\quad z=A\tau\tan\alpha$$

($A$ と $\alpha$ とは定数) の曲率は $A^{-1}\cos^2\alpha$ であり，$z$ 軸とつる巻き線の接線とのなす角は $\cos\alpha$ である．細いプラズマ柱が長い周期で ($a/A\ll 1\ll\tan\alpha$) この形に変位するとき，内部の磁束によって安定化の向きに働く力は $A^{-1}\cos^2\alpha$ に比例するから，$\cos\alpha$ に比例する不安定化の力より弱い．

プラズマ柱のゆるやかな曲りに対する不安定性を取り除くには，これを導体の管で囲み，管壁をある程度プラズマに近づけておけばよい．何となれば，プラズマが曲ると，これを取り巻く円形磁束のうちプラズマと管壁との間に押しつけられた部分が一層強い磁束圧で押し返すからである．どの程度に管壁が近ければ安定になるかを知るために計算を行おう．

2) **簡単な模型による安定の条件** プラズマを圧力密度一様な完全導体とし，

管壁とプラズマ柱の間の物質圧は無視できると仮定する．柱の半径を $a$, 壁の内半径を $b$ とおき，再び表面電流模型 (*9. 11*) を採用しよう．すなわち，つり合い時の磁束密度 $\boldsymbol{B}^0$ につき

$$(B_r{}^0, B_\theta{}^0, B_z{}^0) = \begin{cases} (0, \quad 0, \quad B_0), & \text{ただし} \quad 0 \leqq r < a, \\ (0, \quad B_1 a/r, \quad 0), & \text{ただし} \quad a < r < b \end{cases} \qquad (10.2)$$

とおく．ここに $B_0$ と $B_1$ とは定数にして，つり合いの条件 (*9. 13*) すなわち

$$P_{rr} + (2\mu)^{-1} B_0{}^2 = (2\mu)^{-1} B_1{}^2 \qquad (10.3)$$

を満たすものとする．このプラズマ柱が微小変形を受けたとき，元に戻るか成長するかに従って安定か不安定かが区別される．このとき $\theta, z$ 座標に関して周期的な変位だけを考えれば通常の目的に十分であろう．そこで変位を

$$(\xi_r(r), \xi_\theta(r), \xi_z(r)) \exp(ikz + im\theta), \qquad k > 0, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (10.4)$$

とおく．$m = 0$ は軸対称なくびれ, $|m| = 1$ は曲りを表わし, $|m| = 2$ では断面が楕円形になる．時間因子については，これを $\exp(t/\tau)$ とおくとき，成長時間 $\tau$ の二乗が正ならばプラズマ柱は不安定，負ならば安定である (完全導体の仮定により $\tau^2$ は実数)．安定と不安定との境を求めることのみを目的とすれば，時間因子を付けずに変位がつねに平衡を保ちながら無限に小さい速度で行われるとしてよい．はじめ一様であった圧力と物質密度とは，このとき不変に保たれる．すなわち変位の div は 0 である：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\xi_r) + \frac{im}{r}\xi_\theta + ik\xi_z = 0. \qquad (10.5)$$

また運動方程式より

$$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} = 0 \qquad (10.6)$$

が結果する．

このように平衡を保ちつつ行う変位は §6 で定義した準静的現象にもちろん含まれるから，§8 により誘導方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad (10.7)$$

がプラズマの内部で成り立つ．したがって小変位を受けた後の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，変位ベクトル (*10. 4*) を $\boldsymbol{x}$ とおいて，

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^0 + \mathrm{rot}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{B}^0)$$

で与えられる．具体的には，

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{i}}(r)\exp(ikz+im\theta) \tag{10.8}$$

とおき（添字 i は内部 interior の意）

$$\left.\begin{aligned} B_r^{\mathrm{i}} &= ik\xi_r B_0, \\ B_\theta^{\mathrm{i}} &= ik\xi_\theta B_0, \\ B_z^{\mathrm{i}} &= \left[-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\xi_r) - \frac{im}{r}\xi_\theta\right]B_0 = ik\xi_z B_0, \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

ここで (10.5) が用いられている．

プラズマの内部では (10.6) は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}^{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{B}^0 = 0$ すなわち

$$\mathrm{rot}_r\boldsymbol{B}^{\mathrm{i}} = 0, \quad \mathrm{rot}_\theta\boldsymbol{B}^{\mathrm{i}} = 0$$

に等価である．これらを作れば

$$k\xi_\theta = \frac{m}{r}\xi_z, \quad k\xi_r = -i\frac{d}{dr}\xi_z. \tag{10.10}$$

(10.5) に代入して $\xi_z$ に関する微分方程式

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\xi_z}{dr}\right) - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\xi_z = 0 \tag{10.11}$$

が得られる．これは変形された Bessel 函数 $I_m(kr)$, $K_m(kr)$ によって満足され (I 11. 18), $r=0$ で正則なものを選べば

$$\left.\begin{aligned} \xi_z &= CI_m(kr), \\ \xi_\theta &= CmI_m(kr)/kr, \\ \xi_r &= -iCI_m'(kr), \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

(10. 10) より（$\xi_\theta$, $\xi_r$）

ここに $I'(x) \equiv dI/dx$, $C$ は定数である．

プラズマの外部では，磁束密度は

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{grad}\,\psi, \quad \nabla^2\psi = 0$$

で $\psi$ から定まる．こんども

$$\psi = \psi^0 + \psi^{\mathrm{e}}(r)\exp(ikz+im\theta), \quad \boldsymbol{B}^0 = \mathrm{grad}\,\psi^0$$

（添字 e は exterior）とおけば，$\psi^{\mathrm{e}}$ は (10. 11) と同じ形の微分方程式を満たすから，一般解

$$\psi^{\mathrm{e}} = C_1K_m(kr) + C_2I_m(kr)$$

をもつ．そして

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^0 + \boldsymbol{B}^{\mathrm{e}}(r)\exp(ikz + im\theta) \tag{10.13}$$

とおけば

$$\left.\begin{aligned} B_r^{\mathrm{e}}(r) &= k[C_1 K_m'(kr) + C_2 I_m'(kr)], \\ B_\theta^{\mathrm{e}}(r) &= im[C_1 K_m(kr) + C_2 I_m(kr)]/r, \\ B_z^{\mathrm{e}}(r) &= ik[C_1 K_m(kr) + C_2 I_m(kr)]. \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

定数 $C_1$ と $C_2$ とは境界条件から定まる．プラズマの内部で磁束は流体に凍りついているから，変形後も表面でそれに垂直成分をもたない．したがって外部の $\boldsymbol{B}$ はプラズマ表面と管壁とで垂直な成分をもたない．プラズマ表面のすぐ外側には，もともと $\theta$ 成分 $B_1$ のみをもつ磁束があって，それがプラズマ表面の変形に従って変形することになるから，境界条件は

$$B_r^{\mathrm{e}}(a) = ima^{-1}\xi_r(a)B_1, \quad B_r^{\mathrm{e}}(b) = 0 \tag{10.15}$$

で与えられる．こうして，

$$C_1 = \frac{im}{ka}\xi_r(a)B_1\frac{I_m'(kb)}{K_m'(ka)I_m'(kb) - I_m'(ka)K_m'(kb)},$$

$$C_2 = -\frac{im}{ka}\xi_r(a)B_1\frac{K_m'(kb)}{K_m'(ka)I_m'(kb) - I_m'(ka)K_m'(kb)}$$

と定まる．

安定と不安定との境では，プラズマが変形してもなおつり合っているはずである．そのためには表面のすぐ内側での磁束圧の変化と，すぐ外側での変化とが相等しくなければならない：

$$B_0 B_z^{\mathrm{i}}(a) = B_1 B_\theta^{\mathrm{e}}(a) - B_1^2 a^{-1}\xi_r(a). \tag{10.16}$$

これから，すでに求めた諸式を用いて

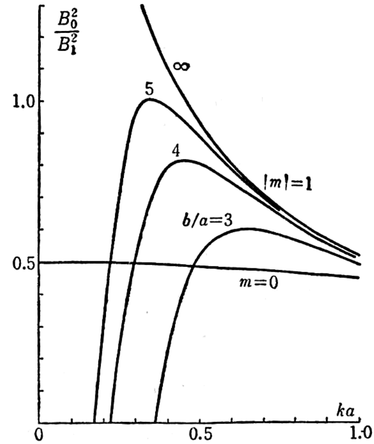
$$\frac{B_0^2}{B_1^2} = \frac{I_m'(ka)}{kaI_m(ka)}\left[1 + \frac{m^2}{ka}F(ka, kb)\right], \tag{10.17}$$

$$F(ka, kb) \equiv \frac{K_m(ka)I_m'(kb) - I_m(ka)K_m'(kb)}{K_m'(ka)I_m'(kb) - I_m'(ka)K_m'(kb)} \tag{10.18}$$

が得られる．第 10.4 図はこの関係式を画いたものである．$|m| \geqq 2$ の曲線は一層右下に現われる．

つり合いを保ちながら変形する条件がこうして求められた．柱内の縦磁束の密度 $B_0$ がこれを取り巻く円形磁束の密度 $B_1$ に比べてずっと弱ければ不安定

であり，また管の半径 $b$ がプラズマの半径 $a$ に十分近ければ安定である．したがって各 $m, k$ につき第 10.4 図の曲線の上部は安定を下部は不安定を表わすことは明らかであろう，$B_0{}^2/B_1{}^2$ は 1 を越えることはないから，すべての変形に対して安定なるためには $b/a<5$ が必要である．$b/a=4$ ならば $B_0{}^2/B_1{}^2>0.82$ が，$b/a=3$ なら $B_0{}^2/B_1{}^2>0.60$ が安定の必要十分条件である．



第 10.4 図　プラズマ柱の模型 (10.2) が安定となるための内部縦磁束．$B_0{}^2/B_1{}^2$ は 1 は越えないから，$b/a<5$ が安定の必要条件．

## §11　トーラス管内のプラズマのつり合い

前節では，まっすぐな円管状導体で囲まれたプラズマ柱の安定なつり合いを調べた．この節では，管が緩かに曲ってトーラスになった場合のつり合いを論じる．ただし管の半径 $b$ と管軸の曲率半径 $R$ との比 $b/R$ は小さく，その二乗が無視できるものとする．

まずまっすぐなプラズマ柱について，軸対称性と $z$ 方向の一様性とを仮定すれば，つり合いの状態での磁束密度は

$$(B_r, B_\theta, B_z)=(0, f(r), g(r)) \tag{11.1}$$

の形をとる．ここに $f(r)$ と $g(r)$ とは $r$ の任意な函数である．物質の流れ $\boldsymbol{v}$ がなく，圧力がスカラー $P$ となるとき，プラズマのつり合いの条件

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}=\mathrm{grad}\,P \tag{11.2}$$

はつぎのようになる：

$$\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dr}(f^2+g^2)+\frac{1}{\mu}\frac{f^2}{r}=-\frac{dP}{dr}. \tag{11.3}$$

われわれの目的は，このプラズマ柱をトーラスに曲げるとき (11.1) がどのように変るかを計算することである．そのために，線素 $ds$ が

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+dz^2$$

で与えられる通常の円筒座標 $r, \theta, z$ の代りに，彎曲したプラズマに沿って $z$ 軸が彎曲した座標系を採用しよう．初めに考えられるのは，$z$ 軸の曲率を $R^{-1}$ と

して，

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (1 + R^{-1} r\cos\theta)^2 dz^2$$

で定まる直交曲線座標であろう．$\cos\theta$ が正の部分はトーラス軸に遠い半分，負の部分は近い半分に当る．しかし，このように選ぶときには場の成分が簡単にならない．

最後の関係を一層一般化して，

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\xi}{R} r\cos\theta\right)^2 dr^2 + \left(1 - \frac{\eta}{R} r\cos\theta\right)^2 r^2 d\theta^2 + \left(1 + \frac{1}{R} r\cos\theta\right)^2 dz^2 \tag{11.4}$$

で線素 $ds$ が与えられる座標系を採用しよう．ただし $z$ 軸の曲率の二乗は無視している．また $\xi$ と $\eta$ とはともに $r$ の函数である．$z$ が一定のとき (*11.4*) で定義される $r, \theta$ が一平面内の直交曲線座標であるためにはつぎの Gauss 全曲率が消えることが必要である：

$$-\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial r}\right)\right],$$

ただし

$$h_1 \equiv 1 - R^{-1}\xi r\cos\theta, \quad h_2 \equiv (1 - R^{-1}\eta r\cos\theta) r.$$

この条件は

$$\xi = \frac{d}{dr}(r\eta) \tag{11.5}$$

と計算される．(*11.5*) はまた，(*11.4*) で定義される $r, \theta, z$ が Euclid 空間での直交曲線座標となるために十分である．

この座標系に関して，

$$B_r = 0, \quad B_\theta = \left(1 + \frac{\xi - 1}{R} r\cos\theta\right) f(r), \quad B_z = \left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right) g(r) \tag{11.6}$$

の成分をもつ $\boldsymbol{B}$ は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad (\operatorname{rot}\boldsymbol{B})_r = 0$$

を満足することがたしかめられる．他の成分は (*11.5*) を用いて

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})_\theta = -\left(1 + \frac{\xi - 1}{R} r\cos\theta\right)\frac{dg}{dr},$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rf) + \frac{1}{R}\cos\theta\left[(2\xi - 1)\frac{d}{dr}(rf) + \left(r\frac{d\xi}{dr} - 1\right)f\right]$$

と計算される．電流密度 $\boldsymbol{J}$ はもちろん $\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$ で与えられる．

さて，$\xi(r)$ 従って $\eta(r)$ はつり合いの条件 (*11.2*) が満たされるように選ぶことができる．この条件は $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})=0$ に対等であるが，これを計算すると

$$\frac{d}{dr}(r^2f^2\xi)=r^2\frac{d}{dr}(f^2+g^2)+3rf^2 \tag{11.7}$$

となる．このとき

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})_z=\left(1+\frac{r}{R}\cos\theta\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rf)+\frac{r}{Rf}\cos\theta\frac{d}{dr}g^2.$$

従って $d(rf)/dr$ と $dg/dr$ とがともに消える所では $\boldsymbol{J}=0$ である．(*11.7*) を積分して

$$f^2\xi=\frac{1}{r^2}\int_0^r(f^2-2g^2)r\,dr+f^2+g^2. \tag{11.8}$$

圧力 $P$ は $r$ にのみ依存し，

$$\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dr}(f^2+g^2)+\frac{1}{\mu}\frac{f^2}{r}=-\frac{dP}{dr} \tag{11.9}$$

から定まる．この方程式は (*11.3*) と全く同形である．積分して，

$$P=\mathrm{const}-\frac{1}{2\mu}(f^2+g^2)-\frac{1}{\mu}\int_0^r\frac{f^2}{r}dr. \tag{11.10}$$

こうして，(*11.5*) と (*11.7*) とで条件づけられた座標系 (*11.4*) を用い，柱状のプラズマ (*11.1*) をトーラス状の (*11.6*) に曲げることができた．このトーラス状プラズマは $r$ 一定のトーラス管内でつり合う．

(*11.7*) と (*11.9*) とより

$$\frac{d}{dr}(r^2f^2\xi)=-2\mu r^2\frac{dP}{dr}+rf^2 \tag{11.11}$$

が得られる．従ってもし圧力 $P$ がつねに $r$ の減少函数 ($dP/dr\leqq 0$) であればつねに $\xi>0$，さらに (*11.5*) を考慮して，つねに $\eta>0$ である．$\xi$ が正のとき，

$$\cos\theta>0 \quad \text{で} \quad (\partial s/\partial r)_{\theta,z}<1,$$
$$\cos\theta<0 \quad \text{で} \quad (\partial s/\partial r)_{\theta,z}>1,$$

ただし，$(\partial s/\partial r)_{\theta,z}$ は $\theta$ と $z$ とを固定したとき (*11.4*) で与えられる $ds$ と $dr$ との比を意味する．$r$ 一定の曲面は定圧面に一致するから，上の内容をつぎのようにまとめることができよう：内部から表面に向って圧力が単調に減少する

軸対称プラズマ柱が，緩かにトーラス状に曲げられたとき，等圧面はトーラス軸に遠い所ほどたがいに接近している．

具体的な例をあげる．

$0<r<1$ で　　$f(r)=r^n,\quad [g(r)]^2=g_0{}^2(1-r^{2n}),$

$1<r<b$ で　　$f(r)=r^{-1},\quad g(r)=0,\quad P=0,\quad J=0.$

ここに $n, g_0{}^2$ は正の定数で，表面電流模型は $n=\infty$ に相当する．ここではプラズマの半径を単位長に選んで，管の半径を $b$ とした．なおプラズマ表面での $B_\theta$ の平均をも単位にとっている．(*11. 10*) より

$r<1$ で　　$P=\dfrac{1}{2\mu}\left(1+\dfrac{1}{n}-g_0{}^2\right)(1-r^{2n});$

これから $g_0{}^2<1+n^{-1}$ でなければならない．$\xi$ と $\eta$ とを計算すれば

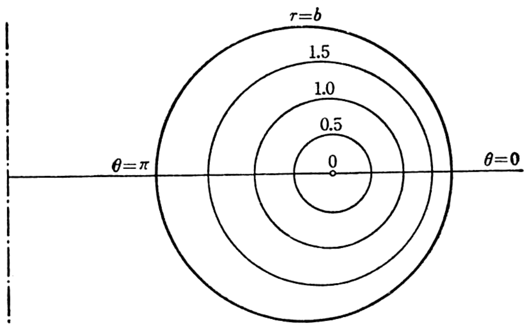
$r<1$ で　　$\xi=\eta=\alpha,$

$1<r<b$ で　　$\xi=\alpha+\log r,\quad \eta=\xi+r^{-1}-1,$

ここに

$$\alpha=1+\frac{1}{2n+2}-\frac{n}{n+1}g_0{}^2>\frac{1}{2n+2},$$

$(r,\theta)$ 面で $r$ 一定の曲線群は第 11. 1 図のように外側で密になる．




第 11. 1 図　トーラス管内のプラズマ ($\alpha=1/2,\ b=2,\ R=4$)．
左端の鎖線はトーラス対称軸．

# 第 5 章　高速気流の解法

## 流体力学の基礎方程式

### §1　基礎方程式

水や空気で代表される液体と気体とを総称して流体といい，その運動を研究する学問を流体力学とよぶのであるが，なかでも，流体中を運動する物体が流体からどのような力を受けるかというのが流体力学の最大の課題と考えられる．この章では，とくにこの問題を中心として，流体力学で利用される数学的方法を説明する．

流れの様子を完全にいいあらわすためには，流れの場を特長づける種々の物理量の値を知る必要がある．まず第一に，流速 $\boldsymbol{v}(u, v, w)$ は運動学的の量として必要である．つぎに，密度 $\rho$，圧力 $p$，温度 $T$，内部エネルギー $E$，エントロピー $S$，… などの物理量を知らなければならない．しかし，熱力学によれば，独立に変化し得る物理量は二つだけであるから，たとえば $p, \rho$ の値がわかれば $T, E, \cdots$ などはいわゆる状態方程式から求められる．したがって，けっきょく

$$\boldsymbol{v}(u, v, w);\ p, \rho$$

の 5 個の量が求まりさえすればよい．

さて，流体はもちろん物理法則にしたがうから，質量，運動量，エネルギーの保存の法則が成り立つ．質量とエネルギーはスカラー量，運動量はベクトル量であるから，これらの保存法則は合計 5 個の条件を与える．それゆえ，上記の 5 個の未知量 $\boldsymbol{v}, p, \rho$ はこれらの条件によって決定されるであろう．このことを数学的にいいあらわすのが流体の連続の方程式，運動方程式およびエネルギー方程式である．これらの導き方は流体力学の教科書にゆずり，ここでは結果の式だけを記すことにしよう．

**(a)　質量の保存**　これから連続方程式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0 \tag{1.1}$$

が導かれる．成分で書けば

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k)=0, \qquad k=1,2,3, \tag{1.2}$$

ただし，同じ添字が二度あらわれるばあいは総和の符号 $\sum$ を省略することにする.

**(b)　運動量の保存**　流体・固体を問わず，一般に連続物体について運動量保存の法則は

$$\frac{Dv_i}{Dt}=F_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}, \qquad i=1,2,3 \tag{1.3}$$

の形にあらわすことができる．ここに $D/Dt$ は

$$\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v_k\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.4}$$

であって，Lagrange 微分とよばれる．また $\boldsymbol{F}(F_1, F_2, F_3)$ は外力（単位質量について働く）で，$p_{ik}$ は応力テンソルである.

とくに，等方性の流体で応力テンソル $p_{ik}$ が変形速度テンソル $e_{ik}$ の一次函数であらわされるばあい——すなわち，いわゆる Newton 流体のばあいには

$$p_{ik}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu\Theta\right)\delta_{ik}+\mu e_{ik} \tag{1.5}$$

である．ここに

$$e_{ik}=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \tag{1.6}$$

$$\Theta=\frac{1}{2}e_{kk}=\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=\operatorname{div}\boldsymbol{v}, \tag{1.7}$$

$$\delta_{ik}=1\ \ (i=k),\ \ 0\ \ (i\neq k), \tag{1.8}$$

また $\mu$ は流体の粘性率である．(1.5) を (1.3) に代入すると

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt}=\rho F_i-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p+\frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right] \tag{1.9}$$

が得られる．これをベクトルの形であらわすと

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\operatorname{grad}q^2\right)\\ =\rho\boldsymbol{F}-\operatorname{grad}p+\frac{4}{3}\operatorname{grad}\mu\Theta+\operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\mu)-\boldsymbol{v}\nabla^2\mu\\ +\operatorname{grad}\mu\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}-\Theta\operatorname{grad}\mu-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mu\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{1.10}$$

となる．ただし $q=|\boldsymbol{v}|$ は流速の大きさ，$\nabla^2$ は Laplace の微分演算子である：

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.11}$$

(*1.9*) を **Navier-Stokes の方程式**という.

(*1.9*) の方程式はきわめて複雑で，このままでは数学的の取扱いが困難であるから，しばしばつぎのような簡単化がなされる.

(i) 粘性率の一定な縮む流体 ($\mu = \mathrm{const}$)

$$\frac{Dv_i}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 v_i. \tag{1.12}$$

(ii) 粘性率の一定な縮まない流体 ($\mu = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$)

このばあい, (*1.1*), (*1.2*) は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \tag{1.13}$$

となり，したがって (*1.12*) は

$$\frac{Dv_i}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 v_i \tag{1.14}$$

となる. これをベクトルの形で書くと

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,q^2 - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \tag{1.15}$$

である.

(iii) 粘性のない縮む流体 ($\mu = 0$)

$$\frac{Dv_i}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{1.16}$$

あるいは，ベクトルであらわすと

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,q^2 - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p. \tag{1.17}$$

これは完全流体に対する **Euler の方程式**とよばれる.

(c) **エネルギーの保存** 単位質量あたりの内部エネルギーを $E$, 熱伝導率を $\kappa$ とすれば，エネルギー保存の法則は

$$\rho\frac{DE}{Dt} = \frac{1}{2}p_{ik}e_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) \tag{1.18}$$

の形にあらわされる. 右辺の第一項は応力のなす仕事，第二項は熱の流れによる項にほかならない. (*1.18*) はまた

$$\rho\frac{DE}{Dt}=\Phi-p\Theta+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) \tag{1.19}$$

のように書くこともできる．ここに $\Phi$ は

$$\Phi=p\Theta+\frac{1}{2}p_{ik}e_{ik}=p\Theta+\frac{1}{2}\mu e_{ik}e_{ik}-\frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{3}\mu\Theta\right)e_{ik}\delta_{ik}$$

$$=\mu(e_{23}^2+e_{31}^2+e_{12}^2)+\frac{\mu}{6}\{(e_{22}-e_{33})^2+(e_{33}-e_{11})^2+(e_{11}-e_{22})^2\} \tag{1.20}$$

であって，摩擦応力のために単位時間・単位体積あたりに発生する熱量をあらわす．$\Phi$ を**散逸函数**という．明らかに $\Phi\geqq 0$ である．

さて，単位質量あたりのエントロピーを $S$，エンタルピーを $I$ とすれば，

$$T\,dS=dE+pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{1.21}$$

$$I=E+\frac{p}{\rho} \tag{1.22}$$

という関係がある．これより，エネルギーの方程式 (1.19) を

$$\rho T\frac{DS}{Dt}=\Phi+\frac{\partial}{\partial x_k}\kappa\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right), \tag{1.23}$$

$$\rho\frac{DI}{Dt}=\Phi+\frac{Dp}{Dt}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) \tag{1.24}$$

のようにあらわすこともできる．

**(d)　状態方程式**　空気などのような普通の気体では，理想気体の状態方程式：

$$p=\frac{R}{m}\rho T \tag{1.25}$$

が十分よい近似で成り立つ．ここに $m$ は気体の分子量（たとえば酸素 $O_2$ では $m=32$，水素 $H_2$ では $m=2$），$R$ は気体定数である：

$$R=82.06\ \mathrm{cm^3\,atm/^\circ K}=8.314\times10^7\ \mathrm{erg/^\circ K}=1.987\ \mathrm{cal/^\circ K}.$$

また，理想気体では，定積比熱 $c_v$，定圧比熱 $c_p$ はともに温度 $T$ だけの函数であって，内部エネルギー $E$ とエンタルピー $I$ はそれぞれ

$$E=\int c_v dT,\quad I=\int c_p dT \tag{1.26}$$

で与えられ，エントロピー $S$ は

$$S=\int\frac{c_p}{T}dT-(c_p-c_v)\log p \tag{1.27}$$

で与えられる．とくに $c_p, c_v$ が定数であると見なされるばあいには

$$E=c_vT,\quad I=c_pT,\quad S=c_v\log(p\rho^{-\gamma})+\text{const} \tag{1.28}$$

とすることができる．ただし $\gamma=c_p/c_v$ である．統計力学によれば $\gamma$ は気体分子の自由度 $f$ を使って

$$\gamma=\frac{f+2}{f} \tag{1.29}$$

のようにあらわされる．たとえば空気のような二原子分子では $f=5$ であるから，$\gamma=1.4$ である．これは実験値とよく一致する．

以上では未知数 $\boldsymbol{v}, p, \rho, T, \cdots$ を結ぶ関係式をいくつか与えた．これらの式を見ると，

(i)　縮まない流体　($\rho=\text{const}$)

(ii)　完全流体　($\mu=0$)

の二つのばあい取扱いが簡単になることに気がつく．すなわち，縮まない流体のばあいには，未知数は $\boldsymbol{v}, p$ の 4 個であるから，連続の方程式 (*1. 1*) と Navier-Stokes の方程式 (*1. 9*) との合計 $1+3=4$ 個で方程式の数が足り，エネルギーの保存は全然考慮する必要がない．つぎに完全流体すなわち粘性のない流体のばあいには，エネルギー方程式で散逸函数 $\Phi$ が 0 になる．また熱伝導の項もふつう無視してよい．(気体では熱伝導も粘性もともに気体分子の熱運動に由来するから，その一方を無視してよいばあいには他方も無視することが許される.) したがって，(*1. 23*) は

$$\frac{DS}{Dt}=0 \tag{1.30}$$

と簡単化される．すなわち流体粒子のエントロピー $S$ は運動に際して不変に保たれる．そこで (*1. 28*) を考慮すると，運動中 $p\propto\rho^{\gamma}$ の関係が成り立つことがわかる．それゆえ，エネルギー方程式のかわりに，いわゆる断熱関係式 $p\propto\rho^{\gamma}$ を用いればよい．

以下，本章では，熱伝導性のない完全流体の力学の取扱いを説明する．

## §2　完全流体の基礎方程式

流体は粘性も熱伝導性もなく，かつ理想気体の法則 (*1. 25*) および (*1. 28*) に

したがうものと仮定する．そうすれば，連続の方程式 (*1. 2*)，運動の方程式 (*1. 9*)，エネルギーの方程式 (*1. 23*)，および状態方程式はそれぞれ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{D\rho}{Dt}=-\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}, \tag{2.1}$$

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p, \tag{2.2}$$

$$\frac{DS}{Dt}=0, \tag{2.3}$$

$$p=k\rho^{\gamma}\exp(S/c_v) \tag{2.4}$$

となる．ここに $k$ は適当な定数である．このばあい，未知数は $\boldsymbol{v}(u, v, w), p, \rho, S$ の 6 個で，方程式は $1+3+1+1=6$ 個あるから，ちょうど数が足りている．

いま外力 $\boldsymbol{F}$ は保存力であると仮定し，そのポテンシアルを $\Omega$ とすれば

$$\boldsymbol{F}=-\operatorname{grad}\Omega. \tag{2.5}$$

(*1. 21*), (*1. 22*) によれば

$$dI=dE+pd\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{dp}{\rho}=T\,dS+\frac{dp}{\rho}. \tag{2.6}$$

したがって

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=\operatorname{grad}I-T\operatorname{grad}S.$$

これと (*2. 5*) とを (*2. 2*) に代入すると

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=-\operatorname{grad}(\Omega+I)+T\operatorname{grad}S \tag{2.7}$$

が得られる．

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\operatorname{grad}q^2-\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \tag{2.8}$$

であることに注意し，かつ渦度ベクトル

$$\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \tag{2.9}$$

を導入すると，(*2. 7*) は

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}-\operatorname{grad}H+T\operatorname{grad}S \tag{2.10}$$

と書きかえられる．ただし

$$H=\frac{1}{2}q^2+\Omega+I \tag{2.11}$$

である．

つぎに，二つの重要な特別なばあいを考える．

(i) **定常流** このばあい，エネルギーの方程式(2.3)は

$$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})S=0 \quad \text{すなわち} \quad q\frac{\partial S}{\partial s}=0 \tag{2.12}$$

となる．ここに $\partial/\partial s$ は流線に沿っての微分を意味する．(2.12)はただちに積分できて

$$S=\mathrm{const} \qquad (\text{流線に沿って}) \tag{2.13}$$

を与える．

つぎに，(2.10)と $\boldsymbol{v}$ とのスカラー積を作り，$\partial\boldsymbol{v}/\partial t=0$, $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})\equiv 0$ に注意し，かつ(2.12)を考慮すると

$$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})H=0 \quad \text{すなわち} \quad q\frac{\partial H}{\partial s}=0$$

を得る．したがって

$$H=\mathrm{const} \qquad (\text{流線に沿って}) \tag{2.14}$$

である．これは Bernoulli の定理にほかならない．(2.13), (2.14)によれば，エントロピー $S$ と“全エネルギー” $H$ はともに一本の流線上で一定値を保つことがわかる．

以上では流れの諸量は(2.1)～(2.3)で支配されるように，連続的に変化するものと仮定されている．流れの中に衝撃波があらわれると，その前後で密度・圧力・温度などの物理量は不連続的に変化するから，上に得た結論は必ずしもそのまま成立するとはいえない．しかし，衝撃波を通しての質量・運動量・エネルギーの保存を考えると $H$ は衝撃波を通過するときでも不変に保たれることがわかる．それに反して，エントロピー $S$ は衝撃波のところで常に変化し，しかも熱力学の第二法則によってその変化は正，すなわち $S$ は衝撃波によって不連続的に増加することがわかる．したがって(2.13)の const は一本の流線についても，衝撃波を通過するごとに異なる値をとることに注意しなければならない．

一般にエントロピー $S$ と全エネルギー $H$ はともに場所の函数であるが，とくに流れの中のある領域で一定値をとるばあい，それぞれ流れは一様エントロピー的，あるいは一様エネルギー的であるという．一様な流れの中に物体がおかれているようなばあいには，物体の無限上流では一様エントロピーかつ一様

エネルギー性が成り立つ．したがって，もし流れの中に衝撃波が発生しなければ，(2.13)，(2.14) によって，流れはいたるところ一様エントロピーかつ一様エネルギー的である．しかし，もしも衝撃波があらわれると，流れの一様エネルギー性は損われないが，衝撃波の下流で一様エントロピー性は失われる．

いずれにしても，一様流の中に物体がおかれているばあいには，一様エネルギー性 $H=\mathrm{const}$ を仮定してもよい．したがって (2.10) は

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=-T\,\mathrm{grad}\,S \qquad (2.15)$$

となる．さて衝撃波の下流では一般に $S\neq\mathrm{const}$ であるから，(2.15) によって $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ でなければならない．すなわち，衝撃波の下流では一般に流れは渦運動をする．

もしも衝撃波が発生しないか，あるいは発生しても非常に弱いばあいにはエントロピー増加は小さく，したがって近似的に一様エントロピー性が成り立つものと考えられる：$S\fallingdotseq\mathrm{const}$．そのばあいには，(2.15) から

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=0 \quad したがって \quad \boldsymbol{\omega}\parallel\boldsymbol{v} \qquad (2.16)$$

が得られる．すなわち，渦線は流線に一致する．ところが，流線は無限の上流から始まり，そこでは $\boldsymbol{\omega}=0$ であるから，実は流れの中いたるところで $\boldsymbol{\omega}=0$ でなければならない．それゆえ，粘性のない流体の運動では渦無しの仮定がなんら制限にならないことがわかる．

(ii) **渦無しの流れ** つぎに一様エントロピー性 $S=\mathrm{const}$ を仮定しよう．ただし流れは一般に非定常であってもよい．このような流れは，たとえば，無限の上流で流れが一様で，かつ流れの中に衝撃波が発生しないか，あるいは発生しても，ごく弱いばあいに実現する．さて $S=\mathrm{const}$ とすると (1.28) によって $p$ と $\rho$ との間に一定の函数関係が成り立つ．そのばあい，Helmholtz の渦定理によって，渦は不生不滅であるから，無限の上流で一様な流れを取り扱うかぎり，渦無しを仮定してもよい：$\boldsymbol{\omega}=0$．したがって速度ポテンシアル $\Phi$ が存在する：

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\,\Phi. \qquad (2.17)$$

(2.17) と $S=\mathrm{const}$ を (2.10) に代入すると

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+H\right)=0$$

が得られ，これを積分すると

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}+\Omega=f(t). \tag{2.18}$$

ここで(2.6),(2.11)が用いてある．また $f(t)$ は $t$ の任意函数である．(2.18)は拡張した Bernoulli 方程式とよばれることがある．なお,(2.17)を連続の方程式(2.1)に代入すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\,\mathrm{grad}\,\Phi)=0. \tag{2.19}$$

$p,\rho$ の間には一定の函数関係があり，また $q^2=(\mathrm{grad}\,\Phi)^2$ であるから,(2.18),(2.19)は $\Phi,\rho$ に対する連立偏微分方程式と考えることができる．

## §3　縮む完全流体の定常な渦無し運動

このばあい流れは一様エントロピー性で，したがって(1.28)により，いわゆる断熱関係

$$p=k\rho^\gamma \tag{3.1}$$

が成り立つ．しかし，以下の議論は，$p$ と $\rho$ の間に一般に

$$\rho=f(p) \tag{3.2}$$

の形の函数関係が成り立つばあいにそのまま適用される．

いま外力を無視することにすれば $\Omega=0$．したがって基礎方程式(2.18),(2.19)は

$$\frac{1}{2}q^2+\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{dp}{\rho}=0, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{div}\,(\rho\,\mathrm{grad}\,\Phi)=0 \tag{3.4}$$

と書くことができる．ただし，添字0はよどみ点 $(q=0)$ での値を意味する．(3.3)を微分形で書くと

$$dp=-\rho q\,dq. \tag{3.5}$$

さて

$$\mathrm{div}\,(\rho\,\mathrm{grad}\,\Phi)=\rho\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Phi+\mathrm{grad}\,\rho\cdot\mathrm{grad}\,\Phi,$$

また

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}dp=-\frac{1}{2c^2}d(q^2),$$

ただし

$$c=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{3.6}$$

は局所音速である．したがって (3.4) は

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{2c^2}(\operatorname{grad} q^2\cdot\operatorname{grad}\Phi) \tag{3.7}$$

と書きかえられる．

つぎに

$$\frac{\partial q^2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_x{}^2+\Phi_y{}^2+\Phi_z{}^2)=2(\Phi_x\Phi_{xx}+\Phi_y\Phi_{xy}+\Phi_z\Phi_{xz}),\quad \text{etc.}$$

(ただし添字は偏微分を意味する．たとえば $\Phi_x=\partial\Phi/\partial x$)．したがって (3.7) は

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\Phi_{xx}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Phi_{yy}+\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)\Phi_{zz}$$
$$-2\frac{vw}{c^2}\Phi_{yz}-2\frac{wu}{c^2}\Phi_{zx}-2\frac{uv}{c^2}\Phi_{xy}=0 \tag{3.8}$$

と書くこともできる．ここに

$$u=\Phi_x,\quad v=\Phi_y,\quad w=\Phi_z \tag{3.9}$$

は流速の $x, y, z$ 成分である．

(3.7) あるいは (3.8) は縮む流体の渦無し運動に対する基礎方程式と考えることができる．もしも $q\ll c$ ならば，両式はともに簡単化され

$$\nabla^2\Phi=0 \tag{3.10}$$

となる．すなわち，低速の気流は Laplace の方程式に支配される．

とくに $p, \rho$ の間に断熱関係 $p=k\rho^\gamma$ が成り立つばあいには，(3.3), (1.25), (3.6) によって，つぎの諸式が得られる：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{p}{p_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},\quad \frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},\\&\frac{T}{T_0}=\frac{c^2}{c_0{}^2}=1-\frac{q^2}{q_m{}^2},\quad q_m=\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}}c_0.\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

## $M^2$ 展開法

### §4 Janzen-Rayleigh の方法

基礎方程式 (3.7) は

$$\nabla^2\Phi=F[\Phi], \tag{4.1}$$

$$F[\Phi]=\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial q^2}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial q^2}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial q^2}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \tag{4.2}$$

の形にあらわすことができる．いま $\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\,\Phi$ を普通大すなわち $O(1)$ と仮定すると，$F[\Phi]$ は $O(M^2)$ と考えられる．ただし

$$M=\frac{q}{c} \tag{4.3}$$

は流速と音速の比で，**局所マッハ数**とよばれる量である．流れの中いたるところで $M$ が十分小さければ，(*4.1*) は以下に述べるような逐次近似法で解くことができる．

まず第零近似として，右辺を省略した Laplace の方程式：

$$\nabla^2\Phi_0=0 \tag{4.4}$$

をとる．この解 $\Phi_0$ を $F[\Phi]$ に代入して，

$$\nabla^2\Phi_1=F[\Phi_0] \tag{4.5}$$

を第一近似の方程式とする．このようにして，一般に

$$\nabla^2\Phi_N=F[\Phi_{N-1}], \qquad N=1,2,\cdots \tag{4.6}$$

によって逐次近似を求めるのである．

この方法は最初 Janzen (1913) と Rayleigh (1916) によって独立に提案され，円柱と球のまわりの流れに対して第一近似解が求められた．（この近似では局所音速 $c$ を無限遠での音速 $c_\infty$ で代用することが許される．）それゆえ，この方法を **Janzen-Rayleigh の方法**という．

さて，逐次近似を実行するには，上述の方式にしたがうよりも，つぎのようにする方が便利である．

(*3.11*) によれば

$$c^2+\frac{1}{2}(\gamma-1)q^2=c_0{}^2=c_\infty^2+\frac{1}{2}(\gamma-1)U^2,$$

ただし，$U$ は一様流の速度である．したがって

$$c^2=c_\infty^2-\frac{1}{2}(\gamma-1)(q^2-U^2). \tag{4.7}$$

これを (*4.1*), (*4.2*) に代入すれば

$$\left\{1-\frac{1}{2}(\gamma-1)M_\infty^2\left(\frac{q^2}{U^2}-1\right)\right\}\nabla^2\Phi=\frac{1}{2}M_\infty^2\left(\mathrm{grad}\,\frac{q^2}{U^2}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi\right) \tag{4.8}$$

を得る．ここに $M_\infty = U/c_\infty$ は一様流のマッハ数である．

いま $\varPhi$ は $M_\infty^2$ のベキ級数に展開できるものと仮定すれば

$$\varPhi = \varPhi_0 + M_\infty^2 \varPhi_1 + M_\infty^4 \varPhi_2 + \cdots. \tag{4.9}$$

これを (4.8) に代入して，$M_\infty^2$ の同じベキを比較すれば

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 \varPhi_0 = 0, \\ &\nabla^2 \varPhi_1 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad}\frac{q_0{}^2}{U^2}\cdot\operatorname{grad}\varPhi_0\right), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

が得られる．ここに $q_0{}^2 = (\operatorname{grad}\varPhi_0\cdot\operatorname{grad}\varPhi_0)$ である．すなわち，縮まない流体の速度ポテンシアル $\varPhi_0$ から出発して，(4.10) を解くことにより，$\varPhi_1, \varPhi_2, \cdots$ がつぎつぎと求められる．このような方法を一般的に $M^2$ **展開法**とよぶ．

上の方法によって，円柱については第四近似（$M_\infty^8$ まで正確），球については第二近似（$M_\infty^6$ まで正確）まで求められている．しかし，それ以外の物体については (4.10) の方式で逐次近似を進めることは非常に困難であって，たとえば楕円柱に一様流があたるというような簡単なばあいでも，第一近似 $\varPhi_0 + M_\infty^2 \varPhi_1$ を求めるだけでもめんどうな計算を要する．そこで，任意の形の物体について組織的に逐次近似を実行し得るような方法が望まれる．以下にそのような方法を述べる．

## §5 複素変数の導入

今後，流れは二次元的であるとし，速度を $\boldsymbol{v}(u, v)$ とする．このばあい，連続の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

であるから，流れの函数 $\varPsi(x, y)$ を使って

$$u = \frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial \varPsi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial \varPsi}{\partial x} \tag{5.1}$$

とおけば，恒等的に満足される．また，流れは渦無しであるから，速度ポテンシアル $\varPhi(x, y)$ を使って

$$u = \frac{\partial \varPhi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varPhi}{\partial y} \tag{5.2}$$

のように書ける．さて，

$$z = x+iy, \quad \bar{z} = x-iy, \tag{5.3}$$

$$F = \Phi+i\Psi \tag{5.4}$$

によって複素変数 $z, \bar{z}, F$ を導入すると

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

であるから，(5.1), (5.2) を一まとめにして

$$u-iv = 2\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2i\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z} \tag{5.5}$$

のようにあらわすことができる．したがって

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=i\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}=-i\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{z}}.$$

第二の式の両辺に $\rho/\rho_\infty$ を掛け，恒等式 $\partial\Phi/\partial\bar{z}=\partial\Phi/\partial\bar{z}$ から引けば

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}=\left(1-\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} \tag{5.6}$$

が得られる．この式は (5.1), (5.2) の連立方程式と同等であって，しかも $M\ll 1$ のとき $\rho\doteqdot\rho_\infty$ であるから $\partial F/\partial\bar{z}=O(M^2)$ になるという都合のよい性質をそなえている．したがって，二次元の流れについては (5.6) を基礎方程式にするのが便利である．

いま (4.9) に相当して

$$F = F_0+M_\infty^2F_1+M_\infty^4F_2+\cdots, \tag{5.7}$$

$$F_N = \Phi_N+i\Psi_N, \qquad N=0,1,2,\cdots$$

のような展開式を仮定すると，(3.11) から

$$\frac{\rho}{\rho_\infty}=\left(\frac{c^2}{c_\infty^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=\left\{1-\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(\frac{q^2}{U^2}-1\right)\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}=1-M_\infty^2\rho_1-M_\infty^4\rho_2-\cdots \tag{5.8}$$

が得られる．ここに

$$\left.\begin{aligned}\rho_1&=\frac{1}{2}\left(\frac{q_0{}^2}{U^2}-1\right),\\ \rho_2&=\frac{1}{2}\frac{q_1{}^2}{U^2}-\frac{2-\gamma}{8}\left(\frac{q_0{}^2}{U^2}-1\right)^2,\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

また

$$q^2 = q_0{}^2+M_\infty^2q_1{}^2+M_\infty^4q_2{}^2+\cdots, \tag{5.10}$$

ただし

$$q_N^2=4\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\frac{\partial\Phi_N}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_{N-1}}{\partial\bar{z}}+\cdots+\frac{\partial\Phi_N}{\partial z}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\bar{z}}\right). \tag{5.11}$$

(5.8) を (5.6) に代入して，$M_\infty^2$ の同じベキを比較すれば

$$\frac{\partial F_0}{\partial\bar{z}}=0, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial F_N}{\partial\bar{z}}=\rho_1\frac{\partial\Phi_{N-1}}{\partial\bar{z}}+\rho_2\frac{\partial\Phi_{N-2}}{\partial\bar{z}}+\cdots+\rho_N\frac{\partial\Phi_0}{\partial\bar{z}},\qquad N=1,2,\cdots \tag{5.13}$$

という一連の方程式が得られる．これらは直ちに積分できて

$$F_0=G_0(z), \tag{5.14}$$

$$F_N=\int\left(\rho_1\frac{\partial\Phi_{N-1}}{\partial\bar{z}}+\cdots+\rho_N\frac{\partial\Phi_0}{\partial\bar{z}}\right)d\bar{z}+G_N(z),\qquad N=1,2,\cdots. \tag{5.15}$$

ここに $G_N(z)$ $(N=0,1,2,\cdots)$ は $z$ の任意の解析函数である．$F_0=G_0(z)$ は明らかに，縮まない流体に対する複素速度ポテンシアルをあらわす．それゆえ，(5.15) によれば，縮まない流体に対する解 $F_0$ から出発して，組織的に逐次近似 $F_1, F_2, \cdots$ を計算することができるのである．

## §6　境界条件

一様流の中に物体がおかれているばあいについて境界条件を求めよう．まず (5.4), (5.5) から

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)(u-iv) \tag{6.1}$$

が得られる．$u, v, \rho$ はもちろん流れの中で場所の一価函数であるから，(6.1) により $\partial F/\partial z$ も一価である．つぎに，無限遠 $z\to\infty$ では流れは一様流であるから $u\to U$, $v\to 0$, $\rho\to\rho_\infty$. したがって (6.1) は

$$z\to\infty\quad のとき\quad \frac{\partial F}{\partial z}\to U \tag{6.2}$$

という条件を与える．最後に，流れは物体表面に沿うから，表面自身が流線に一致する．すなわち

$$物体表面で\qquad \Psi=\Im(F)=\text{const}\ (=0) \tag{6.3}$$

である．(6.2), (6.3) が $F$ に対する境界条件である．

さて，第零近似では (5.14) により $F_0=f(z)$ とおくと，$f(z)$ は解析函数で，したがって上の諸条件はつぎのようにあらわされる：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)}\ df/dz\ \text{は流れの場で一価正則である,} & \\ \text{(ii)}\ z\to\infty\ \text{のとき}\quad df/dz\to U, & \\ \text{(iii)}\ \text{物体表面で}\quad \Psi_0=\Im(f)=0. & \end{array}\right\} \tag{6.4}$$

また，高次の近似については

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)}\ \partial F_N/\partial z\ \text{は流れの場で一価連続である,} & \\ \text{(ii)}\ z\to\infty\ \text{のとき}\quad \partial F_N/\partial z\to 0, & \\ \text{(iii)}\ \text{物体表面で}\quad \Psi_N=\Im(F_N)=0 & \end{array}\right\} \tag{6.5}$$

を要求すればよい.

## §7　第一近似

第一近似では (5.15) は

$$F_1=\int\rho_1\frac{\partial\Phi_0}{\partial\bar{z}}d\bar{z}+G_1(z) \tag{7.1}$$

となる．ここで

$$\Phi_0=\Re(f)=\frac{1}{2}[f(z)+\bar{f}(\bar{z})]$$

であるから,

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}.$$

したがって (5.9), (5.11) によって

$$\rho_1=\frac{1}{2}\left(\frac{q_0{}^2}{U^2}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{U^2}\frac{df}{dz}\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}-1\right).$$

それゆえ (7.1) は

$$F_1=\frac{1}{4U^2}\frac{df}{dz}\int\left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}\right)^2d\bar{z}-\frac{1}{4}\bar{f}(\bar{z})+G_1(z) \tag{7.2}$$

と書ける.

例題〕 円柱を過ぎる流れ．一様流の速度を簡単のために $U=1$ とする．また円柱の半径を1とする．このとき，縮まない流体に対する複素速度ポテンシアルは周知のとおり

$$f=z+\frac{1}{z} \tag{7.3}$$

で与えられる．実際，(6.4) の条件 (i), (ii) は明らかに満たされている．また，円柱表面では $z=e^{i\theta}$ ($\theta$ は偏角) とおけるから,

$$f=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta.$$

したがって，$\Phi_0=2\cos\theta$, $\Psi_0=0$ で条件 (iii) も満足されている.

つぎに，(7.3) を (7.2) に代入して積分を実行すると

$$F_1 = H_1(z, \bar{z}) + G_1(z), \tag{7.4}$$

ただし

$$H_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{4}\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{12}\frac{1}{\bar{z}^3} - \frac{1}{4}\frac{\bar{z}}{z^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2\bar{z}} - \frac{1}{12}\frac{1}{z^2\bar{z}^3} \tag{7.5}$$

という式が得られる．ここで任意函数 $G_1(z)$ は境界条件 (6.5) を満足するように定めなければならない．さて $H_1(z, \bar{z})$ はたしかに (6.5) の (i), (ii) の条件を満足するから，解析函数 $G_1(z)$ は同じ条件を満足しなければならない．また (iii) の条件は

$$z\bar{z} = 1 \quad \text{に対して} \quad \Im(G_1) = -\Im(H_1) \tag{7.6}$$

と書くことができる．ところが，$z\bar{z}=1$ では $\Im(H_1)$ をつぎのように変形することができる：

$$\begin{aligned}\Im(H_1) &= \Im\left(\frac{1}{4}\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{12}\frac{1}{\bar{z}^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{12}\frac{1}{\bar{z}}\right)\\ &= \Im\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{z} + \frac{1}{12}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{12}\frac{1}{z}\right)\\ &= \Im\left(-\frac{5}{6}\frac{1}{z} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3}\right).\end{aligned} \tag{7.7}$$

第一行目では $z\bar{z}=1$ の関係を使って各項を $z^{-m}, \bar{z}^{-m}$ $(m>0)$ の形に直し，第二行目では $\Im(\bar{g}(\bar{z})) = -\Im(g(z))$ の関係を使って $z$ のみの函数に直してある．(7.6) と (7.7) とを比較すれば

$$G_1 = \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{5}{6}\frac{1}{z} \tag{7.8}$$

とおけばよいことが直ちにわかる．けっきょく複素速度ポテンシアルの第一近似は

$$F = f + M_\infty^2\{H_1(z, \bar{z}) + G_1(z)\} \tag{7.9}$$

で与えられる．ただし，$f, H_1, G_1$ はそれぞれ (7.3), (7.5), (7.8) で与えられる．

(7.9) に $z = re^{i\theta}$ を代入して，実数部と虚数部に分けると

$$\Phi = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + M_\infty^2\left\{\left(\frac{13}{12}\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{12}\frac{1}{r^5}\right)\cos\theta - \left(\frac{1}{4}\frac{1}{r} - \frac{1}{12}\frac{1}{r^3}\right)\cos 3\theta\right\} + \cdots, \tag{7.10}$$

$$\Psi = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta + M_\infty^2\left\{-\left(\frac{7}{12}\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{1}{r^3} - \frac{1}{12}\frac{1}{r^5}\right)\sin\theta + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{r} - \frac{1}{4}\frac{1}{r^3}\right)\sin 3\theta\right\} + \cdots \tag{7.11}$$

が得られる．

## §8　任意物体を過ぎる流れの複素速度ポテンシアル

前節では円柱のばあいの取扱いを示したが，以下では任意の断面形をもつ柱 P に対する解を求めよう．

まず第零近似すなわち縮まない流体についての解を求める．それには，$z$ 平面における P の外部の領域を $Z$ 平面の単位円：$Z = e^{i\theta}$ の外部に等角写像する

解析函数を知る必要がある．函数論の定理によれば，そのような函数は

$$z = c_{-1}Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \cdots, \qquad c_{-1} = ae^{i\delta} \tag{8.1}$$

の形の Laurent 級数に展開されることが知れている．いま

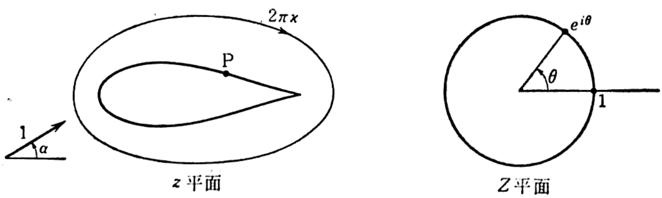
$$F_0 = f(z) = a\{e^{i(\delta-\alpha)}Z + e^{-i(\delta-\alpha)}Z^{-1}\} + i\kappa \log Z \tag{8.2}$$

とおけば，

$$z \to \infty \text{ のとき} \qquad \frac{\partial F_0}{\partial z} \to e^{-i\alpha}, \tag{8.3}$$

$$Z = e^{i\theta} \text{ では} \qquad F_0 = 2a\cos(\theta+\delta-\alpha) - \kappa\theta \tag{8.4}$$

である．(*8.3*) を (*6.1*) と比べると，$F_0$ は無限遠では $x$ 軸から $\alpha$ だけ傾いた速度 1 の一様流をあらわすことがわかる．つぎに $Z = e^{i\theta}$ (したがって $z$ 平面の物体 P の上) では $\Im(F_0) = 0$ であるから (第 8.1 図)，$F_0$ は物体 P に沿う流れをあらわす．また P を正の向きに一周するとき $\theta$ は $2\pi$ だけ増加するから，速度ポテンシアル $\Phi_0 = \Re(F_0)$ は $2\pi\kappa$ だけ減少する．すなわち物体のま



第 8.1 図

わりに時計方向の循環 $2\pi\kappa$ がある．けっきょく，物体 P に迎角 $\alpha$ であたる速度 $U=1$ の一様流は (*8.2*), (*8.1*) の $f(z)$ によって与えられるのである．(循環 $2\pi\kappa$ はさし当り任意であるが，後縁のとがった翼型では，そこで流速が有限であるという条件によって決定される．その条件のことを Kutta の条件あるいは Joukowski の仮定という．)

つぎに，一般に第 $N$ 近似を求める方法を述べる．いま第 $N-1$ 近似がすでに求まっているものとすると，(*5.15*) によって

$$F_N = H_N(z, \bar{z}) + g_N(z) \tag{8.5}$$

の右辺の函数 $H_N$ が具体的に計算できるであろう．その際，(i) $\partial H_N/\partial z$ が流れの中で一価連続，(ii) $z \to \infty$ のとき $\partial H_N/\partial z \to 0$，の条件を満足させることは簡単である．($N=1, 2$ については下に $H_N$ の具体的な形を与える．) そうす

れば，$F_N$ に対する (6.5) の条件によって，解析函数 $g_N(z)$ はつぎの条件を満たすべきことがわかる．

(i) $dg_N/dz$ は流れの場で一価正則である，

(ii) $z\to\infty$ のとき $dg_N/dz\to 0$,

(iii) 物体表面で $\Im(g_N) = -\Im(H_N)$.

ここで，(8.1) の関係により $z$ 平面から $Z$ 平面にうつると，

$$\frac{dg_N}{dZ} = \frac{dg_N}{dz}\frac{dz}{dZ}$$

であるから，上の三つの条件は

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & dg_N/dZ \text{ は単位円外 } |Z|>1 \text{ で一価正則,} \\ \text{(ii)} & Z\to\infty \text{ のとき } \quad dg_N/dZ\to 0, \\ \text{(iii)} & \text{単位円}: Z=e^{i\theta} \text{ の上で} \quad \Im(g_N) = -\Im(H_N)\end{array}\right\} \tag{8.6}$$

のように書きかえられる．(i), (ii) により $dg_N/dZ$ は $Z^{-1}$ のベキ級数に展開されるから，その結果を $Z$ について積分すれば

$$g_N = i\kappa_N \log Z + a_0^{(N)} + a_1^{(N)} Z^{-1} + \cdots$$

となる．いま，循環流をあらわす項 $i\kappa_N \log Z$ をすべて第零近似の循環項にこめてしまえば，(8.2) の $\kappa$ を

$$\kappa = \kappa_0 + M_\infty^2 \kappa_1 + M_\infty^4 \kappa_2 + \cdots \tag{8.7}$$

のようにおきかえればよい．そうすれば $g_N$ は単に

$$g_N = a_0^{(N)} + a_1^{(N)} Z^{-1} + a_2^{(N)} Z^{-2} + \cdots \tag{8.8}$$

と書くことができる．残る問題は (8.6) の条件 (iii) を満たすように $g_N$ を定めることである．

いま物体 P の表面上の点 $z=z_P$ (したがって $Z=e^{i\theta}$) を考え

$$g(e^{i\theta}) = R(\theta) + iI(\theta), \tag{8.9}$$

$$H(z_P, \bar{z}_P) = P(\theta) + iQ(\theta) \equiv H(e^{i\theta}) \tag{8.10}$$

とおく．(簡単のためにしばらく添字 $N$ を省略する.) (8.5) を実数部と虚数部に分けると

$$\Phi(\theta) = P(\theta) + R(\theta), \quad \Psi(\theta) = Q(\theta) + I(\theta). \tag{8.11}$$

ところが，表面上では $\Psi(\theta) = 0$ であるから

$$I(\theta) = -Q(\theta) = -\Im(H(e^{i\theta})). \tag{8.12}$$

単位円外で正則な函数 $g(z)$ は Poisson-Schwarz の公式により

$$g(Z)=a_0+\frac{1}{2\pi}\int_C I(\theta)\frac{Z+\sigma}{Z-\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma} \qquad (\sigma=e^{i\theta})$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_C I(\theta)\frac{d\sigma}{Z-\sigma}+\text{const}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C[H(\sigma)-\overline{H}(\sigma^{-1})]\frac{d\sigma}{\sigma-Z}+\text{const} \tag{8.13}$$

のように計算できる．ここに積分路 C は単位円 $\sigma=e^{i\theta}$ である．$H(\sigma)$ は既知函数であるから，$g(z)$ の計算は機械的に遂行できる．とくに，物体 P を単位円にうつす写像函数 $z(Z)$ が有理函数のばあいには，(8.13) の積分は留数定理を使って容易に計算される．楕円柱や Joukowski 翼のばあいがその例である．

つぎに，第零近似 $f(z)$ を用いてあらわした $H_1, H_2$ の具体的な函数形を示す：

$$H_1=\frac{1}{4}w\overline{B}-\frac{1}{4}\overline{A}, \tag{8.14}$$

$$H_2=\frac{1}{16}(w\overline{w}-1)\overline{w}B+\frac{1}{32}w'\overline{B}^2+\frac{1}{16}\left\{4g_1'-i\kappa(2e^{i\alpha}w-1)\frac{Z'}{Z}\right\}\overline{B}$$
$$+\frac{1}{8}w\left[\int_{z_0}^{z}\left\{4g_1'-i\kappa(e^{i\alpha}w-1)\frac{Z'}{Z}\right\}w\,dz\right]^*$$
$$-\frac{1}{16}(4g_1+i\kappa\log Z\overline{Z})^*+\frac{1}{2}H_1-\frac{\gamma+1}{16}(8H_1+\overline{A}-w^2\overline{C}), \tag{8.15}$$

ただし

$$w=f'=\frac{df}{dz}, \tag{8.16}$$

$$A=f+i\kappa\log\overline{Z}, \tag{8.17}$$

$$B=\int w^2dz+2i\kappa e^{-i\alpha}\log\overline{Z}, \tag{8.18}$$

$$C=\int w^3dz+3i\kappa e^{-2i\alpha}\log\overline{Z}. \tag{8.19}$$

ここに上棒および * 印は共役複素数を意味する．

## §9 任意物体の表面速度分布

(8.2), (8.5), (8.13) と (8.14) 以下の式を使うと，任意物体に一様流があたるばあいの複素速度ポテンシアルが計算できるが，とくにわれわれに重要なのは物体表面の速度分布である．これを求める方法をつぎに考えよう．

いま $G(Z)$ が $Z$ 平面の単位円外で一価正則な解析函数であるとすれば，

$$G(Z)=C_0+\frac{C_1}{Z}+\frac{C_2}{Z^2}+\cdots,\qquad C_n=A_n+iB_n \tag{9.1}$$

のように Laurent 級数に展開できる．ここで $Z=e^{i\theta}$ とおけば

$$G(e^{i\theta})=R(\theta)+iI(\theta). \tag{9.2}$$

ただし

$$R(\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta), \tag{9.3}$$

$$I(\theta)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-A_n\sin n\theta+B_n\cos n\theta). \tag{9.4}$$

したがって

$$R(\theta)=A_0+I^*(\theta),\quad I(\theta)=B_0-R^*(\theta) \tag{9.5}$$

という関係がある．ここに * 印は共役 Fourier 級数を意味する．すなわち，一般に Fourier 級数

$$F(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{9.6}$$

が与えられたばあい，その係数を使って

$$F^*(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin n\theta-b_n\cos n\theta) \tag{9.7}$$

のように定義される Fourier 級数が $F(\theta)$ の**共役 Fourier 級数**である．$F^*(\theta)$ はまた

$$F^*(\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[F(\varphi+\theta)-F(\theta)]\cot\frac{\varphi}{2}\,d\varphi \tag{9.8}$$

によって計算することもできる．

(9.5) の関係を (8.9) に代入し，(8.11) と (8.12) を利用すると

$$g(e^{i\theta})=I^*(\theta)+iI(\theta)+\text{const}=-[Q^*(\theta)+iQ(\theta)]+\text{const}, \tag{9.9}$$

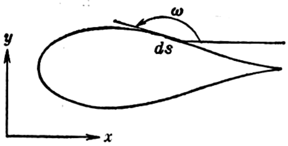
$$\Phi(\theta)=P(\theta)-Q^*(\theta)+\text{const} \tag{9.10}$$

が得られる．すなわち，物体表面での速度ポテンシアル $\Phi$ が既知函数 $H(e^{i\theta})$ の実数部と虚数部（の共役 Fourier 級数）を用いてあらわされたわけである．つぎに $P(\theta), Q(\theta)$ の具体的な形を求めよう．

まず (8.4) により，物体表面 ($Z=e^{i\theta}$) では，

$$f=\Phi_0(\theta)=2a\cos(\theta-\alpha+\delta)-\kappa\theta. \tag{9.11}$$

物体表面に沿う線要素を $ds$, それが $x$ 軸となす角度を $\omega$ とすれば (第 9.1 図)



第 9.1 図

$$dz = ds\,e^{i\omega} \tag{9.12}$$

である. したがって (8.16), (8.17), (8.18) は

$$w = -qe^{-i\omega}, \tag{9.13}$$

$$A = 2a\cos(\theta-\alpha+\delta), \tag{9.14}$$

$$B = \int q^2 e^{-i\omega} ds + 2\kappa\, e^{-i\alpha}\theta \tag{9.15}$$

となる. ここに

$$q = -\frac{d\Phi_0}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \{2a\sin(\theta-\alpha+\delta)+\kappa\}\frac{d\theta}{ds} \tag{9.16}$$

は第零近似, すなわち, 縮まない流体についての速度の大きさである. (簡単のために $q_0$ の添字 0 を省略してある.) 上の諸式を (8.14) に代入して実数部と虚数部に分けると

$$P_1 = -\frac{1}{4}q(C\cos\omega+S\sin\omega)-\frac{a}{2}\cos(\theta-\alpha+\delta), \tag{9.17}$$

$$Q_1 = -\frac{1}{4}q(S\cos\omega-C\sin\omega). \tag{9.18}$$

ただし

$$C = \int q^2\cos\omega\, ds + 2\kappa\theta\cos\alpha, \tag{9.19}$$

$$S = \int q^2\sin\omega\, ds + 2\kappa\theta\sin\alpha. \tag{9.20}$$

$P_1, Q_1$ を (9.10) に用いると, $\Phi_1(\theta)$ が計算できるのであるが, 実際計算にはもう少し変形を行なっておく方が便利である.

一般に

$$P(\theta)+iQ(\theta) \equiv H(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\theta} \tag{9.21}$$

とすると, 共役 Fourier 級数の定義によって

$$P(\theta)-Q^*(\theta) = 2\,\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{ni\theta}\right)+\text{const} \tag{9.22}$$

である. したがって, $P(\theta)-Q^*(\theta)$ の計算には $H(Z)$ の Laurent 展開式中で $Z$ の負ベキの項は関係しない. この事実を利用して $H$ の代りにもう少し簡単

なある函数 $H_1$ を使おうというのがわれわれの方針である.

まず (8.1), (8.2) によって

$$w=\frac{df}{dz}=e^{-i\alpha}+i\kappa\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{9.23}$$

$$\int w^2dz=e^{-2i\alpha}z+2i\kappa\, e^{-i\alpha}\log Z+\text{const}+O(z^{-1}). \tag{9.24}$$

それゆえ, 物体表面 (したがって $Z=e^{i\theta}$) で (8.17), (8.18) は

$$A=e^{-i\alpha}z+O(Z^{-1}), \tag{9.25}$$

$$B=e^{-2i\alpha}z+\text{const}+O(Z^{-1}) \tag{9.26}$$

となり, したがって (8.14) は

$$\begin{aligned}4H_1&=w(\bar{B}-B)-(\bar{A}-A)+wB-A\\&=-2iw\,\Im(B)+2i\,\Im(A)+ae^{-i(\alpha-\delta)}(e^{-2i\alpha}-1)Z+P(Z^{-1})\end{aligned} \tag{9.27}$$

のように書きかえられる. ここに $P(z)$ は $z$ の昇ベキ級数をあらわす. 上に述べたとおり $P(Z^{-1})$ は $\Phi_1(\theta)$ の計算には影響を与えないから省略することができる. したがって (9.27) の実数部と虚数部をとれば

$$P_{1m}(\theta)=-\frac{1}{2}qS\sin\omega+a\sin\alpha\sin(\theta-2\alpha+\delta), \tag{9.28}$$

$$Q_{1m}(\theta)=-\frac{1}{2}qS\cos\omega \tag{9.29}$$

が得られる. この結果を前の (9.17), (9.18) と比較して気のつくことは, $C$ が含まれていないことである. それゆえ数値計算を実行するときにとくに好都合である. 実際, 実用の薄い翼型にこの方法を応用するばあいには, $\sin\omega$ はふつう小さい値をとり, したがって (9.20) で定義される $S$ の数値計算に伴う誤差が少ないからである.

(9.28), (9.29) はもう少しきれいな形に書くことができる. まず, 迎角 $\alpha$ が 0 であれば

$$P_{1m}(\theta)=-\frac{1}{2}q\sin\omega\int q^2\sin\omega\,ds,$$

$$Q_{1m}(\theta)=-\frac{1}{2}q\cos\omega\int q^2\sin\omega\,ds$$

である. ここで流れの場全体を $\alpha$ だけ傾けることにすれば $\omega$ は $\omega-\alpha$ に変えられる. したがって

$$P_{1m}(\theta) = -\frac{1}{2} q \sin(\omega-\alpha) \int q^2 \sin(\omega-\alpha)\, ds, \tag{9.30}$$

$$Q_{1m}(\theta) = -\frac{1}{2} q \cos(\omega-\alpha) \int q^2 \sin(\omega-\alpha)\, ds \tag{9.31}$$

が任意の迎角 $\alpha$ のばあいを与えることになる．

同様の計算は第二，第三，…近似についても行うことができる．以上をまとめると，任意の物体の表面の速度は

$$q = q_0 + M_\infty^2 q_1 + M_\infty^2 q_2 + \cdots \tag{9.32}$$

の形にあらわされる．ただし

$$q_0 = \{2a \sin(\theta-\alpha+\delta)\} + \kappa_0\} \frac{d\theta}{ds}, \tag{9.33}$$

$$q_N = \{-P'_{Nm}(\theta) + Q^{*\prime}_{Nm}(\theta) + \kappa_1\} \frac{d\theta}{ds}, \qquad N = 1, 2, \cdots, \tag{9.34}$$

$$P_{1m} = -\frac{1}{2} S q_0 \sin(\omega-\alpha), \quad Q_{1m} = -\frac{1}{2} S q_0 \cos(\omega-\alpha), \tag{9.35}$$

$$S = \int q_0{}^2 \sin(\omega-\alpha)\, ds \tag{9.36}$$

である．($P_{2m}$, $Q_{2m}$ の具体的な形は省略する．)

例題〕 円柱を過ぎる流れ（循環のあるばあい．）縮まない流体に対する複素速度ポテンシアルは

$$f = z + z^{-1} + i\kappa \log z \tag{9.37}$$

で与えられる．ただし，円柱の半径を 1，無限遠での流速を $U=1$ とする．(*8.14*) を使うと

$$H_1 = \frac{1}{4}(1 + i\kappa z^{-1} - z^{-2}) \left\{ \bar{z} + (\kappa^2+2)\bar{z}^{-1} - i\kappa \bar{z}^{-2} - \frac{1}{3}\bar{z}^{-3} - 2i\kappa \log z\bar{z} \right\}$$
$$- \frac{1}{4}(\bar{z} + \bar{z}^{-1} - i\kappa \log z\bar{z}). \tag{9.38}$$

円柱：$z = e^{i\theta}$ の表面では

$$z = \sigma, \quad \bar{z} = \sigma^{-1}, \quad \sigma = e^{i\theta}$$

と書ける．したがって

$$H_1(\sigma) = \frac{1}{4} \left\{ -\sigma^{-3} + i\kappa\sigma^{-2} - (\kappa^2+2)\sigma^{-1} + i\kappa(\kappa^2+3) \right.$$
$$\left. + \left(2\kappa^2 + \frac{4}{3}\right)\sigma - \frac{4}{3} i\kappa\sigma^2 - \frac{1}{3}\sigma^3 \right\}. \tag{9.39}$$

したがって

$$H_1(\sigma) - \bar{H}_1(\sigma^{-1}) = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{2}{3}(\sigma^{-3} - \sigma^3) - \frac{1}{3} i\kappa (\sigma^{-2} + \sigma^2) \right.$$

$$-\left(3\kappa^2+\frac{10}{3}\right)(\sigma^{-1}-\sigma)+2i\kappa(\kappa^2+3)\Big\}. \qquad (9.40)$$

(8.13) によれば

$$g_1=\frac{1}{2\pi i}\int_C (H_1-\bar{H}_1)\frac{d\sigma}{\sigma-z}=\mathrm{Res}_{\sigma=0}\left(\frac{H_1-\bar{H}_1}{\sigma-z}\right).$$

右辺は $\sigma=0$ における留数で，これは容易に計算される：

$$g_1=\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\kappa^2\right)\frac{1}{z}+\frac{1}{12}i\kappa\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{z^3}. \qquad (9.41)$$

(9.38), (9.41) を用いて $F_1=H_1+g_1$ とすれば，複素速度ポテンシアルの $M_\infty{}^2$ の項が求められる．

円柱表面の速度のみを問題にするならば，(9.10), (9.22) の関係により (9.39) で $\sigma$ の正ベキの項だけを考え，それの実数部をとればよい．それゆえ

$$\Phi_1(\theta)=\left(\kappa^2+\frac{2}{3}\right)\cos\theta+\frac{2}{3}\kappa\sin 2\theta-\frac{1}{6}\cos 3\theta.$$

したがって，

$$q_1(\theta)=-\frac{d\Phi_1}{d\theta}=\left(\kappa^2+\frac{2}{3}\right)\sin\theta-\frac{4}{3}\kappa\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 3\theta. \qquad (9.42)$$

これは Janzen-Rayleigh の方法を使って Lamb がはじめて求めた結果と一致する．

上の例のように (9.21) の級数 $\sum C_n e^{ni\theta}$ が有限項で終るばあいには，$P-Q^*$ の計算は簡単である．しかし一般には，写像函数 $z(Z)$ が比較的簡単なばあいでも $H(e^{i\theta})$ は無限級数になる．そのようなばあい，つぎの公式が便利である．

元来 $H(e^{i\theta})$ は単位円：$Z=e^{i\theta}$ の上だけで定義されているが，これを $H(Z)$ として $Z$ の解析函数と考えれば

$$H(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n Z^n \qquad (9.43)$$

のように Laurent 級数に展開される．そして $H(Z)$ の正則な領域を D とすれば，D はたしかに単位円を含んでいる．いま，D の中にあり，かつ $Z=\zeta$ を内部に含むような閉曲線 C についての線積分を考えると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\zeta^n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{H(Z)}{Z-\zeta}dZ \qquad (9.44)$$

である．なぜならば，$H(Z)$ の負ベキの項は C の外部で正則で，したがって積分には寄与しない．また正ベキの項については Cauchy の積分定理が成り立つからである．

(9.10), (9.22) に (9.44) を応用すると

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{\pi}\Im\int_C \frac{H(Z)}{Z-e^{i\theta}}dZ \qquad (9.45)$$

が得られる．楕円柱や Joukowski 翼のように写像函数 $z(Z)$ が有理式であらわされるようなばあいには，(*9.45*) を利用すれば物体表面の速度分布が解析的に計算できる．

最後に，同じ形の翼型が無限に並んで翼列を作るばあいにも上と同様な方法が適用できることを注意しよう．そのような問題は，たとえばタービンの翼に関連して重要な意味をもつものである．

# 薄 翼 理 論

## §10 Prandtl-Glauert の法則

$M^2$ 展開法はその近似の性質上，比較的厚い翼型にマッハ数の小さい流れがあたるばあいの取扱いに適している．実用の翼型は薄いので，このことを基礎におく近似理論が有効である．Prandtl と Glauert にはじまる薄翼理論がそれである．基礎方程式として (*3.8*) すなわち

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\Phi_{xx}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Phi_{yy}+\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)\Phi_{zz}$$
$$-2\frac{vw}{c^2}\Phi_{yz}-2\frac{wu}{c^2}\Phi_{zx}-2\frac{uv}{c^2}\Phi_{xy}=0 \qquad (10.1)$$

をとろう．いま $x$ 軸方向の一様な流れの中に薄い翼が $xy$ 面にほぼ平行におかれているものとする．翼のためにひき起される速度は小さいから，たとえば $\varepsilon$ の程度の小さい量と考えられる：

$$v,w=O(\varepsilon).$$

そうすれば

$$q^2=u^2+v^2+w^2=u^2+O(\varepsilon^2),$$
$$c^2={c_0}^2-\frac{1}{2}(\gamma-1)\,q^2={c_0}^2-\frac{1}{2}(\gamma-1)\,u^2+O(\varepsilon^2),$$
$$M^2=q^2/c^2=u^2/c^2+O(\varepsilon^2).$$

したがって (*10.1*) は近似的に

$$(1-M^2)\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}=0 \qquad (10.2)$$

となる．ここに $M$ は局所マッハ数で，流れの中の場所によって変化する．

一様流の速度を $U$ とし

$$\Phi=Ux+\phi \qquad (10.3)$$

とおけば，$\phi$ は翼によってひき起された流れをあらわす速度ポテンシアルで，これも $O(\varepsilon)$ と考えられよう．したがって

$$\left.\begin{aligned} u = U+\phi_x,\ \ v = \phi_y,\ \ w = \phi_z, \\ M^2 = M_\infty{}^2+O(\varepsilon),\ \ M_\infty = U/c_\infty \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

となり，(10.2) は

$$(1-M_\infty{}^2)\,\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz} = 0 \tag{10.5}$$

と簡単になる．これがふつうの薄翼理論の基礎方程式である．

ここでは，音よりおそい流れ $M_\infty<1$ のばあいを考えることにしよう．いま

$$\xi = x,\quad \eta = \mu y,\quad \zeta = \mu z, \tag{10.6}$$

$$\phi(x,y,z) = \lambda\phi_i(\xi,\eta,\zeta), \tag{10.7}$$

$$\mu = \sqrt{1-M_\infty{}^2} \tag{10.8}$$

によって新しい変数 $\xi,\eta,\zeta\,;\phi_i$ を定義する．ただし $\lambda$ はさしあたり未定の定数とする．そうすれば (10.5) は

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial\zeta^2}=0 \tag{10.9}$$

となる．これは縮まない流体のばあいの基礎方程式，すなわち Laplace の方程式である．したがって，縮まない流体に対する解がわかっていると，(10.6), (10.7) の関係によって縮む流体に対する解がただちに得られる．その際の境界の対応をつぎに考えよう．

物体の形が

$$z = g(x,y) \tag{10.10}$$

によって与えられるとする．その法線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}(l,m,n)$ とすれば

$$l:m:n = -g_x:-g_y:1.$$

物体表面では速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{n}$ に直角であるから

$$-ug_x-vg_y+w = 0.$$

物体は薄いから $g = O(\varepsilon)$ と考えられる．したがって，(10.4) を代入し $O(\varepsilon^2)$ を無視すると

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} = Ug_x(x,y) \tag{10.11}$$

という境界条件が得られる．また無限遠での条件は

$$(x, y, z) \to \infty \text{ のとき } (\phi_x, \phi_y, \phi_z) \to 0 \tag{10.12}$$

である．

以上の条件を $\xi, \eta, \zeta, \phi_i$ を使ってあらわすと

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = \frac{U}{\lambda\mu} g_\xi(\xi, \eta), \tag{10.13}$$

$$(\xi, \eta, \zeta) \to \infty \quad \text{のとき} \quad (\phi_{i\xi}, \phi_{i\eta}, \phi_{i\zeta}) \to 0 \tag{10.14}$$

となる．このような境界条件のもとに Laplace の方程式 (*10.9*) をとくことは，$(\xi, \eta, \zeta)$ 空間で $\xi$ 軸に平行な速度 $U$ の一様流の中に

$$\zeta = \frac{1}{\lambda\mu} g(\xi, \eta) \tag{10.15}$$

で与えられる物体がおかれているときの縮まない流体の流れを求めることにほかならない．

このばあい，流れの中の圧力にどのような対応関係があるかを調べよう．圧力を次元のない数であらわすために圧力係数 $C_p$ をつぎのように定義する：

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2}. \tag{10.16}$$

ここに添字 $\infty$ は一様流での値を意味する．(*10.11*), (*10.7*), (*10.4*) の関係を利用すると

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{2p_\infty}{\rho_\infty U^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2c_\infty{}^2}{\gamma U^2}\left[\left\{1 - \frac{\gamma - 1}{2c_\infty{}^2}(q^2 - U^2)\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right] \\ &= -\frac{2\phi_x}{U} - \frac{1}{U^2}(\mu^2\phi_x{}^2 + \phi_y{}^2 + \phi_z{}^2) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{10.17}$$

が得られる．したがって第一近似として

$$C_p(x, y, z) = -\frac{2\phi_x}{U} = -\frac{2\lambda\phi_{i\xi}}{U} = \lambda C_{pi}(\xi, \eta, \zeta) \tag{10.18}$$

の関係が成り立つ．ただし $C_{pi}$ は縮まない流体に対する圧力係数である．とくに物体表面では $z, \zeta$ は $O(\varepsilon)$ であるから，(*10.18*) で $O(\varepsilon^2)$ の項を無視して得られる

$$C_p(x, y, 0) = \lambda C_{pi}(\xi, \eta, 0)$$

を物体表面での圧力係数と考えることができる．

いままで $\lambda$ は任意であったが，ここで $\lambda=1$ と選ぶと $C_p=C_{pi}$，したがってつぎの定理を得る．“高速気流の中におかれた薄翼の性質は，その翼の厚さ，反り，迎角を $\mu^{-1}$ 倍し，翼幅を $\mu$ 倍に縮めて得られる翼が縮まない流体の中にあるときの性質と同じである．” これを Prandtl-Glauert の法則という．この法則は単独の物体のみならず，複葉翼や翼列のばあいや，平行な二つの壁のあいだに翼があるばあいなどにも適用される．ただし，翼幅と同時に翼相互の距離を一様流と直角の方向に $\mu$ 倍に縮めなければならない．

## §11 薄翼展開法

前節の近似理論によれば，音よりおそい薄翼の性質は縮まない流体の理論からただちに得られる．この理論を Prandtl-Glauert の薄翼理論という．つぎに $M^2$ 展開法と同様な手法で薄翼理論の近似を進めることを考えよう．

基礎方程式 (*10.1*) は (*10.3*) で定義される $\phi$ を用いて

$$(1-M_\infty{}^2)\,\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=F[\phi] \tag{11.1}$$

のように書きあらわされる．ここに

$$F[\phi]=(1/c^2)[\{(U+\phi_x)^2-U^2\}\phi_{xx}+\phi_y{}^2\phi_{yy}+\phi_z{}^2\phi_{zz}$$
$$+2\phi_y\phi_z\phi_{yz}+2\phi_z\phi_x\phi_{zx}+2\phi_x\phi_y\phi_{xy}]. \tag{11.2}$$

$\phi$ とその微分を $O(\varepsilon)$ と仮定すると $F[\phi]$ は $O(\varepsilon^2)$ である．したがって Prandtl-Glauert の方程式 (*10.5*) を第一近似として，$M^2$ 展開法と同様の方法で (*11.1*) を逐次近似的にとくことができる．これを**薄翼展開法**という．

ここでは，二次元の流れについて組織的に逐次近似を求める方法を述べよう．基礎方程式としては (*5.1*), (*5.2*) から得られる

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{11.3}$$

をとる．簡単のために $U=1$ とし，

$$\Phi=x+\phi,\quad \Psi=y+\psi \tag{11.4}$$

とおく．さらに

$$G=\mu\phi+i\psi,\quad \mu=\sqrt{1-M_\infty{}^2}, \tag{11.5}$$

$$\zeta=\xi+i\eta;\quad \xi=x,\quad \eta=\mu y \tag{11.6}$$

によって複素速度ポテンシアル $G$ を定義する．$\phi,\psi$ したがって $G$ は $O(\varepsilon)$ と仮定しよう．そうすれば容易に

$$q^2 = 1 + 2\phi_x + \phi_x{}^2 + \phi_y{}^2, \tag{11.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_\infty} &= \left\{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty{}^2 (q^2 - 1)\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= 1 - M_\infty{}^2 \phi_x - \frac{1}{2} M_\infty{}^2 [\{1 - (2-\gamma) M_\infty{}^2\} \phi_x{}^2 + \phi_y{}^2] + O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{11.8}$$

が得られる．(*11.4*), (*11.8*) を (*11.3*) に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}(1-M_\infty{}^2)\phi_x - \psi_y &= \frac{1}{2} M_\infty{}^2 [\{3 - (2-\gamma) M_\infty{}^2\} \phi_x{}^2 + \phi_y{}^2] + O(\varepsilon^3), \\ \phi_y + \psi_x &= M_\infty{}^2 \phi_x \phi_y + O(\varepsilon^3).\end{aligned}\right\} \tag{11.9}$$

第一式に $1/2\mu$, 第二式に $i/2$ を掛けて加え合わせると

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{\zeta}} = O(\varepsilon^2) \tag{11.10}$$

が得られる．したがって $O(\varepsilon^2)$ を無視すると $G = f(\zeta)$ であって，これは Prandtl-Glauert の近似に相当する．そこで，高次の近似を求めるには

$$G = G_1 + G_2 + \cdots, \quad G_N = \mu\phi_N + i\psi_N \tag{11.11}$$

とおいて $G_N = O(\varepsilon^N)$ と仮定し，(*11.10*) の方程式で $\varepsilon$ の同じベキを比較すれば

$$\frac{\partial G_N}{\partial \bar{\zeta}} = G_1, G_2, \cdots, G_{N-1} \text{ の函数}, \qquad N = 1, 2, \cdots$$

という一連の方程式が得られる．これらを逐次に積分すると

$$G_1 = f(\zeta), \tag{11.12}$$

$$G_2 = \frac{M_\infty{}^2}{4\mu}\left[\nu f'^2(\bar{\zeta} - \zeta) + (1+\nu)\left\{2f'(\bar{f} - f) + \int \bar{f}'^2 d\bar{\zeta}\right\}\right], \tag{11.13}$$

$$\cdots\cdots$$

が得られる．ここに $f(\zeta)$ は $\zeta$ の任意の解析函数，また

$$\nu = \frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty{}^2}{1-M_\infty{}^2} \tag{11.14}$$

である．このように，Prandtl-Glauert の近似 $G_1 = f(\zeta)$ から出発して，(*11.13*), … により逐次近似を求めることができる．その際，任意函数 $f(\zeta)$ はもちろん境界条件から定められる．

## §12　任意翼型の表面速度分布

(*11.5*), (*11.6*) によれば

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta}=\frac{\mu}{2}(\phi_\xi-i\phi_\eta)+\frac{i}{2}(\psi_\xi-i\psi_\eta)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\mu(u-1)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}u-1\right)\right\}-\frac{i}{2}\left(1+\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)v. \qquad (12.1)$$

$u, v, \rho$ は流れの中で一価連続であるから，$\partial G/\partial \zeta$ は一価連続でなければならない．また無限遠では一様流 ($U=1$) に近づくから，$u\to 1$, $v\to 0$, $\rho\to\rho_\infty$, したがって

$$\zeta\to\infty \quad \text{のとき} \quad \frac{\partial G}{\partial \zeta}\to 0 \qquad (12.2)$$

という条件を満足する．最後に，物体表面は流線になるから，$\Psi=0$ すなわち $\psi=\Im(G)=-y$. したがって

$$\text{物体表面で} \quad \Im(G)=-y. \qquad (12.3)$$

これらの条件を満足するように (*11.12*) の任意函数 $f(\zeta)$ を定めることがわれわれの問題である．

いま，物体 P の形が

$$y=g(x), \qquad g(x)=O(\varepsilon) \qquad (12.4)$$

のように与えられているとする．物体表面では，(*11.6*) により

$$\zeta_{\mathrm{P}}=\xi+i\eta=\xi+i\mu g$$

である．したがって，もし

$$f(\zeta)=f_1(\zeta)+f_2(\zeta)+\cdots, \quad f_N=O(\varepsilon^N) \qquad (12.5)$$

のように展開したとすると，

$$f_N(\zeta_{\mathrm{P}})=f_N(\xi+i\mu g)=f_N(\xi)+i\mu g f_N'(\xi)+O(\varepsilon^{N+2}). \qquad (12.6)$$

したがって (*11.12*), (*11.13*) から

$$G(\zeta_{\mathrm{P}})=f_1(\xi)+f_2(\xi)+i\mu g f_1'(\xi)$$

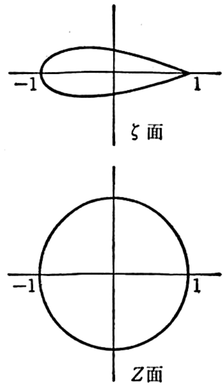
$$+\frac{M_\infty^2}{4\mu}(1+\nu)\left\{2f_1'(\xi)(\bar{f}_1-f_1)+\int \bar{f}_1'^2 d\xi\right\}+O(\varepsilon^3) \qquad (12.7)$$

が得られる．これと境界条件 (*12.3*) とを比較すれば

$$\Im(f_1(\xi))=-g(\xi). \qquad (12.8)$$

いま，翼型の前縁・後縁がそれぞれ $\zeta=-1, +1$ になるように長さの単位を定めるものとする．

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right) \qquad (12.9)$$




第 12.1 図

によって新しい複素平面 $Z$ を導入すると (第 12.1 図), $Z$ 面での単位円 $Z=e^{i\theta}$ は $\zeta=\cos\theta$ すなわち, 前縁と後縁とを結ぶ線分 (これを翼弦という) に対応する. 翼型 P が薄いことを考えると, $\zeta$ 面で翼型の外部の領域は $Z$ 面で単位円の外部にほぼ対応するであろう. したがって, 条件 (*12.2*) により, 解析函数 $f_1(\zeta)$ は $Z$ 面では

$$f_1=-i\kappa\log Z+\frac{c_1}{Z}+\frac{c_2}{Z^2}+\cdots,\quad c_n=a_n+ib_n \tag{12.10}$$

のようにあらわされるはずである. ここに $\kappa$ は循環定数で, 下で見られるように実数である.

翼型 P は $\theta$ をパラメタとして

$$y=g(\theta),\quad x=\cos\theta \tag{12.11}$$

のようにあらわすことができる. さて $f_1+i\kappa\log Z$ は $|Z|>1$ で正則であるから, (*9.5*) の共役関係を満たす. すなわち $Z=e^{i\theta}$ とおけば

$$\Re(f_1-\kappa\theta)=[\Im(f_1-\kappa\theta)]^*=[\Im(f_1)]^*=-g^*(\theta),$$

ここで境界条件 (*12.8*) が使ってある. (また, もし $\kappa$ が実数でなければ $g(\theta)$ は $\theta$ の周期函数ではあり得ない!) したがって

$$f_1=\Re(f_1)+i\Im(f_1)=\kappa\theta-[g^*(\theta)+ig(\theta)], \tag{12.12}$$

$$\phi_1=\frac{1}{\mu}\Re(f_1)=\frac{1}{\mu}[\kappa\theta-g^*(\theta)] \tag{12.13}$$

が得られる. これで第一近似が求められたわけである.

つぎに第二近似を求めるには, (*12.7*) を境界条件 (*12.3*) に用い, かつ (*12.8*) が既に満たされていることを考慮すると

$$\Im(f_2)=-\Im\left[i\mu gf_1'+\frac{M_\infty^2}{4\mu}(1+\nu)\left\{2f_1'(\bar{f}_1-f_1)+\int\bar{f}_1'^2d\xi\right\}\right] \tag{12.14}$$

によって $f_2$ を定めればよい. この右辺は (*12.12*) によって既知であるから, (*12.8*) を取り扱ったのとまったく同じ方法で解くことができる. $f_2$ が求められると, (*12.7*) に代入して $G$, したがってその実数部として $\phi$ が定まる. このようにして

$$\Phi = x+\frac{1}{\mu}\phi_{10}+(1+\lambda)\phi_{20}+\lambda\phi_{21}+\mu(1+\lambda)^2\phi_{30}+\mu\lambda(1+\lambda)\phi_{31}+\frac{E}{\mu}\phi_{32}+\cdots \tag{12.15}$$

が得られる．ここに

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{M_\infty^2}{\mu^2}(1+\nu), \qquad \nu = \frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^2}{\mu^2}, \\ E &= \frac{M_\infty^2}{12\mu^2}\nu(3+4\nu)-\frac{M_\infty^4}{8\mu^2}\nu(1+\nu), \end{aligned}\right\} \tag{12.16}$$

$$\phi_{10} = \Re(f), \quad f = \kappa\theta-[g^*(\theta)+ig(\theta)], \tag{12.17}$$

$$\phi_{20} = -\{\Im(gf')+[\Re(gf')]^*\}, \quad \phi_{21} = \frac{1}{2}\Re\left(\int f'^2 d\zeta\right), \tag{12.18}$$

$$f' = \frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{d\xi} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{df}{d\theta} \tag{12.19}$$

である．($\phi_{30}, \phi_{31}, \phi_{32}$ の具体的な形は省略する．)

翼型表面の速度分布は (*12. 15*) を微分すれば得られる：

$$\begin{aligned} q &= \mp\frac{\partial\Phi}{\partial s} \\ &= \mp\frac{dx}{ds}+\frac{1}{\mu}q_{10}+(1+\lambda)q_{20}+\lambda q_{21}+\mu(1+\lambda)^2 q_{30}+\mu\lambda(1+\lambda)q_{31}+\frac{E}{\mu}q_{32}+\cdots, \end{aligned} \tag{12.20}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} &\mp\frac{dx}{ds} = |\sin\theta|\frac{d\theta}{ds} = \left\{1+\left(\frac{dg}{dx}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}, \\ &q_{ij} = \mp\frac{d\phi_{ij}}{ds} = \mp\frac{d\phi_{ij}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}, \qquad \frac{d\theta}{ds} = \left\{\sin^2\theta+\left(\frac{dg}{d\theta}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{12.21}$$

であって，複号の上は翼の上面 ($0<\theta<\pi$)，下は翼の下面 ($\pi<\theta<2\pi$) に相当する．また，

$$q_{21} = \frac{1}{2}\left\{q_{10}^2-\left(\frac{dg}{dx}\right)^2\right\}+O(\varepsilon^4) = \mp\frac{1}{2}(q_{10}^2-\sin^2\omega)\cos\omega+O(\varepsilon^4) \tag{12.22}$$

の関係がある．ここに $\omega$ は翼表面の線要素 $ds$ が $x$ 軸となす角度であって，翼型の両端付近を除けば $\cos\omega \fallingdotseq \mp 1$ である．

以上は無限遠での一様流が $x$ 軸に平行なばあいであるが，小さい角度 $\alpha$ だけ傾いているばあいにも同様な計算が可能である．(*12. 20*) の第二近似に相当し

て

$$q=\pm\left\{\sin\theta+\frac{A}{\mu}-\frac{1}{2}(1+\lambda)\alpha^2\sin\theta-(1+\lambda)(P'-Q^{*\prime})\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda}{2}\frac{(A^2-B^2)\sin\theta-2\mu AB^2}{\sin^2\theta+\mu^2B^2}\right\}\frac{1}{(\sin^2\theta+B^2)^{\frac{1}{2}}}\qquad(12.23)$$

が成り立つ．ここに

$$\left.\begin{aligned}A&=g^{*\prime}(\theta)-\alpha\cos\theta+\kappa,\\B&=g'(\theta),\\P+iQ&=i\frac{g(\theta)}{\sin\theta}(A+iB).\end{aligned}\right\}\qquad(12.24)$$

したがって，$A, B=O(\varepsilon)$；$P, Q=O(\varepsilon^2)$ である．

翼の両端 ($\theta=0, \pi$) 付近を除けば，(*12.23*) は

$$q=1+\frac{1}{\mu}\frac{A}{\sin\theta}+\frac{\lambda}{2}\frac{A^2}{\sin^2\theta}-\frac{1+\lambda}{2}\left(\alpha^2+2\frac{P'-Q^{*\prime}}{\sin\theta}+\frac{B^2}{\sin^2\theta}\right)\qquad(12.25)$$

のように簡単化される．

例題〕 迎角 0 の楕円柱 ($\alpha=0$)． 楕円柱の厚み比を $t$ とすると

$$x=\cos\theta,\quad y=g(\theta)=t\sin\theta.\qquad(12.26)$$

したがって，共役 Fourier 級数の定義 (*9.7*) により

$$g^*(\theta)=-t\cos\theta.$$

また

$$g^{*\prime}(\theta)=t\sin\theta,\quad g'(\theta)=t\cos\theta.$$

したがって (*12.24*) により，

$$A=t\sin\theta,\quad B=t\cos\theta,$$
$$P+iQ=it^2(\sin\theta+i\cos\theta)=-t^2e^{-i\theta}.$$

(*9.22*) の関係を用いて

$$P-Q^*=0.$$

したがって，楕円柱の上面では

$$q=\left\{1+\frac{t}{\mu}+\frac{\lambda}{2}\frac{t^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta+\mu^2t^2\cos^2\theta}\right\}\frac{1}{(1+t^2\cot^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\qquad(12.27)$$

となる．とくに $M_\infty=0$ とすれば

$$q=\frac{1+t}{(1+t^2\cot^2\theta)^{\frac{1}{2}}}.\qquad(12.28)$$

これは，縮まない流体が楕円柱にあたるときの厳密解である．(*12.23*) は実は $O(\varepsilon^3)$ の程度の誤差を含むにもかかわらず，(*12.28*) が厳密解を与えることは興味がある．なお，両端付近 ($\theta\fallingdotseq 0, \pi$) を除けば，(*12.27*) は $t$ について展開されて

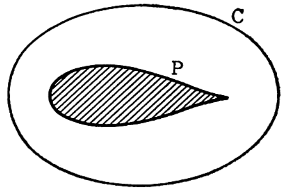
$$q=1+\frac{t}{\mu}+\frac{\lambda}{2}t^2-\frac{1+\lambda}{2}t^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\qquad(12.29)$$

となる．

# 高速気流の中の物体に働く力とモーメント

## §13　力とモーメントの一般式

以下，二次元的な流れを考え，物体は流れの平面に垂直な軸をもつ柱状の物体であるとする．流れの中に任意の物体 P がおかれているものとし，P をとりかこむ任意の閉曲線 C を考える（第 13.1 図）．P と C の間に含まれる流体の部分について運動量と角運動量の保存の法則を考えると，簡単な考察の結果




第 13.1 図

$$X = -\int_C \{p\,dy + \rho u(u\,dy - v\,dx)\}, \tag{13.1}$$

$$Y = -\int_C \{-p\,dx + \rho v(u\,dy - v\,dx)\}, \tag{13.2}$$

$$M_z = = \int_C \{p(x\,dx + y\,dy) + \rho(uy - vx)(u\,dy - v\,dx)\} \tag{13.3}$$

という関係式が得られる．ただし，$(X, Y)$ は物体 P に働く合力で，$M_z$ は $xy$ 面の原点についての力のモーメントである．閉曲線 C として，とくに物体 P 自身を選ぶと，物体表面では $u\,dy - v\,dx = 0$ であるから，上の式は

$$X = -\int_P p\,dy, \quad Y = \int_P p\,dx, \quad M_z = \int_P p(x\,dx + y\,dy) \tag{13.4}$$

と簡単化される．すなわち，物体表面に働く圧力を積分すると，物体の受ける力やモーメントが計算される．これは当然期待される結果である．

しかし，物体表面での圧力分布の正確な値がわかっていなくても，力やモーメントの正しい値を計算することは可能である．たとえば，閉曲線 C として非常に大きい半径の円を選べば，物体から遠く離れた場所での流れの状態，すなわち $u, v, p, \rho$ の漸近的な値がわかりさえすれば (13.1)～(13.3) によって $X, Y, M_z$ が求められるはずである．無限遠方での流れの漸近的行動が重要な意味をもつのは，このような理由による．

簡単のために，一様流は軸に平行で速度の大きさは $U = 1$ であると仮定しよう．そうすれば，速度ポテンシアル $\Phi$ と流れの函数 $\Psi$ は

$$\Phi = x+\phi, \quad \Psi = y+\psi \tag{13.5}$$

と表わされ，$\phi, \psi$ は物体によってひき起される流れに相当する．したがって，物体から遠く離れた場所では極めて小さいから，たとえば $O(r\varepsilon)$ の程度であると考えられる．（小さい量 $\varepsilon$ の具体的な大きさは以下で定める．）これは薄翼展開法の考え方とまったく同じであるから，その結果を利用することができる．

前と同様に

$$\zeta = \xi+i\eta, \quad \xi = x, \quad \eta = \mu y, \tag{13.6}$$

$$G = \mu\phi+i\psi, \quad \mu = \sqrt{1-M^2} \tag{13.7}$$

とおけば，(*11.11*), (*11.12*), (*11.13*) により

$$G = f(\zeta)+G_2(\zeta,\bar{\zeta})+O(r\varepsilon^3) \tag{13.8}$$

のように表わされる．ただし

$$G_2 = \frac{M^2}{4\mu}\left[\nu f'^2\bar{\zeta}+(1+\nu)\left(2f'\bar{f}+\int\bar{f}'^2 d\bar{\zeta}\right)\right]+f_2(\zeta), \tag{13.9}$$

$$\nu = \frac{\gamma+1}{4}\frac{M^2}{1-M^2} \tag{13.10}$$

である．また $f(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ は $\zeta$ の解析函数である．

(*5.1*), (*5.2*) で与えられる $\Phi, \Psi$ の意味を考えると，(*13.1*), (*13.2*), (*13.3*) を複素数の形式で

$$Y+i\mu X = \int_C p\, d\bar{\zeta} - 2i\rho_\infty\mu\int_C \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}d\Psi, \tag{13.11}$$

$$M_z = \frac{1+\mu^2}{4\mu^2}\int_C pd(\zeta\bar{\zeta}) - \frac{1-\mu^2}{4\mu^2}\Re\left(\int_C pd(\zeta^2)\right)$$
$$+\frac{\rho_\infty}{\mu}\Im\left(\int_C\{(1+\mu^2)\zeta-(1-\mu^2)\bar{\zeta}\}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}d\Psi\right) \tag{13.12}$$

のように表わすことができる．これらは，力とモーメントを $\zeta$ 面を使って計算するのに便利な公式である．

一方，物理面（$xy$ 面）を使って計算を行うには，閉曲線 C として非常に大きい半径 $R$ の円をとり，極座標 $(r,\theta)$ を用いるのが便利である．このとき (*13.1*), (*13.2*), (*13.3*) はそれぞれ

$$X = -\int_0^{2\pi}\{p\cos\theta+\rho q_r(q_r\cos\theta-q_\theta\sin\theta)\}R\,d\theta, \tag{13.13}$$

$$Y=-\int_0^{2\pi}\{p\sin\theta+\rho q_r(q_r\sin\theta+q_\theta\cos\theta)\}R\,d\theta, \tag{13.14}$$

$$M_z=-\int_0^{2\pi}\rho q_r q_\theta R^2\,d\theta \tag{13.15}$$

となる．$(q_r, q_\theta)$ はもちろん速度の $r, \theta$ 成分を表わす．

さて，気体は断熱変化を行うものとすると，(11.8) を得たのと同様の方法で

$$\frac{p}{p_\infty}=\left\{1-\frac{\gamma-1}{2}M^2(q^2-1)\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$=1-\gamma M^2\phi_x-\frac{\gamma}{2}M^2\{(1-M^2)\phi_x{}^2+\phi_y{}^2\}+O(\varepsilon^3) \tag{13.16}$$

が得られ，さらに $G, \zeta, \bar{\zeta}$ を使えば (13.16) は

$$p=p_\infty-\rho_\infty\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}+\frac{\partial\phi}{\partial\bar{\zeta}}+\frac{1}{2}\frac{df}{d\zeta}\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}}\right)+O(\varepsilon^3) \tag{13.17}$$

となる．これを (13.11) に代入して簡単な計算をすると

$$Y+i\mu X=p_\infty\int_C d\bar{\zeta}-\rho_\infty\int_C d\phi-i\rho_\infty\mu\int_C d\Psi-\frac{1}{2}\rho_\infty\int_C\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 d\zeta+O(r\varepsilon^3) \tag{13.18}$$

が得られる．

## §14 任意物体のまわりの流れ

前節で述べたとおり，物体に働く力とモーメントを計算するには，無限遠方での流れの漸近的行動がわかればよい．§12 で見たように，複素速度ポテンシアル $G$ は

(i) $\partial G/\partial\zeta$ は流れの中で一価連続

(ii) $\zeta\to\infty$ で $\partial G/\partial\zeta\to 0$

という条件を満足しなければならない．さて (13.8) によれば

$$\frac{\partial G}{\partial\zeta}=\frac{df}{d\zeta}+O(\varepsilon^2). \tag{14.1}$$

したがって，$O(\varepsilon^2)$ を無視すると，$df/d\zeta$ は無限遠で 0 になるような一価正則函数である．それゆえ

$$\frac{df}{d\zeta}=\frac{k}{\zeta}-\frac{k_1}{\zeta^2}-\cdots,$$

すなわち

$$f=k\log\zeta+\frac{k_1}{\zeta}+\frac{k_2}{\zeta^2}+\cdots \tag{14.2}$$

の形をもつ．ここで任意定数は省略してある．

いま $df/d\zeta=O(\varepsilon)$ であることを考えると，

$$O(\varepsilon)=O\left(\frac{df}{d\zeta}\right)=kO\left(\frac{1}{\zeta}\right)=O\left(\frac{1}{r}\right)\quad (k\neq 0).$$

したがって

$$\varepsilon=O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{14.3}$$

また

$$G_n(\zeta,\bar{\zeta})=O(r\varepsilon^n)=O(r^{-n+1}) \tag{14.4}$$

である．それゆえ，(14.2) の式で $k_1/\zeta$, $k_2/\zeta^2,\cdots$ などの項は $G_2, G_3,\cdots$ に吸収して考えることができるから，けっきょく，$G$ の第一近似としては

$$f=k\log\zeta \tag{14.5}$$

をとればよい．

次に第二近似に進もう．(13.9) は

$$G_2=H_2(\zeta,\bar{\zeta})+f_2(\zeta), \tag{14.6}$$

$$H_2=\frac{M^2}{4\mu}\left[\nu f'^2\bar{\zeta}+(1+\nu)\left\{2f'(\bar{f}+\bar{k}\log\zeta)+\int\bar{f}'^2d\bar{\zeta}\right\}\right] \tag{14.7}$$

のように表わされる．(14.5) を (14.7) に代入すると

$$H_2=\frac{M^2}{4\mu}\left[\nu k^2\frac{\bar{\zeta}}{\zeta^2}+(1+\nu)\left\{2\frac{k\bar{k}}{\zeta}\log(\zeta\bar{\zeta})-\frac{\bar{k}^2}{\bar{\zeta}}\right\}\right]. \tag{14.8}$$

これは明らかに一価連続で，$\zeta\to\infty$ のとき 0 になる．したがって，$G$ に課した条件を考え合わせると，$df_2/d\zeta$ が $\zeta\to\infty$ で 0 になるような一価正則函数であることがわかる．したがって

$$\frac{df_2}{d\zeta}=\frac{b_0}{\zeta}-\frac{b_1}{\zeta^2}-\cdots$$

でなければならない．ところが，$b_0/\zeta$ は $O(r^{-1})$ であるから，すでに第一近似 $f(\zeta)$ の中に含まれているはずで，これを省略することができる．また，第三項以下は第三近似以上に含まれるべきものである．したがって，けっきょく

$$f_2=\frac{b_1}{\zeta} \tag{14.9}$$

とすればよい．

$k$ と $b_1$ は一般に複素数であるから

$$k=m+i\kappa,\quad b_1=a+ib \tag{14.10}$$

のように表わすことができる．したがって $G=f+G_2+\cdots$ は

$$G=(m+i\kappa)\log\zeta+\frac{a+ib}{\zeta}$$
$$+\frac{M^2}{4\mu}\left[\nu(m+i\kappa)^2\frac{\bar{\zeta}}{\zeta^2}+(1+\nu)\left\{2(m^2+\kappa^2)\frac{1}{\zeta}\log(\zeta\bar{\zeta})-\frac{(m-i\kappa)^2}{\bar{\zeta}}\right\}\right]$$
$$+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{14.11}$$

のように表わされる．

いま

$$\Gamma=-\int_C d\Phi,\quad Q=\int_C d\Psi \tag{14.12}$$

と書くと，$\Gamma$ は閉曲線 C に沿って（時計方向に測った）循環，$\rho_\infty Q$ は C を通って単位時間に流出する流体の質量である．

$$\int_C dG=\mu\int_C d\phi+i\int_C d\psi=\mu\int_C d\Phi+i\int_C d\Psi$$
$$=-\mu\Gamma+iQ\quad\left(\because\ \int_C dx=\int_C dy=0\right).$$

一方，(14.11) によれば

$$\int_C dG=2\pi i(m+i\kappa).$$

したがって

$$\kappa=\mu\frac{\Gamma}{2\pi},\quad m=\frac{Q}{2\pi}. \tag{14.13}$$

すなわち，複素速度ポテンシアル $G$ の式で $\log\zeta$ の係数として現われる $\kappa, m$ は循環 $\Gamma$ と流出量 $Q$ とに密接な関係があることがわかる．

## §15　$\Phi, \Psi$ の漸近公式

いま，極形式を用いて

$$z=re^{i\theta},\quad \zeta=te^{i\varphi} \tag{15.1}$$

とおくと，(13.6) により

$$t\cos\varphi=r\cos\theta,\quad t\sin\varphi=\mu r\sin\theta. \tag{15.2}$$

したがって

$$t^2 = r^2(1-M^2\sin^2\theta), \quad \tan\varphi = \mu\tan\theta \tag{15.3}$$

である．それゆえ $\zeta$ を $(r, \theta)$ で表わせば

$$\log\zeta = \log r + \frac{1}{2}\log(1-M^2\sin^2\theta) + i\tan^{-1}(\mu\tan\theta),$$

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{r}\frac{\cos\theta - i\mu\sin\theta}{1-M^2\sin^2\theta}$$

などの式が得られる．これらを (*14.11*) に代入して，実数部と虚数部に分けると

$$\Phi = r\cos\theta + \frac{m}{\mu}\left\{\log r + \frac{1}{2}\log N(\theta)\right\} - \frac{\kappa}{\mu}\tan^{-1}(\mu\tan\theta)$$
$$+\frac{1}{r}\frac{1}{N(\theta)}\{A\cos\theta + B\sin\theta + E(r,\theta)\cos\theta - F(\theta)\sin\theta\}$$
$$+O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{15.4}$$

$$\Psi = r\sin\theta + m\tan^{-1}(\mu\tan\theta) + \kappa\left\{\log r + \frac{1}{2}\log N(\theta)\right\}$$
$$+\frac{1}{r}\frac{1}{N(\theta)}\{C\cos\theta + D\sin\theta - \mu^2 E(r,\theta)\sin\theta - F(\theta)\cos\theta\}$$
$$+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{15.5}$$

が得られる．ただし，$A, B, C, D$ は定数であって，前に使った定数 $a, b$ とのあいだに

$$A = \frac{a}{\mu} + \frac{\gamma}{4}\frac{M^2}{\mu^2}(m^2-\kappa^2),$$

$$B = b + \frac{M^2}{\mu}\left(\frac{\gamma-1}{4} + \frac{\gamma+1}{4}\frac{1}{\mu^2}\right)m\kappa,$$

$$C = B + \frac{M^2}{\mu}m\kappa,$$

$$D = -\mu^2 A - \frac{M^2}{2\mu^2}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)(m^2-\kappa^2)$$

の関係がある．また

$$N(\theta) = 1 - M^2\sin^2\theta, \quad F(\theta) = \frac{2\nu\mu\, m\kappa}{N(\theta)},$$

$$E(r,\theta) = \frac{M^2}{\mu^2}(1+\nu)(m^2+\kappa^2)\left\{\log r + \frac{1}{2}\log N(\theta)\right\} - \frac{\nu}{\mu^2}\frac{m^2-\kappa^2}{N(\theta)}$$

である．$(q_r, q_\theta)=(\partial\Phi/\partial r,\ r^{-1}\partial\Phi/\partial\theta)$ によって，(15.4) の式から，速度に対する $O(r^{-2})$ まで正確な公式を求めることができる．

## §16 揚力・抵抗・モーメントの一般公式

物体に働く揚力と抵抗を求めるには (13.18) の公式を用いるのが便利である．C は閉曲線であるから，(14.12) を考慮すると

$$\int_C d\bar{\zeta}=0, \quad \int_C d\phi=-\Gamma, \quad \int_C d\Psi=Q.$$

いま C として非常に大きい半径 $R$ の円を選べば

$$\int_C\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 d\zeta=O(R^{-2}\cdot R)=O(R^{-1}).$$

また，(14.3) により $O(R\varepsilon^3)=O(R^{-2})$．したがって，(13.18) で $R\to\infty$ とすると

$$Y+i\mu X=\rho_\infty\Gamma-i\rho_\infty\mu Q.$$

すなわち

$$X=-\rho_\infty Q, \quad Y=\rho_\infty\Gamma. \tag{16.1}$$

これは一様流が $x$ 軸に平行で速度の大きさを $U=1$ として得られた結果である．一様流の速度の大きさを一般に $U$ とすると，揚力 $L$，抵抗 $D$ は

$$L=\rho_\infty U\Gamma, \quad D=-\rho_\infty UQ \tag{16.2}$$

で与えられる．この結果はそれぞれ Kutta-Joukowski の定理と D'Alembert のパラドックスを縮む流体のばあいに拡張したことに相当する．

(14.11) を (13.12) に代入して，上と同様な計算を行えば，

$$M_z=-2\pi\rho_\infty\left\{\frac{b}{\mu}-\left(1-\frac{M^2}{2}\right)\frac{m\kappa}{\mu^2}\right\} \tag{16.3}$$

という結果が得られる．

なお，(16.2), (16.3) の結果は (13.13)～(13.15) の公式を使っても得ることができることを注意しよう．それには (15.4), (15.5) から $q_r, q_\theta, \rho q_r, \rho q_\theta$ を求め，さらに (13.16) から導かれる

$$\begin{aligned} p&=p_\infty-\frac{\gamma p_\infty}{c_\infty{}^2}\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r}-\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\\ &=p_\infty-\frac{\rho_\infty}{\mu r}\frac{m\cos\theta+\mu\kappa\sin\theta}{N(\theta)}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

と，積分公式

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{N(\theta)}=\frac{2\pi}{\mu},\quad \int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta}{N(\theta)}d\theta=0$$

などを用いればよい．

さて，(*16. 2*), (*16. 3*) の公式によって力とモーメントを求めるには，$m, \kappa, b$ の値を知ることが必要である．(*14. 11*) によれば，複素速度ポテンシアル $G$ を $\zeta, \bar{\zeta}$ の降べキ級数として展開するときの $\log\zeta$ の係数と $1/\zeta$ の係数さえわかればよい．また，(*15. 4*), (*15. 5*) によれば，$\Phi$ あるいは $\Psi$ を $r$ の降べキ級数に展開するときの $\log r$ の係数がわかれば抵抗または揚力が求められる．しかし，高速気流の理論的計算の際，ふつう $\Phi$ または $\Psi$ を単独に扱い，両者を同時に考えることは少ないから，どちらか一つだけの知識から揚力・抵抗・モーメントを求め得るような公式が望ましい．これを次に考えよう．

いま

$$z=x+iy,\quad \zeta=x+i\mu y$$

から $x, y$ を消去すると

$$\zeta=\frac{1}{2}(1+\mu)z+\frac{1}{2}(1-\mu)\bar{z} \qquad (16.4)$$

の関係が得られる．(*14. 11*) によれば

$$\begin{aligned}2\Phi&=z+\bar{z}+\frac{1}{\mu}(G+\bar{G})\\&=z+\bar{z}+\frac{1}{\mu}\{(m+i\kappa)\log\zeta+(m-i\kappa)\log\bar{\zeta}\}+O\left(\frac{1}{r}\right).\end{aligned}$$

これは $z, \bar{z}$ で表わすことができる．それには，たとえば

$$\begin{aligned}\log\zeta&=\log\left\{\frac{1}{2}(1+\mu)z\right\}+\log\left(1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{\bar{z}}{z}\right)\\&=\log\frac{1+\mu}{2}+\log z+\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{\bar{z}}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{\bar{z}}{z}\right)^2+\cdots\end{aligned}$$

の展開式を用いる．（ただし log の展開には

$$\left|\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{\bar{z}}{z}\right|=\frac{1-\mu}{1+\mu}<1$$

の条件が考慮してある．）

したがって，$(m+i\kappa)/\mu$ は $2\Phi$ を $z, \bar{z}$ の無限級数として表わしたときの $\log z$

の係数であることがわかる．

同様にして，$2\Phi$ の展開式で $1/z$ の係数を $A^0_{-1,0}$ とすると，

$$A^0_{-1,0}=\frac{2}{\mu(1+\mu)}(a+ib)+\frac{M^2}{4\mu^2}\left\{2\nu\frac{1-\mu}{(1+\mu)^2}-\frac{2(1+\nu)}{1+\mu}\right\}(m+i\kappa)^2+\text{実数}$$

であることが確かめられる．したがって

$$\Im(A^0_{-1,0})=\frac{2b}{\mu(1+\mu)}-\frac{1}{1+\mu}\frac{M^2}{\mu^2}\left(1+\frac{\gamma+1}{2}\frac{1-\mu}{\mu}\right)m\kappa.$$

すなわち

$$\frac{b}{\mu}=\frac{1+\mu}{2\mu}\Im(A^0_{-1,0})+\frac{M^2}{2\mu^2}\left(1+\frac{\gamma+1}{2}\frac{1-\mu}{\mu}\right)m\kappa. \tag{16.5}$$

(*16.5*) を (*16.3*) に代入すれば，モーメント $M_z$ を $2\Phi$ の $z,\bar{z}$ に関する展開式の係数で表わす公式が得られるわけである．同様の公式は，流れの函数 $\Psi$ の展開式についても導くことができる．一様流の速度が $U$ で $x$ 軸と $\alpha$ なる角度をなすばあいについてこれらをまとめて書くと

$$M_z=-\pi\rho_\infty U^2(1+\mu)\Im(A^0_{-1,0}e^{-i\alpha})+\frac{1}{2\pi}\{(1+\nu)\mu-\nu\}\rho_\infty Q\Gamma, \tag{16.6}$$

$$M_z=-\pi\rho_\infty U^2\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\Im(B^0_{-1,0}e^{-i\alpha})+\frac{1}{2\pi}\left\{(1+\nu)\frac{1}{\mu}-\nu\right\}\rho_\infty Q\Gamma, \tag{16.7}$$

$$M_z=-2\pi\rho_\infty U^2\Im(C^0_{-1,0}e^{-i\alpha})+\frac{1}{2\pi}\rho_\infty Q\Gamma. \tag{16.8}$$

ここで $A^0_{-1,0}$, $B^0_{-1,0}$, $C^0_{-1,0}$ はそれぞれ $2\Phi/U$，$2i\Psi/U$, $(\Phi+i\Psi)/U$ を $z,\bar{z}$ について降ベキ級数に展開したときの $1/z$ の係数を表わす．すなわち

$$\Phi=\frac{U}{2}\left\{z+\bar{z}+\frac{Q}{2\pi\mu U}\log z\bar{z}+i\frac{\Gamma}{2\pi U}\log\frac{z}{\bar{z}}\right.$$
$$\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\sum A^l_{mn}z^m\bar{z}^n(\log z\bar{z})^l\right\}, \tag{16.9}$$

$$\Psi=\frac{U}{2i}\left\{z-\bar{z}+\frac{Q}{2\pi U}\log\frac{z}{\bar{z}}+i\frac{\mu\Gamma}{2\pi U}\log z\bar{z}\right.$$
$$\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\sum B^l_{mn}z^m\bar{z}^n(\log z\bar{z})^l\right\}, \tag{16.10}$$

$$\Phi+i\Psi=U\left\{z+\frac{1+\mu}{4\pi\mu U}(Q+i\mu\Gamma)\log z+\frac{1-\mu}{4\pi\mu U}(Q-i\mu\Gamma)\log\bar{z}\right.$$
$$\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\sum C^l_{mn}z^m\bar{z}^n(\log z\bar{z})^l\right\}. \tag{16.11}$$

縮まない流体のばあいには，複素速度ポテンシアル $F=\Phi+i\Psi$ は $z=x+iy$ の正則函数で，したがって $z$ の一重無限級数として表わされるのに対して，縮む流体のばあいは $z, \bar{z}$ についての二重無限級数になる．それにもかかわらず，力とモーメントの計算には単に $\log z$ と $1/z$ の係数しか必要でないことは驚くべきことと思われる．とくに，揚力・抵抗の公式（*16.1*）とモーメントの公式（*16.8*）とは見掛上，縮まないばあいとまったく同じであることは興味が深い．

# ホドグラフ法

## §17　ホドグラフ法の基礎方程式

縮む流体の流れを支配する非線型の方程式を近似的に取り扱うために $M^2$ 展開法と薄翼展開法を導入したのであるが，圧力 $p$ と密度 $\rho$ の間に一定の函数関係 $\rho=f(p)$ の成り立つばあい二次元の渦無しの流れに対しては，つぎのように線型化を行うことができる．

まず，基礎方程式を

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \tag{17.1}$$

$$v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{17.2}$$

の形に書く．ここで $\rho_1$ は密度の次元をもつ適当な定数とする．（*17.1*），（*17.2*）はまた

$$d\Phi=u\,dx+v\,dy, \tag{17.3}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho}d\Psi=-v\,dx+u\,dy \tag{17.4}$$

のように表わすこともできる．（*17.4*）の両辺に $i$ を掛けて（*17.3*）に加えると

$$d\Phi+i\frac{\rho_1}{\rho}d\Psi=(u-iv)(dx+idy)=qe^{-i\theta}dz,$$

すなわち

$$dz=\frac{1}{q}e^{i\theta}\left(d\Phi+i\frac{\rho_1}{\rho}d\Psi\right). \tag{17.5}$$

ここに，$q, \theta$ は速度の大きさおよび $x$ 軸となす角度であって，$z=x+iy$ である．$\partial^2 z/\partial q\,\partial\theta=\partial^2 z/\partial\theta\,\partial q$ を具体的に書き表わし，両辺の実数部と虚数部をとると

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q}=q\frac{d}{dq}\left(\frac{\rho_1}{q\rho}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=q\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial q} \tag{17.6}$$

の関係が得られる．$q, \theta$ を独立変数と考えると，(*17.6*) は未知数 $\Phi, \Psi$ についての線型の連立偏微分方程式である．実際，Bernoulli の定理 (*3.3*) により，係数 $qd(\rho_1/q\rho)/dq$, $q(\rho_1/\rho)$ は $q$ の既知函数とみられるからである．

$(q, \theta)$ 面のことを速度面あるいはホドグラフ面とよぶので，線型微分方程式 (*17.6*) を基礎とする取扱いを**ホドグラフ法**という．

いま

$$t = \int \frac{\rho}{\rho_1 q} dq \tag{17.7}$$

によって，速度 $q$ の函数 $t$ を導入すると，(*17.6*) は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -K\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \tag{17.8}$$

のように簡単化される．ただし

$$K = q\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{q}\right) = \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 \tag{17.9}$$

は $q$ (したがって $t$) の既知函数．また $c = (dp/d\rho)^{1/2}$ は局所音速である．

(*17.8*) から $\Phi$ を消去すると

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + K\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{17.10}$$

明らかに (*17.10*) は

$$\Psi = T_n(t)e^{\pm ni\theta}, \qquad n = \text{const} \tag{17.11}$$

の形の解をもつ．ただし $T_n(t)$ は二階の常微分方程式

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} - n^2 K T_n = 0 \tag{17.12}$$

の解である．したがって (*17.10*) の一般解は

$$\Psi = \sum_n A_n T_n(t)e^{ni\theta}, \qquad \int A(\alpha)T_\alpha(t)e^{i\alpha\theta}d\alpha \tag{17.13}$$

で与えられる．$A_n$ は任意定数，$A(\alpha)$ は任意函数である．もちろん $\Psi$ は実数でなければならないから，(*17.13*) の実数部または虚数部が実際のばあい解になる．

## §18 断熱法則にしたがう気体

ふつう気体の流れでは状態変化は断熱的におこると考えられる： $p \propto \rho^\gamma$．このばあい，(*3.11*) の諸関係を使うと，(*17.9*) は

$$K=\left(1-\frac{\gamma+1}{2}\frac{q^2}{c_0{}^2}\right)\left(1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{c_0{}^2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{18.1}$$

となる．いま簡単のために

$$x=\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{c_0{}^2}=\frac{q^2}{q_m{}^2},\quad q_m=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}c_0 \tag{18.2}$$

とおくと，(*17.7*), (*3.11*) により

$$dt=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{dq}{q}=\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{dx}{x}. \tag{18.3}$$

ただし，便宜上 $\rho_1$ として $\rho_0$ を選んである．(*18.3*) を (*17.12*) に代入して整理すれば

$$\frac{d^2T_n}{dx^2}+\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{\gamma-1}\frac{x}{1-x}\right)\frac{dT_n}{dx}-\frac{n^2}{4x^2(1-x)}\left(1-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}x\right)T_n=0 \tag{18.4}$$

となる．ここで

$$T_n=x^{n/2}X_n(x) \tag{18.5}$$

とおけば，$X_n$ について

$$x(1-x)\frac{d^2X_n}{dx^2}+\left\{(n+1)-\left(n+1-\frac{1}{\gamma-1}\right)x\right\}\frac{dX_n}{dx}+\frac{n(n+1)}{2(\gamma-1)}X_n=0 \tag{18.6}$$

なる方程式が成り立つ．これは Gauss の微分方程式であるから，その解は一般に超幾何函数を用いて表わすことができる．(*18.5*) によって $T_n$ にもどれば

$$T_n(t)=q^nF(a_n, b_n, n+1;\ q^2/q_m{}^2). \tag{18.7}$$

ただし，定数 $a_n, b_n$ は

$$a_n+b_n=n-\frac{1}{\gamma-1},\quad a_nb_n=-\frac{n(n+1)}{2(\gamma-1)} \tag{18.8}$$

からきまり，$F$ は超幾何函数を意味する．

## §19 特解の重ね合わせ

(*18.7*) を (*17.13*) に代入すれば，断熱法則にしたがう高速気流の厳密な一般解が得られるわけである．それゆえ，いままで論じてきた $M^2$ 展開法や薄翼展開法は無用の長物のように思われるかもしれない．しかし，実際問題としては，境界条件に適合するように係数 $A_n$ なり函数 $A(\alpha)$ を定めるという困難が残されている．この事情を簡単なばあいについて調べてみよう．

$\rho=f(p)$ の函数形でもっとも簡単なのは，縮まない流体，すなわち $\rho=\mathrm{const}$

$=\rho_0$ のばあいである．このとき $1/c^2=d\rho/dp=0$ であるから，$c=\infty$ と考えられる．また，(*17.7*) で $\rho_1=\rho_0$ とおくと，(*17.7*)，(*17.9*) はそれぞれ

$$t=\log q,\quad K=1 \tag{19.1}$$

を与える．したがって，(*17.10*) の解は

$$T_n(t)=e^{\pm nt}=q^{\pm n} \tag{19.2}$$

となり，(*17.13*) の一般解に相当して

$$\Psi=\Im(\sum A_n q^n e^{-ni\theta})=\Im(\sum A_n w^n) \tag{19.3}$$

が得られる．ただし

$$w=qe^{-i\theta}=u-iv \tag{19.4}$$

は複素速度である．

ところが，縮まない流体では，複素速度ポテンシアル $f=\Phi+i\Psi$ は $z=x+iy$ の解析函数であって $w=df/dz$ の関係のあることが知れている．したがって $z$ は $w$ の解析函数，したがってまた $f$ は $w$ の解析函数で $f=\sum A_n w^n$ のようなベキ級数で表わされるはずである．(*19.3*) は正にこの事情を示すものである．

いま例として円柱を過ぎる一様流を考えよう．簡単のために，円柱の半径を 1，一様流の速度を 1 とすると

$$f=z+\frac{1}{z} \tag{19.5}$$

である．これより

$$w=\frac{df}{dz}=1-\frac{1}{z^2},\quad z=(1-w)^{-\frac{1}{2}}, \tag{19.6}$$

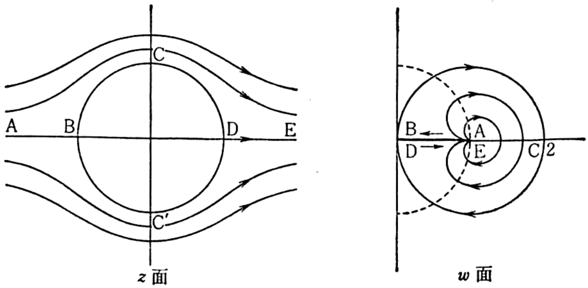
$$f=(1-w)^{-\frac{1}{2}}+(1-w)^{\frac{1}{2}}. \tag{19.7}$$

物理面（$z$ 面）とホドグラフ面（$w$ 面）の対応は第 19.1 図のようになる．$z$ 面での流れの場 $|z|>1$ は $w$ 面では $|w-1|<1$ の円を二重におおうことになる．($f$ の式 (*19.7*) の右辺は $w$ の二価函数であることに注意！)

さて $f$ を $w$ の昇ベキ級数に展開すると

$$f=\pm\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n=\pm\sum_{n=0}^{\infty}a_n q^n e^{-ni\theta},\qquad |w|<1, \tag{19.8}$$

$$a_n=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)}. \tag{19.9}$$




第 19.1 図

この $a_n$ を使って

$$\Psi=\Im\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{T_n(t)}{T_n(t_\infty)}e^{-ni\theta}\right),\qquad t<t_\infty \tag{19. 10}$$

なる函数を定義する．ただし $t_\infty=t(q_\infty)$，また係数 $A_n$ は $n\to\infty$ のとき $A_n\to a_n$ となるように選んでおく．$\Psi$ は (*17. 13*) の形をしているから，たしかに高速気流の厳密解を与える．その上，この $\Psi$ は $t\to t_\infty$ すなわち $q\to q_\infty$ のとき (*19. 8*) の $\Im(f)$ と類似のふるまいをするので，なにかある柱状物体を過ぎる（速度 $q_\infty$ の）一様流を表わすものと期待される．

このようにして，物体を過ぎる高速気流の厳密解を構成することは原理的には可能である．しかし，(*19. 10*) の解は $t<t_\infty$ すなわち $q<q_\infty$ の領域しか表わし得ないから，流れの場全体を与えるには適当な方法でこの解を $q>q_\infty$ まで解析接続しなければならない．これは非常にやっかいな問題である．（たとえば (*19. 7*) を $|w|>1$ に対して $w$ の降ベキ級数に展開して上と同様に進めば $q>q_\infty$ で成り立つような厳密解が得られる．しかしこの解と，はじめに求めた解 (*19. 10*) とは一般に滑らかに接続しない．）また，実際問題として，数値計算を実行するには $T_n(t)$ の数表を整備しておく必要がある．それゆえ，具体的な計算が行われたのは Cherry による二三の例に過ぎない．

これらの困難は解が無限級数の形に表わされていることによるのであるから，適当な方法によって無限級数の和を求めることができれば困難は避けられる．そのためには，実在の気体に対する $K=K(t)$ の函数形を適当に近似して，(*17. 12*) の解の $T_n(t)$ が簡単な函数になるような工夫が試みられている．たとえば

(i)　$K=\mathrm{const}$　von Kármán-Tsien の近似

(ii)　$K=at$　音に近い近似

(iii)　$K=a(1-be^{2kt})$　友近・玉田の仮想気体

などが有名である．これらのばあい，物体に一様流があたるときの $\Psi$ として，(*19.10*) の形の無限級数を有限項の初等函数で表わすことも可能である．

(*17.9*) から明らかなように，基礎方程式 (*17.8*) は局所マッハ数 $M=q/c$ が 1 より小さいか大きいかによって楕円型あるいは双曲型になる．流れの場を通じて $M<1$, または $M>1$ のときには von Kármán-Tsien の近似はかなり良い近似を与えるが，両者が共存する混合型のばあいには $K$ が正から負に変化し得るような (ii), (iii) の近似を用いる必要がある．

## §20　von Kármán-Tsien の近似

いま，$K=\mathrm{const}$ なる性質をもつ仮想的な気体を考える．(*17.7*) の $\rho_1$ としてよどみ点 $(q=0)$ での密度 $\rho_0$ をとれば，(*17.9*) は

$$K=1,\qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{q}=0 \tag{20.1}$$

となる．したがって

$$\frac{1}{q}=Ae^t+Be^{-t}. \tag{20.2}$$

$A, B$ は任意の定数である．(*20.2*) を (*17.7*) に代入すれば

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{1}{q}\frac{dq}{dt}=-\frac{Ae^t-Be^{-t}}{Ae^t+Be^{-t}}. \tag{20.3}$$

これと (*20.2*) とを (*17.9*) に代入し，$K=1$ を考慮すれば

$$\frac{1}{c^2}=-4AB\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2.$$

したがって

$$\rho c=\mathrm{const}=\rho_0 c_0 \tag{20.4}$$

が得られる．ただし $c_0$ はよどみ点での音速で，$4AB=-c_0^{-2}$ の関係がある．

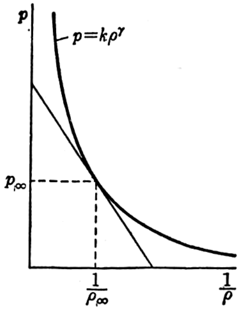
つぎに

$$\frac{dp}{d\rho}=c^2=\frac{\rho_0{}^2c_0{}^2}{\rho^2}$$

を積分すれば

$$p = p_1 - \frac{\rho_0{}^2 c_0{}^2}{\rho}. \tag{20.5}$$

これが，いま考えている仮想気体の状態方程式である．




第 20.1 図

一方，(*20.2*), (*20.3*) から $t$ を消去すると

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 = 1 + \frac{q^2}{c_0{}^2}. \tag{20.6}$$

さて，$K=1$ とすると，基礎方程式 (*17.8*) は Cauchy-Riemann の関係式となるから，$F=\Phi+i\Psi$ は $\theta+it$ の解析函数，したがって $\exp[(-i)(\theta+it)]=e^{t-i\theta}$ の解析函数と考えられる：

$$F = F(W), \quad W = Qe^{-i\theta}, \tag{20.7}$$

ただし

$$Q = e^t. \tag{20.8}$$

いま

$$\zeta = \int \frac{dF}{W} \quad \text{すなわち} \quad \frac{dF}{d\zeta} = W \tag{20.9}$$

の関係によって $W$ の解析函数 $\zeta$ を定義すると，$F$ は $\zeta$ 面でおこる縮まない流体の流れを与える複素速度ポテンシアルで，$W$ は複素速度を表わすものと考えられる．$Q$ はその速度の大きさ，$\theta$ は流れの傾きを与える．すなわち $F$ は $z$ 面での縮む流体の流れを与えると同時に，$\zeta$ 面での縮まない流体の流れをも表わしている．しかも，これら二平面での流れの方向はともに $\theta$ で等しいが，速度の大きさは異なり，それぞれ $q, Q$ で与えられる．$q$ と $Q$ の間には (*20.2*), (*20.8*) により

$$\frac{1}{q} = AQ + \frac{B}{Q} \tag{20.10}$$

の関係がある．

(*20.10*) と (*20.3*) とを (*17.5*) に代入すると

$$\begin{aligned} dz &= AQe^{i\theta}(d\Phi - i\,d\Psi) + BQ^{-1}e^{i\theta}(d\Phi + i\,d\Psi) \\ &= A\frac{d\bar{F}}{d\bar{\zeta}}d\bar{F} + B\frac{d\zeta}{dF}dF \\ &= B\,d\zeta + A\left(\frac{d\bar{F}}{d\bar{\zeta}}\right)^2 d\bar{\zeta}. \end{aligned} \tag{20.11}$$

いま，$\zeta$ 面で任意に一つ縮まない流体の渦無し運動を考え，その複素速度ポテンシアルを $F$ とすると，$F$ は同時に $z$ 面での縮む流体（仮想気体）の流れを表わしている．その際，縮まない流れの点 $\zeta$ での流速を $Q$，縮む流れの点 $z$ での流速を $q$ とすれば，$\zeta\to z$, $Q\to q$ の対応関係は (*20. 11*), (*20. 10*) で与えられるのである．

流速のおそいばあい圧縮性の影響があらわれないことを考慮して，$q\to 0$ のとき $q/Q\to 1$ になるように $q$ と $Q$ の対応関係を定めることにしよう．そうすれば，$B=1$．したがって，$4AB=-c_0^{-2}$ の関係から $A=-1/(4c_0^2)$．それゆえ (*20. 11*) は

$$z=\zeta-\frac{1}{4c_0^2}\int\left(\frac{d\bar{F}}{d\bar{\zeta}}\right)^2 d\bar{\zeta} \qquad (20.\ 12)$$

となる．また (*20. 10*), (*20. 6*) はそれぞれ

$$q=\frac{Q}{1-Q^2/4c_0^2},\qquad \frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1-Q^2/4c_0^2}{1+Q^2/4c_0^2} \qquad (20.\ 13)$$

となる．

一様流（添字 $\infty$ で示す）からの偏差を無次元の形で表わした圧力係数

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty q_\infty^2} \qquad (20.\ 14)$$

を使うと，縮まない流体のばあいは Bernoulli の定理により

$$C_{pi}=1-\frac{Q^2}{Q_\infty^2}. \qquad (20.\ 15)$$

また，von Kármán-Tsien の仮想気体では，(*20. 5*), (*20. 13*), (*20. 14*) により

$$C_p=\frac{(1+\lambda)C_{pi}}{1-\lambda+\lambda C_{pi}},\qquad \lambda=\frac{Q_\infty^2}{4c_0^2} \qquad (20.\ 16)$$

である．(*20. 13*) で $Q=Q_\infty$ とおけば

$$\frac{q_\infty}{Q_\infty}=\frac{\phantom{1}}{1-\lambda},\qquad \frac{\rho_\infty}{\rho_0}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}. \qquad (20.\ 17)$$

したがって

$$\lambda=\frac{1-\rho_\infty/\rho_0}{1+\rho_\infty/\rho_0}. \qquad (20.\ 18)$$

ところが，(*17.9*) の式で $q=q_\infty, K=1$ とおけば

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_0}=\sqrt{1-M_\infty{}^2}=\mu_\infty \tag{20.19}$$

が得られるから，けっきょく

$$\lambda=\frac{1-\mu_\infty}{1+\mu_\infty}=\frac{M_\infty{}^2}{(1+\sqrt{1-M_\infty{}^2})^2}. \tag{20.20}$$

以上は $K=\text{const}$ なる性質をもつ仮想気体について成り立つ関係であるが，実在気体に対する関係を近似的に表わすものとも考えられる．たとえば，翼型 P に高速気流があたるときの任意の点（とくに翼表面の点）での圧力係数 $C_p$ は，それに対応する縮まない流体に対する圧力係数 $C_{pi}$ から公式 (*20.16*) によって計算する．厳密にいえば，$C_{pi}$ としては (*20.12*) の関係によって $z$ 面の翼型 P に対応する $\zeta$ 面上の"変形した"翼型 $\mathrm{P}_i$ に対する値をとるべきであるが，実際上は変形を無視して P と $\mathrm{P}_i$ とは同じ翼型とみなすのがふつうである．(*20.16*) を von Kármán-Tsien の圧力換算公式という．

薄い翼型では $C_{pi}$ は小さいので (*20.16*) は近似的に

$$C_p \fallingdotseq \frac{1+\lambda}{1-\lambda}C_{pi}=\frac{C_{pi}}{\sqrt{1-M_\infty{}^2}} \tag{20.21}$$

となる．これは Prandtl-Glauert の法則にほかならない．

## §21 翼型に揚力の働くばあい

$\zeta$ 面で翼型 $\mathrm{P}_i$ に縮まない流体の一様な流れがあたるばあい，複素速度ポテンシアルは

$$F=Q_\infty G(\zeta), \tag{21.1}$$

$$G(\zeta)=\zeta+i\kappa_0\log\zeta+\frac{k_1}{\zeta}+\frac{k_2}{\zeta^2}+\cdots \tag{21.2}$$

のように与えられる．$Q_\infty$ は一様流の速度，$2\pi Q_\infty\kappa_0$ は $\mathrm{P}_i$ のまわりの循環である．このとき (*20.12*) は

$$z=\zeta-\lambda\int\left(\frac{d\bar{G}}{d\bar{\zeta}}\right)^2 d\bar{\zeta},\quad \lambda=\frac{Q_\infty{}^2}{4c_0{}^2} \tag{21.3}$$

となる．(*21.2*) を代入すると

$$z=\zeta-\lambda\{\bar{\zeta}-2i\kappa_0\log\bar{\zeta}\}+P(\bar{\zeta}^{-1}). \tag{21.4}$$

ただし $P(Z)$ は $Z$ のベキ級数を意味する．さて $\log\bar{\zeta}$ は $\bar{\zeta}$ の多価函数である

から，$z$ 面と $\zeta$ 面の対応は一対一ではない．したがって $P_i$ に対応する $z$ 面の図形 P は閉曲線ではなく，翼型として用いることはできない．それゆえ von Kármán-Tsien の方法は，そのままでは，翼に揚力が働くばあい，すなわち，翼のまわりに循環のあるばあいには応用できない．

この困難を救うには次のようにすればよい．いま

$$\frac{d\zeta}{dZ}=g(Z) \tag{21.5}$$

の関係によって $Z$ 面を導入する．ただし $g(Z)$ は $Z$ 面上の閉曲線 $P_0$ の外部で零点をもたず $Z\to\infty$ で 1 になるような一価の解析函数とする．したがって

$$Z\to\infty \text{ のとき } \frac{d\zeta}{dZ}=1+\frac{a_1}{Z}+\frac{a_2}{Z^2}+\cdots \tag{21.6}$$

のように Laurent 展開が許され，積分すれば

$$\zeta=Z+a_0+a_1\log Z-\frac{a_2}{Z}-\cdots \tag{21.7}$$

となる．

$Z$ 面で $P_0$ を過ぎる速度 $U_0$ の一様な流れは一般に

$$F=U_0\left(Z+i\kappa_0\log Z+\frac{b_1}{Z}+\frac{b_2}{Z^2}+\cdots\right) \tag{21.8}$$

の形の複素速度ポテンシアルで与えられる．$\zeta$ 面での無限遠での速度は

$$Q_\infty=\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty}=\left(\frac{dF}{dZ}\Big/\frac{d\zeta}{dZ}\right)_{Z=\infty}=U_0. \tag{21.9}$$

したがって

$$G\equiv\frac{F}{Q_\infty}=Z+i\kappa_0\log Z+\frac{b_1}{Z}+\cdots. \tag{21.10}$$

これより

$$\int\left(\frac{dG}{d\zeta}\right)^2 d\zeta=\int\left(\frac{dG}{dZ}\right)^2\left(\frac{d\zeta}{dZ}\right)^{-1}dZ=Z+(2i\kappa_0-a_1)\log Z+P(Z^{-1}).$$

(21.3) に代入すれば

$$z=Z-\lambda\bar{Z}+a_1\log Z+\lambda\,(\bar{a}_1+2i\kappa_0)\log\bar{Z}+P(Z^{-1})+P(\bar{Z}^{-1}).$$

$Z=re^{i\theta}$ とおけば，上の式で多価になるのは

$$i\{a_1-\lambda(\bar{a}_1+2i\kappa_0)\}\theta$$

であることが容易にわかる．したがって $z$ 面と $Z$ 面が一対一に対応する条件は

$$a_1-\lambda(\bar{a}_1+2i\kappa_0)=0 \quad \therefore \quad \bar{a}_1-\lambda(a_1-2i\kappa_0)=0$$

である．これを $a_1$ について解けば

$$a_1=\frac{2i\kappa_0\lambda}{1+\lambda}. \tag{21.11}$$

このとき

$$z=Z-\lambda\bar{Z}+2i\kappa_0\frac{\lambda}{1+\lambda}\log Z\bar{Z}+O\left(\frac{1}{Z}\right). \tag{21.12}$$

けっきょく，$\zeta$ 面の代りに

$$\frac{d\zeta}{dZ}=g(Z)=1+2i\kappa_0\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{Z}+\frac{a_2}{Z^2}+\cdots \tag{21.13}$$

で与えられる $Z$ 面をとり，その上での翼型 $P_0$ を過ぎる流れ (*21. 8*) を考えると，$z$ 面での翼型 P を過ぎる縮む流体の流れが得られるのである．$P_0$ と P の対応は

$$z=\int g(Z)dZ-\lambda\left\{\int\left(\frac{dG}{dZ}\right)^2\frac{dZ}{g(Z)}\right\}^* \tag{21.14}$$

で与えられる．ただし * は共役複素数を意味する．

(*21. 10*), (*21. 13*) において，$(b_1, b_2, \cdots)$, $(a_2, a_3, \cdots)$ は任意である．これらの数値を適当に選ぶことによって任意の翼型Pのまわりの流れを論ずることができる．しかしまた，$b_n, a_n$ のどちらか一組の値を指定しておいても，他の一組の値を適当に定めると所望の翼型 P を得ることが可能であろう．たとえば $a=2\kappa_0\lambda/(1+\lambda)$ とおいて

$$g(Z)=1+\frac{ia}{Z}, \quad a_n=0, \tag{21.15}$$

$$g(Z)=\frac{Z}{Z-ia}, \quad a_n=(ia)^n \tag{21.16}$$

などを仮定すると計算が簡単になる．あるいはまた，

$$G=Z+i\kappa_0\log Z+\frac{1}{Z}, \quad b_1=1, \ b_n=0 \quad (n\geqq 2) \tag{21.17}$$

とおけば，$Z$ 面での翼型 $P_0$ を原点中心の単位円に選んだことに相当する．(*21. 15*) または (*21. 16*) の選び方に対しては $b_n$ を，また (*21. 17*) の選び方に対しては $a_n$ を適当に定めることが必要である．

**例題〕** 擬似円柱のまわりの流れ．(*21. 17*) から出発して (*21. 15*) または (*21. 16*) を

用いると円柱に類似した物体のまわりの流れが得られる．実際，マッハ数 $M_\infty$ が小さければ $\lambda$ は小さいから $g(Z)\fallingdotseq 1$ となり，*(21.14)* により $z\fallingdotseq Z$. したがって P はほとんど $P_0$ すなわち円柱と異ならない．また，循環のないばあいは $\kappa_0=0$ であるから $a=0$. したがって *(21.15)* と *(21.16)* はともに $g(Z)=1$ となる．このとき $z$ 面の翼型 P は楕円柱に近い形になる．読者の演習にまかせる．

## §22 揚力とモーメントの一般公式

前節では，$Z$ 面での翼型 $P_0$ のまわりの縮まない流れと $z$ 面での翼型 P のまわりの縮む流れを結びつける関係を導いた．つぎに，$P_0$ に働く揚力とモーメントが知れているばあいに，P に対するそれらの値を直ちに与える公式を導く．そのためには，§16 の公式を利用する．すなわち，速度ポテンシアルは一般に

$$\Phi=\frac{U}{2}\left\{z+\bar{z}+i\frac{\Gamma}{2\pi U}\log\frac{z}{\bar{z}}+\sum\sum\sum A^{l}_{mn}z^m\bar{z}^n(\log z\bar{z})^l\right\} \tag{22.1}$$

の形に表わされ，揚力 $L$ と原点 $z=0$ のまわりのモーメント $M_z$ は

$$L=\rho_\infty U\Gamma, \tag{22.2}$$

$$M_z=-\pi\rho_\infty U^2(1+\mu)\Im(A^0_{-1,0}) \tag{22.3}$$

で与えられる．さて *(21.8)* によれば

$$\Phi=\frac{1}{2}(F+\bar{F})=\frac{U_0}{2}\left\{Z+\bar{Z}+i\kappa_0\log\frac{Z}{\bar{Z}}+\frac{b_1}{Z}+\frac{\bar{b}_1}{\bar{Z}}+O\left(\frac{1}{Z^2}\right)\right\}. \tag{22.4}$$

ところが，*(21.12)* とその複素共役を使えば，$Z, \bar{Z}$ を $z, \bar{z}$ で表わすことができるから，これらを *(22.4)* に代入して $z$, $\log z$, $1/z$ の係数をひろい出すと

$$U=\frac{U_0}{1-\lambda}, \tag{22.5}$$

$$\frac{\Gamma}{2\pi U}=(1-\lambda)\kappa_0, \tag{22.6}$$

$$A^0_{-1,0}=(1-\lambda)(1+\lambda)^2(b_1+a_2)+\text{実数} \tag{22.7}$$

が得られる．したがって *(22.2)*, *(22.3)* により

$$L=2\pi\rho_\infty U^2(1-\lambda)\kappa_0, \tag{22.8}$$

$$M_z=-\pi\rho_\infty U^2(1+\mu)(1-\lambda)(1+\lambda)^2\Im(b_1+a_2). \tag{22.9}$$

一方，翼型 $P_0$ を過ぎる速度 $U_0$，密度 $\rho_0$ の縮まない流れについては，揚力 $L_0$ と $Z=0$ のまわりのモーメント $M_Z$ は

$$L_0=2\pi\rho_0 U^2\kappa_0, \tag{22.10}$$

$$M_Z=-2\pi\rho_0 {U_0}^2\Im(b_1) \tag{22.11}$$

で与えられる．($L, M_z$ の式で $\lambda=0,\ \mu=1,\ \rho_\infty=\rho_0,\ U=U_0,\ a_2=0$ とおけばよい.) いま，$P_0, P$ の代表的な長さ (たとえば翼弦) をそれぞれ $l_0, l$ として

$$C_L=\frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2 l},\quad C_{L0}=\frac{L_0}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0{}^2 l_0},$$

$$C_{M_z}=\frac{M_z}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2 l^2},\quad C_{MZ}=\frac{M_Z}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0{}^2 l_0{}^2}$$

によって揚力係数 $C_L, C_{L0}$，モーメント係数 $M_z, M_Z$ を定義すると，容易に

$$C_L=\frac{2\mu}{1+\mu}\frac{l_0}{l}C_{L0}, \tag{22.12}$$

$$C_{M_z}=\frac{4\mu}{(1+\mu)^2}\left(\frac{l_0}{l}\right)^2\left\{C_{MZ}-\frac{4\pi\Im(a_2)}{l_0{}^2}\right\} \tag{22.13}$$

の関係が得られる．

$2\mu/(1+\mu)$, $4\mu/(1+\mu)^2$ はともにマッハ数 $M_\infty$ の単調減小函数であるから，もしも $P_0$ と $P$ の形の相違を無視して $l=l_0$ と仮定すると $C_L, C_{M_z}$ は $M_\infty$ とともに減小することになる．これは経験と矛盾する．すなわち，ホドグラフ法における“翼型の変形” ($P$ と $P_0$ の相違) は無視することのできない影響をもつものである．

例題〕 循環を伴わない薄翼．循環のないばあいは $Z$ 面を考えるまでもないから，$\zeta$ 面に薄翼 $P_0$ をとる．$P_0$ のために一様流につけ加わる速度は $O(\varepsilon)$ の程度の小ささであると仮定すると，複素速度ポテンシアルを

$$G=\zeta+f(\zeta),\quad f(\zeta)=O(\varepsilon) \tag{22.14}$$

のように表わすことができる．したがって

$$\left(\frac{dG}{d\zeta}\right)^2=1+2f'(\zeta)+O(\varepsilon^2).$$

これを (21.3) に代入すると

$$z=\zeta-\lambda\{\bar\zeta+2\bar f(\bar\zeta)\}+O(\varepsilon^2). \tag{22.15}$$

翼型 $P_0$ の上では $\Psi=0$ であるから $G=\bar G$. したがって $\zeta+f(\zeta)=\bar\zeta+\bar f(\bar\zeta)$. ゆえに $P_0$ の上で

$$\begin{aligned}z&=\zeta-\lambda\{\zeta+f(\zeta)+\bar f(\bar\zeta)\}+O(\varepsilon^2)\\&=(1-\lambda)\zeta-\lambda\{f(\zeta)+\bar f(\bar\zeta)\}+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

これを実数部と虚数部に分けると

$$x=(1-\lambda)\xi+O(\varepsilon),\quad y=(1-\lambda)\eta+O(\varepsilon^2).$$

いま $P_0$ が方程式：　$\eta = h(\xi)$ によって与えられるものとすると，$z$ 面での対応する翼型 P は

$$y = (1-\lambda)h\left[\frac{x}{1-\lambda}+O(\varepsilon)\right]+O(\varepsilon^2)$$
$$= (1-\lambda)h\left(\frac{x}{1-\lambda}\right)+O(\varepsilon^2)$$

で与えられる（$\because$　$h(\xi)=O(\varepsilon)$）．それゆえ $O(\varepsilon^2)$ を省略すると

$$\frac{y}{1-\lambda} = h\left(\frac{x}{1-\lambda}\right). \tag{22.16}$$

これは P が $P_0$ に相似で $(1-\lambda)$ 倍に縮小したものであることを示している．なお (22.5) によれば，$z$ 面では一様流の速度が $\xi$ 面での値の $(1-\lambda)^{-1}$ 倍になっていることがわかる．

いまのばあい循環は 0 であるから揚力はもちろん 0 である．モーメントについては，(22.13) の公式で $a_2=0$（$\xi$ 面と $Z$ 面とは同一と考えられるから）とおいて

$$C_{M_z} = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2}\left(\frac{l_0}{l}\right)^2 C_{M_\zeta}. \tag{22.17}$$

ところが縮小率は $1-\lambda$ であるから，(20.20) を考慮して $\dfrac{l_0}{l}=\dfrac{1}{1-\lambda}=\dfrac{1+\mu}{2\mu}$．　けっきょく (22.17) は

$$C_{M_z} = \frac{C_{M_\zeta}}{\mu},\quad \mu=\sqrt{1-M_\infty{}^2} \tag{22.18}$$

となる．これは Prandtl-Glauert の法則にほかならない．

## §23　WKB 法の応用

§17 で見たように，二次元の高速気流の厳密解は一般に

$$\Psi = \sum T_n(t)(A_n\cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{23.1}$$

の形に表わすことができる．ここに $T_n(t)$ は

$$\frac{d^2T_n}{dt^2} - n^2K(t)T_n = 0 \tag{23.2}$$

の解である．

いま，一様な流れが翼型にあたるばあいを考えると，(23.1) の無限級数は発散するはずである．実際，無限遠では $t=t_\infty$，$\theta=0$ で，このとき $\Psi$ は任意の値をとり得るからである．（たとえば $\Psi=c$ なる流線に沿って無限遠点に行くと，$t=t_\infty$，$\theta=0$ が $\Psi=c$ に対応することになる．）発散級数 $\sum c_n$ の性質を支配するものは $n\to\infty$ での $c_n$ の性質であるから，無限遠での流れの様子を調べるには，$n\to\infty$ での $T_n(t)$ の漸近的性質を知る必要がある．

二階の線型微分方程式 (23.2) の解の漸近的性質は次のように WKB 法

(Wentzel-Kramers-Brillouin の方法) によって調べるのが便利である. いま

$$\tau = -\int K^{\frac{1}{2}}dt = -\int\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dq}{q}, \tag{23.3}$$

$$T_n(t) = K^{-\frac{1}{4}}W_n(\tau) \tag{23.4}$$

によって新しい変数 $\tau, W_n$ を導入すると, (23.2) は

$$\frac{d^2W_n}{d\tau^2}-n^2W_n = kW_n, \tag{23.5}$$

$$k = K^{-\frac{1}{4}}\frac{d^2K^{\frac{1}{4}}}{d\tau^2} = -K^{-\frac{3}{4}}\frac{d^2K^{-\frac{1}{4}}}{dt^2} \tag{23.6}$$

となる. $k$ は $q$ したがって $\tau$ の函数で, 考える気体の性質によってきまる函数形をもつ.

(23.5) の両辺を $n^2$ で割り, $n\to\infty$ とすると, 右辺は 0 になるから, (23.5) の解は漸近的に

$$W_n \sim Ae^{n\tau}+Be^{-n\tau}, \quad n\to\infty \tag{23.7}$$

のように表わされる. これがすなわち WKB 法の結果である. したがって (23.4) により, $n\to\infty$ のとき

$$T_n(t) \sim \begin{cases} K^{-\frac{1}{4}}e^{\pm n\tau}, & q<c, \\ |K|^{-\frac{1}{4}}e^{\pm in|\tau|}, & q>c \end{cases} \tag{23.8}$$

という漸近表示が得られる. これは, 密度・圧力の間に $\rho=f(p)$ なる関係がありさえすれば任意の気体について成り立つのである.

(23.8) は, $|K|^{-\frac{1}{4}}$ の因子を除けば, 縮まない流体に対する (19.2) の式と形式的に同じであるから, 取扱いが非常に簡単になることが期待される.

## §24 音よりおそい流れ

(23.3), (23.4) の変換が成功をおさめたことを考慮して, 新しい変数 $\tau, \phi, \psi$ を用いることにする. ただし

$$\Phi = K^{\frac{1}{4}}\phi, \quad \Psi = K^{-\frac{1}{4}}\psi. \tag{24.1}$$

このとき, 基礎方程式 (17.8) は

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}-\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -K^{-\frac{1}{4}}\frac{dK^{\frac{1}{4}}}{d\tau}\phi, \tag{24.2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -K^{\frac{1}{4}}\frac{dK^{-\frac{1}{4}}}{d\tau}\psi \tag{24.3}$$

となる．これらから$\psi$または$\phi$を消去すると，それぞれ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=K^{\frac{1}{4}}\frac{d^2K^{-\frac{1}{4}}}{d\tau^2}\phi, \tag{24.4}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=K^{-\frac{1}{4}}\frac{d^2K^{\frac{1}{4}}}{d\tau^2}\psi \tag{24.5}$$

を得る．また(*17.8*)は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=K^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-K^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} \tag{24.6}$$

の形に表わすこともできる．

以下の議論ではとくに(*24.5*)を基礎方程式として用いる．すなわち

$$\nabla^2\psi=k(\tau)\psi,\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{24.7}$$

ただし$k(\tau)$は(*23.6*)で定義される．

さて，次に示すように，実際的に重要なばあい(*24.7*)は

$$\nabla^2\psi=0 \tag{24.8}$$

で近似することができる．たとえば物体に一様な流れがあたるばあいを考える．

(i)　流速があまりはやくなければ$K$はほぼ一定，したがって(*23.6*)により$k\fallingdotseq 0$.

(ii)　物体の表面では$\Psi=0$であるから，物体の近くでは$k\psi\fallingdotseq 0$.

(iii)　無限遠方では$\psi$は非常に大きい値をとり得る．しかし$\nabla^2\psi$は$\psi$に比べて高次の$\infty$になる．

いずれにしても(*24.8*)の近似は相当良いものと期待される．

(*24.8*)の一般解は

$$\psi=\Im(f(\sigma))=\frac{1}{2i}[f(\sigma)-\bar{f}(\bar{\sigma})], \tag{24.9}$$

$$\sigma=\tau+i\theta \tag{24.10}$$

で与えられる．ただし$f(\sigma)$は任意の解析函数である．(*24.1*)～(*24.3*)により，一般に

$$d\Phi=K^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\tau-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}d\theta-\left(K^{\frac{1}{4}}\frac{d}{d\tau}K^{-\frac{1}{4}}\right)\psi\,d\theta\right\}$$

である．物体Pの表面では$\Psi=0$であるから，(*17.5*)は

$$dz_{\mathrm{P}} = \frac{K^{\frac{1}{4}}}{q} e^{i\theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\tau - \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\theta \right) \qquad (24.11)$$

となる．ここで (*24.9*) を代入すると

$$dz_{\mathrm{P}} = q^{-1} K^{\frac{1}{4}} e^{i\theta} df \qquad (24.12)$$

と簡単化される．以下，von Kármán-Tsien の方法と同様に進むことができる．すなわち，$f(\sigma)$ は $\zeta$ 面での縮まない流れを表わすものと考え

$$\frac{df}{d\zeta} = Qe^{-i\theta} = Ce^{-\sigma}, \qquad (24.13)$$

$$Q = Ce^{-\tau}, \quad \tau = \log(C/Q) \qquad (24.14)$$

とおく．(*24.14*) は $\zeta$ 面での流速 $Q$ と $z$ 面での縮む流体の速度 $q$ との対応関係を与える．($q$ は $\tau$ の既知函数であるから.) (*24.13*) を (*24.12*) に代入すると

$$dz_{\mathrm{P}} = q^{-1} Q K^{\frac{1}{4}} d\zeta_{\mathrm{P}}. \qquad (24.15)$$

これによって，$z$ 面と $\zeta$ 面での翼型どうしの対応関係が得られる．

実際計算は次のように行う．まず $\zeta$ 面に任意の翼型 $\mathrm{P}_0$ をとり，これを過ぎる縮まない流体の流れを計算する．$\mathrm{P}_0$ の表面の速度 $Q$ が知れると，$Q, q, q^{-1}QK^{\frac{1}{4}}$ の数表を用いて $Q$ に対応する $q$ と $q^{-1}QK^{\frac{1}{4}}$ を求める．(*24.14*) によって数値積分を行い，$z$ 面での翼型 P を求める．これで P のまわりの高速気流の速度分布 $q$ が求められたわけである．

翼型 $\mathrm{P}_0$ を過ぎる流れが循環を伴うばあいには，von Kármán-Tsien の方法のときと同様，$z$ 面の翼型 P は閉曲線にならない．このばあいは，前と同じく

$$\frac{d\zeta}{dZ} = 1 + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \cdots \qquad (24.16)$$

によって新しい複素平面 $Z$ を導入すればよい．ただし，$a_1$ は循環とマッハ数に応じて適当に定めなければならない．

なお，翼型が薄いばあいには，P は $\mathrm{P}_0$ と相似で $(q^{-1}QK^{\frac{1}{4}})_\infty$ 倍に縮小されることが証明できる．したがって，翼型 P のまわりの高速気流の表面速度分布は，同じ翼型の低速における速度 Q の値から Q 対 $q$ の数表を用いて直ちに見出すことができる．その結果は Prandtl-Glauert の法則によるより精度が高いものと期待される．

## §25　音よりはやい流れ

このばあいでも $\nabla^2\psi=0$ の近似はそのまま成立する．ただし $q>c$ で $K$ は負，$\tau$ は虚数となるので，$\phi,\psi,\tau$ の定義をすこし変更して虚数の現われないようにするのが便利である．

$$1-q/c=i^{-2}(q/c-1),\quad i=e^{\frac{1}{2}\pi i}, \tag{25.1}$$

$$\mu=(1-q^2/c^2)^{\frac{1}{2}}=i^{-1}(q^2/c^2-1)^{\frac{1}{2}}, \tag{25.2}$$

$$\tau=i^{-3}\int_1^q|\mu|\frac{dq}{q}=i^{-3}|\tau|, \tag{25.3}$$

$$K=\left(\mu\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2=i^{-2}\left|\mu\frac{\rho_0}{\rho}\right|^2=i^{-2}|K|, \tag{25.4}$$

$$\Phi=|K|^{\frac{1}{4}}|\phi|,\quad \Psi=|K|^{-\frac{1}{4}}|\psi|, \tag{25.5}$$

$$\phi=i^{\frac{1}{2}}|\phi|,\qquad \psi=i^{-\frac{1}{2}}|\psi| \tag{25.6}$$

とおけば，(24.2)～(24.5) は

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-K^{-\frac{1}{4}}\frac{dK^{\frac{1}{4}}}{d\tau}\phi, \tag{25.7}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=K^{\frac{1}{4}}\frac{dK^{-\frac{1}{4}}}{d\tau}\psi, \tag{25.8}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=K^{\frac{1}{4}}\frac{d^2K^{-\frac{1}{4}}}{d\tau^2}\phi, \tag{25.9}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial^2\theta}=K^{-\frac{1}{4}}\frac{d^2K^{\frac{1}{4}}}{d\tau^2}\psi \tag{25.10}$$

となる．ただし，簡単のために，絶対値の記号 | | は省略してある．

(25.7), (25.8) は明らかに双曲型の連立偏微分方程式で，その特性曲線は

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=0 \tag{25.11}$$

の特性曲線と同じである．(25.11) は波動方程式で，特性曲線が

$$\tau\pm\theta=\text{const} \tag{25.12}$$

で与えられることは周知のとおりである．

さて，(24.6) は，いまのばあい

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=K^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=K^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} \tag{25.13}$$

と書かれる．そこで

$$\xi = \tau + \theta, \quad \eta = \tau - \theta \tag{25.14}$$

とおくと，(25.13) は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -K^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = K^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \tag{25.15}$$

となり，(17.5) は

$$dz = \frac{1}{q} e^{i\theta} \left\{ -(\mu - i) \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} d\xi + (\mu + i) \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\eta \right\}$$

と書きかえられる．ところが

$$\mu \pm i = (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} e^{\pm i\beta} = \frac{q}{c} e^{\pm i\beta}, \quad \beta = \cot^{-1}\mu$$

であるから，上の式はけっきょく

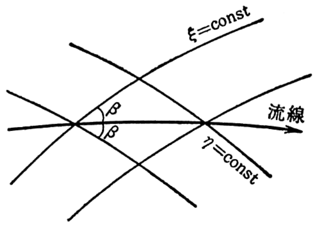
$$dz = \frac{\rho_0}{\rho c} e^{i\theta} \left( e^{i\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\eta - e^{-i\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} d\xi \right) \tag{25.16}$$

となる．$\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ で与えられる特性曲線はそれぞれ

$$dz = \frac{\rho_0}{\rho c} e^{i(\theta + \beta)} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} d\eta,$$

$$dz = -\frac{\rho_0}{\rho c} e^{i(\theta - \beta)} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} d\xi$$

であるから (第25.1図)，流速ベクトル $qe^{i\theta}$ に対して，ともに $\beta = \cot^{-1}\mu = \sin^{-1} c/q$ なる角度をなすことがわかる．$\beta$ を**マッハ角**という．



第 25.1 図

## §26　音に近い流れ

(17.9), (23.6) によれば，$q \fallingdotseq c$ では $K \fallingdotseq 0$, $k \to \infty$ となるから，基礎方程式 $\nabla^2 \psi = k(\tau)\psi$ を $\nabla^2 \psi = 0$ で近似することはできない．$q = c$ となるような速度 $q = c_*$ を**臨界速度**という．一般に，$q \lesseqgtr c_*$ に応じて $q \lesseqgtr c$ である．いま $K(q)$ が $q = c_*$ の近くで

$$K(q) = a_1(q - c_*)\{1 + b_1(q - c_*) + b_2(q - c_*)^2 + \cdots\} \tag{26.1}$$

のように展開できるものとすると，$k(\tau)$ は

$$k(\tau) = -\frac{5}{35} \frac{1}{\tau^2} + \lambda \tau^{-\frac{2}{3}} + \lambda_0 + \lambda_1 \tau^{\frac{2}{3}} + \cdots \tag{26.2}$$

のように $\tau^{\frac{2}{3}}$ のベキ級数に展開することができる．ただし，$\lambda, \lambda_0, \lambda_1, \cdots$ は $a_1, b_1,$

$b_2, \cdots$ で表わされる定数である．ここで注意すべき点は，$\tau^{-\frac{4}{3}}$ の項がかけていることである．それゆえ，$a, b_1, b_2, \cdots$ の値に（したがって気体の特性に）無関係に成り立つ精密な近似式として

$$k(\tau) = -\frac{5}{36}\frac{1}{\tau^2} \tag{26.3}$$

を用いることができる．すなわち，音に近い流れは

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = -\frac{5}{36}\frac{1}{\tau^2}\psi \tag{26.4}$$

を基礎として論ずることができる．

$$\psi = W_n(\tau)e^{ni\theta} \tag{26.5}$$

とおけば

$$\frac{d^2W_n}{d\tau^2}+\left(-n^2+\frac{5}{36}\frac{1}{\tau^2}\right)W_n = 0. \tag{26.6}$$

この解は

$$W_n(\tau) = \tau^{\frac{1}{2}}Z_{1/3}(ni\tau) \tag{26.7}$$

で与えられる．ただし $Z_{1/3}$ は $\dfrac{1}{3}$ 次の Bessel 函数を表わす．(*26.7*) は (*23.7*) に対応するもので，(*23.8*) の間隙を埋める関係として

$$T_n(t)\sim K^{-\frac{1}{4}}\tau^{\frac{1}{2}}Z_{1/3}(ni\tau), \qquad q\doteqdot c \tag{26.8}$$

を与える．

(*26.4*) の一般解は

$$\psi = \Im\left(\sum c_nW_n(\tau)e^{ni\theta}\right), \quad \Im\left(\int f(n)W_n(\tau)e^{ni\theta}dn\right) \tag{26.9}$$

のように表わされる．

つぎに (*26.5*) と異なる形の特解を求めよう．そのために，つぎの事実に注意する．(*26.4*) の任意の一つの解を $\psi_0(\tau, \theta)$ とすると，明らかに $\psi_0(a\tau, a\theta)$ も解である．したがって $\tau^m f(\theta/\tau)$ の形の解が存在する．また (*26.4*) は $\theta$ を $\theta$+const でおきかえても形が変らない．したがって $\tau^m f[(\theta+b)/\tau]$ の形の解が存在するはずである．

そこで，便宜上 $b = i\tau_1$ と書き

$$\frac{\theta+i\tau_1}{\tau} = i\cos\alpha, \qquad \alpha = \xi+i\eta \tag{26.10}$$

によって新しい変数を導入すれば，たしかに

$$\psi=\tau^{m}A(\alpha) \tag{26.11}$$

が (26.4) の解であることがわかる．ただし $A(\alpha)$ は

$$A''-(2m-1)\cot\alpha\,A'-\{m(m-1)+5/36\}A=0 \tag{26.12}$$

の解である．これの一般解は Legendre 函数を使って

$$A=\sin^{m}\alpha\{C_1Q^{m}_{-1/6}(\cos\alpha)+C_2Q^{m}_{-5/6}(\cos\alpha)\} \tag{26.13}$$

のように表わされる．したがって

$$\psi_m=\tau^{m}\sin^{m}\alpha\{C_1Q^{m}_{-1/6}(\cos\alpha)+C_2Q^{m}_{-5/6}(\cos\alpha)\} \tag{26.14}$$

が (26.4) の一つの特解である．とくに $m$ が半奇数のばあいには $Q_n{}^m(\cos\alpha)$ は初等函数で表わされる．たとえば

$$\psi_{1/2}=\tau^{\frac{1}{2}}e^{\pm i\alpha/3},\qquad \psi_{-1/2}=\tau^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{\pm i\alpha/3}}{\sin\alpha}. \tag{26.15}$$

なお，(26.4) の任意の特解 $\psi$ から $\partial\psi/\partial\theta$ によって新しい特解が得られるはずであるが，実際

$$\frac{\partial\psi_m}{\partial\theta}=\frac{i}{\tau\sin\alpha}\frac{\partial\psi_m}{\partial\alpha}=\psi_{m-1}$$

の関係がある．

Legendre 函数 $Q_n{}^m$ は超幾何函数 $F$ を使って

$$Q_n{}^m(z)=c_1\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}F\left(-n,n+1,1+m;\frac{1}{2}(1-z)\right)$$
$$+c_2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{-\frac{m}{2}}F\left(-n,n+1,1-m;\frac{1}{2}(1-z)\right) \tag{26.16}$$

のように表わすことができる．ただし $c_1, c_2$ は定数．

いま，

$$z=\cos\alpha,\quad \omega=(\tau-\tau_1)+i\theta$$

とおけば，(26.10) により

$$\frac{1}{2}(1-z)=\frac{\omega}{2\tau},\quad \frac{z-1}{z+1}=\frac{\omega}{\omega-2\tau}.$$

したがって (26.14) は

$$\psi_m=A\omega^{m}F(1/6,5/6,1+m;\ \omega/2\tau)+B(\omega-2\tau)^{m}F(1/6,5/6,1-m;\ \omega/2\tau) \tag{26.17}$$

となる．ただし $A, B$ は定数．それゆえ $\psi_m$ は $\tau=\tau_1$, $\theta=0$ の近くで $\omega^m$ と

同様な性質をもつことになる．したがって，たとえば円柱を過ぎる縮まない流れの複素速度ポテンシアルの式（*19.7*）

$$f=(1-w)^{-\frac{1}{2}}+(1-w)^{\frac{1}{2}}$$

の第一項に相当するものが $\psi_{-1/2}$，第二項に相当するものが $\psi_{1/2}$ であると考えられる．実際，$\psi_{-1/2}$ と $\psi_{1/2}$ の線型結合によって，物体を過ぎる一様な流れを得ることができる．

# 参　考　書


第1章　拡散の問題に関する一般的な参考書として

〔1〕 S. Chandrasekhar: Radiative Transfer (Oxford University Press, New York, 1950).

〔2〕 Case de Hoffmann and Placzek: Introduction to the Theory of Neutron Diffusion (U.S. Government Printing Office, Washington D.C.) Vol. I.

また相反関係について

〔3〕 K. M. Case: Transfer Problems and the Reciprocity Theorem. Revs. Modern Physics, **29**, 651 (1957).

原子炉内の中性子の拡散については，たとえば

〔4〕 S. Glasstone and M. C. Edlund 著，伏見，大塚訳：原子炉の理論（みすず書房，1955).

第2章　散乱の短波長極限については，たとえば

〔5〕 P.M. Morse and H. Feshbach (A 編の参考書〔13〕).

分散公式と因果律についての古典理論は次の諸論文参照.

〔6〕 N. G. van Kampen: Phys. Rev., **89**, 1072 (1953); **91**, 1267 (1953).

〔7〕 J.S. Toll: Phys. Rev., **104**, 1760 (1956).

〔8〕 D.Y. Wong: Phys. Rev., **107**, 303 (1957).

スクリーンにあけた孔による回折について

〔9〕 H. Levine and J. Schwinger: Phys. Rev., **74**, 958 (1948); **75**, 1423 (1949).

管の端から出る音波の角分布や管の長さの補正についての厳密な取扱いは同著者の Phys. Rev., **73**, 383 (1948) が興味がある.

第3章　MKS 有理単位系で書かれた電磁気学の書をいくつかあげれば

〔10〕 小谷正雄：電磁気学（岩波講座　現代物理学).

〔11〕 宮島龍興：電磁気学（みすず書房，1952).

〔12〕 B.I. Bleaney and B. Bleaney: Electricity and Magnetism (Oxford, 1957).

〔13〕 J.A. Stratton: Electromagnetic Theory (McGraw-Hill, 1941).

電磁波の一般的な参考書として

〔14〕 S. A. Schelkunoff: Electromagnetic Waves (D. van Nostrand Co., New York, 1943)

があり，さらに

〔15〕 A. Sommerfeld (A 編の参考書〔18〕) 第6章を加えておく.

変分法，WKB 法，準静的取扱いなどの近似解法を含めてマイクロ波の境界値問題を論じたものは

〔16〕 木原太郎：導波管（修教社，1947，絶版，著者保有のものをお分けできます).

〔17〕 F. E. Borgnis und C. H. Papas: Randwertprobleme der Mikrowellenphysik (Springer, 1955).

古典的な回折の問題を，最近の文献まで含めて解説したものは

〔18〕 W. Franz: Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen (Springer, 1957).

電磁波を数学として基礎づけたものは

〔19〕 C. Müller: Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen (Springer, 1957).

第4章　磁気流体力学の古典として

〔20〕 H. Alfvén: Cosmical Electrodynamics (Oxford, 1950).

ただしこの書の太陽黒点の理論は現在そのまま受けられてはいない．同じ方面で

〔21〕 T. G. Cowling: Magnetohydrodynamics (Interscience Publishers, New York, 1957).

プラズマ理論については

〔22〕 L. Spitzer: Physics of Fully Ionized Gases (Interscience Publishers, 1956)

〔23〕 木原太郎，水野幸雄：プラズマの物理学（岩波講座，1959）．

第5章　高速気流に関する一般的な参考書としては，たとえば

〔24〕 R. Sauer: Einführung in die theoretische Gasdynamik, 2版 (Springer, 1951).

〔25〕 L. Howarth 編: Modern Developments in Fluid Dynamics. High Speed Flow (Oxford, 1953).

〔26〕 W. R. Sears 編: General Theory of High Speed Aerodynamics (Princeton Univ. Press, 1954).

〔27〕 R. von Mises: Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow (Academic Press, New York, 1958).

〔28〕 K. Oswatitsch: Gas Dynamics (Academic Press, New York, 1956)

が挙げられる．特に数学的色彩の濃い高速流体力学の展望として

〔29〕 L. Bers: Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics (Wiley, 1958)

が推奨される．なお，本章の内容は

〔30〕 I. Imai: Approximation Methods in Compressible Fluid Dynamics (Univ. of Maryland, Inst. for Fluid Dynamics and Applied Math., Tech. Note BN-95, 1957)

によるところが多い．(*9.34*) の $P_{2m}$, $Q_{2m}$ や，(*12.15*) の $\phi_{30}, \phi_{31}, \phi_{32}$ などの具体的な表式はその中に与えられている．

# 索引

## E



## F



## G

## H



## I

## L

## M



## N

## O



## P



## R



## S

数学概論　応用編

1960年7月30日　第1刷発行 ©
1974年9月20日　第14刷発行　　¥2200

編　者　寺沢寛一（てらさわ　かんいち）

発行者　岩波雄二郎

東京都千代田区一ツ橋 2-5-5

発行所　株式会社　岩波書店

落丁本・乱丁本はお取替いたします　　大日本印刷・牧製本